

---

# METODI STATISTICI E COMPUTAZIONALI

---

Stefania Spagnolo

*Dipartimento di Matematica e Fisica, Univ. del Salento*



---

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE N

---

**Eulero - RK**

# SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- Soluzione di **sistemi di equazioni differenziali del primo ordine** nell'intervallo  $a=t_0 \leq t \leq b=t_N$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_a}{dt} = f_a(y_a, y_b, t) \\ \frac{dy_b}{dt} = f_b(y_a, y_b, t) \\ y_a(t_0) = y_{a,0} \quad y_b(t_0) = y_{b,0} \end{array} \right.$$

- Il sistema rappresenta un problema di Cauchy relativo a due equazioni differenziali.
  - le due funzioni  $f$  dipendono entrambe sia da  $y_a$  che da  $y_b$ . Se così non fosse, le due equazioni sarebbero disaccoppiabili e il problema si ridurrebbe a due problemi di Cauchy indipendenti.
- Posso passare ad una rappresentazione matriciale che mi permette di rappresentare il problema con una singola scrittura e rende il formalismo generalizzabile ad  $n$  equazioni.

# SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- Indico con il vettore colonna  $\vec{P}(t)$  la coppia delle due funzioni  $y_a$  e  $y_b$  soluzione del mio sistema di equazioni

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} y_a(t) \\ y_b(t) \end{pmatrix}$$

- Indico con il vettore colonna  $\vec{F}(y_a, y_b, t)$  la coppia di funzioni  $f$  che caratterizzano il mio problema

$$\vec{F}(y_a, y_b, t) = \begin{pmatrix} f_a(y_a, y_b, t) \\ f_b(y_a, y_b, t) \end{pmatrix}$$

- Il problema di Cauchy diventa ->
  - dove  $\vec{P}_0$  è il vettore colonna delle condizioni iniziali su  $y_a$  e  $y_b$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \vec{F}(y_a, y_b, t) \\ \vec{P}(t_0) = \vec{P}_0 \end{array} \right.$$

# SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

## del primo ordine

- la soluzione numerica del sistema di equazioni differenziali all'interno dell'intervallo  $a \leq t \leq b$  è costituita da una successione di terne di valori numerici  $\{ y_{a_i}, y_{b_i}, t_i \}$  con  $i=0, \dots, N$
- Come nel caso di una singola equazione, uno sviluppo in serie permette di determinare il valore delle funzioni nel punto  $1$  a partire dal valore nel punto  $0$

$$\begin{pmatrix} y_a(t_0 + h) \\ y_b(t_0 + h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a(t_0) + hy'_a(t_0) + \frac{1}{2}h^2 y''_a(\xi_a) \\ y_b(t_0) + hy'_b(t_0) + \frac{1}{2}h^2 y''_b(\xi_b) \end{pmatrix} =$$

$h$  è il passo

$$= \begin{pmatrix} y_a(t_0) + hf_a(y_a(t_0), y_b(t_0), t_0) + \frac{1}{2}h^2 y''_a(\xi_a) \\ y_b(t_0) + hf_b(y_a(t_0), y_b(t_0), t_0) + \frac{1}{2}h^2 y''_b(\xi_b) \end{pmatrix}$$

- Anche in questo caso l'algoritmo di Eulero consiste nel fermarsi all'ordine 1 dell'approssimazione.

# METODO DI EULERO

- Applicando Eulero al primo passo:

$$\begin{pmatrix} y_{a,1} \\ y_{b,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{a,0} + hf_a(y_{a,0}, y_{b,0}, t_0) \\ y_{b,0} + hf_b(y_{a,0}, y_{b,0}, t_0) \end{pmatrix}$$
- al passo i-esimo

$$\begin{pmatrix} y_{a,i+1} \\ y_{b,i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{a,i} + hf_a(y_{a,i}, y_{b,i}, t_i) \\ y_{b,i} + hf_b(y_{a,i}, y_{b,i}, t_i) \end{pmatrix}$$
- Con il formalismo matriciale:  $\vec{P}_{i+1} = \vec{P}_i + h\vec{F}(\vec{P}_i, t_i)$
- NOTA: valido anche per un numero di equazioni generico

# METODO DI RUNGE KUTTA

- Nel caso di sistemi di equazioni differenziali del primo ordine, l'algoritmo di Runge Kutta del **secondo** / **quarto ordine** diventa:

$$\vec{P}_{i+1} = \vec{P}_i + h\vec{K}_2$$

$$\vec{P}_{i+1} = \vec{P}_i + \frac{1}{6}h(\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4)$$

- Dove i vettori K sono definiti

$$\vec{K}_1 = \vec{F}(\vec{P}_i, t_i)$$

$$\vec{K}_2 = \vec{F}\left(\vec{P}_i + \frac{h}{2}\vec{K}_1, t_i + \frac{h}{2}\right)$$

$$\vec{K}_3 = \vec{F}\left(\vec{P}_i + \frac{h}{2}\vec{K}_2, t_i + \frac{h}{2}\right)$$

$$\vec{K}_4 = \vec{F}(\vec{P}_i + h\vec{K}_3, t_i + h)$$

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE

- Il metodo di **risoluzione di equazioni differenziali di ordine superiore al primo** consiste nella loro riduzione a un sistema di  $M$  equazioni differenziali del primo ordine con un opportuno cambiamento di variabili
- Consideriamo un'equazione del **secondo ordine**:
 
$$\begin{cases} y''(t) = f(y, y', t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$
- In questo caso il problema di Cauchy è caratterizzato da due condizioni iniziali (per esempio: conoscenza della posizione iniziale e della velocità iniziale)
- Posso introdurre le due nuove variabili:  $y_a(t) = y(t)$  e  $y_b(t) = y'(t)$

## equazione del **secondo ordine**

- Il problem di Cauchy e' riformulato in questo modo
  - analogamente per un'eq. di ordine  $n$**
- $$\begin{cases} y'_a(t) = y_b(t) \\ y'_b(t) = f(y_a(t), y_b(t), t) \\ y_a(t_0) = y_0 \quad y_b(t_0) = y'_0 \end{cases}$$



# EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE

- La soluzione di **equazioni differenziali di ordine  $n$  con l'algoritmo di Eulero o con l'algoritmo di R-K** si affronta alla stessa maniera
  - 1) si riformula il problema in termini di un sistema di eq. del primo ordine con condizioni al contorno

## equazione del secondo ordine

- Il problem di Cauchy e' riformulato in questo modo
  - analogamente per un'eq. di ordine  $n$*
- $$\begin{cases} y'_a(t) = y_b(t) \\ y'_b(t) = f(y_a(t), y_b(t), t) \\ y_a(t_0) = y_0 \quad y_b(t_0) = y'_0 \end{cases}$$

- 2) si risolve il sistema con la procedura iterativa di Eulerio o di RK (del II o del IV ordine)

**Eulero**

$$\vec{P}_{i+1} = \vec{P}_i + h\vec{F}(\vec{P}_i, t_i)$$

$$\vec{P}_{i+1} = \vec{P}_i + h\vec{K}_2$$

**RK II**

$$\vec{P}_{i+1} = \vec{P}_i + \frac{1}{6}h(\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4)$$

**RK IV**

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- Gli algoritmi di R-K sono algoritmi **espliciti a singolo passo**
- Un algoritmo si dice **esplicito** *quanto il valore al passo successivo è direttamente calcolabile conoscendo i valori assunti ai passi precedenti*. Quando ciò non è vero l'algoritmo si dice **implicito**
- Un algoritmo si dice **a singolo passo** *quando per calcolare il valore ad un passo è necessario conoscere solo il valore al passo precedente*. Se invece nel calcolo del valore al passo  $i$ -esimo è necessario conoscere il valore assunto dalla funzione in più passi precedenti l'algoritmo è detto a **multi-passo (multi-step)**

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI

## Algoritmo di Adams-Bashforth a due passi

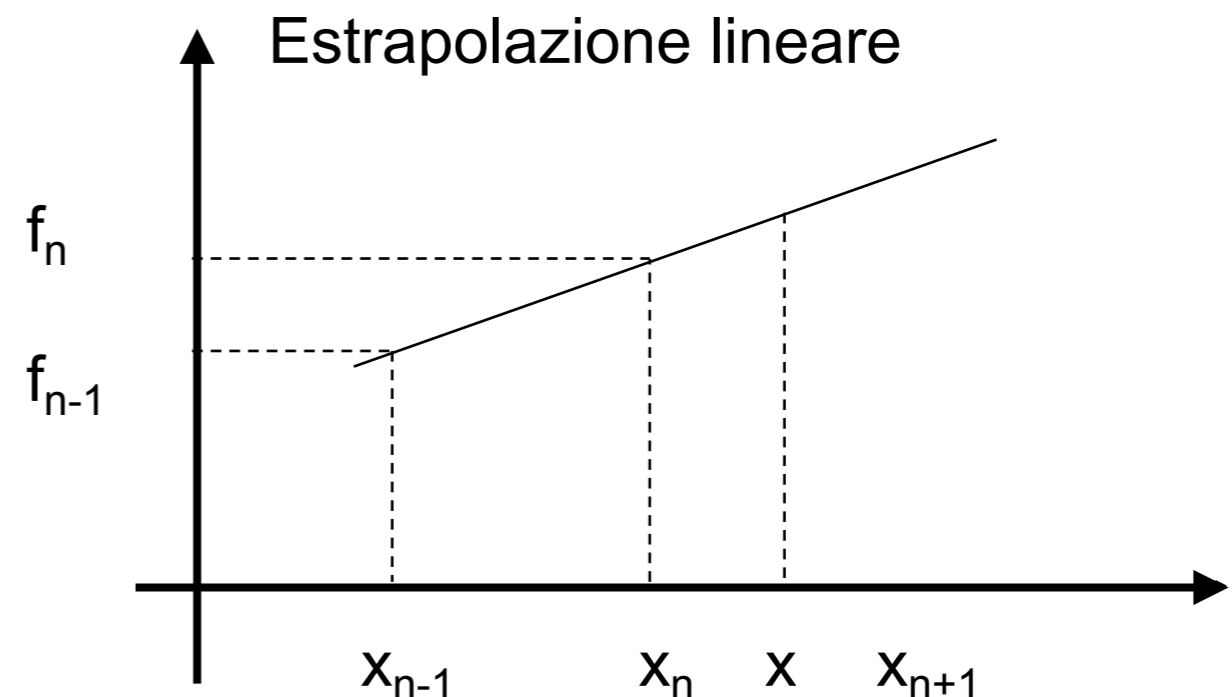
- **Un algoritmo a più passi** lega il punto  $y_{n+1}$  non solo al punto  $y_n$  ma anche ai punti precedenti. Consideriamo la relazione:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y) dt$$

- Cerchiamo di sviluppare una formula ricorsiva generale, che sfrutti una estrapolazione della funzione  $f(t, y)$  nella regione  $x_n < t < x_{n+1}$  a partire dai valori noti nelle regioni precedenti.

- Partiamo dall'extrapolazione lineare della funzione usando i punti  $n-1$  ed  $n$

$$\frac{f - f_n}{x - x_n} = \frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$$



# EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- tenendo presente che  $h=x_n-x_{n-1}$

$$f = f_n \frac{x - x_n}{h} - f_{n-1} \frac{x - x_n}{h} + f_n$$

- Usando questa approssimazione posso calcolare l'integrale

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t, y) dt$$

$$y_{n+1} = y_n + h \left( \frac{3}{2} f(t_n, y_n) - \frac{1}{2} f(t_{n-1}, y_{n-1}) \right) + O(h^3)$$

- infatti  $\int_{x_n}^{x_{n+1}} (x - x_n) dx = \int_0^h y dy = \frac{h^2}{2}$

La struttura dell'algoritmo così sviluppato è a due passi.

Per calcolare il valore della funzione al passo  $n+1$  occorre utilizzare sia il valore al passo  $n$  che quello al passo  $n-1$ .

Questo algoritmo è detto **algoritmo di Adams-Bashforth a due passi**

Negli algoritmi a multi passi la conoscenza del solo primo punto ( $y_0$ ) non è sufficiente. In generale, quindi, per applicare questi algoritmi occorre valutare la funzione nei primi punti con un algoritmo a singolo passo.

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- **Un algoritmo implicito** è caratterizzato dal fatto che il valore della funzione al passo  $n+1$  non è calcolabile esplicitamente (cioè è presente solo nel primo membro della relazione di ricorrenza) ma compare nell'equazione ricorsiva in entrambi i membri.

- Consideriamo la relazione: 
$$y' = f(t, y)$$

- e calcoliamola in un punto intermedio della successione 
$$y'(x_{n+\frac{1}{2}}) = f(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}})$$

- Per la definizione di derivata posso approssimare: 
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + O^2 = f(t_{n+\frac{1}{2}}, y_{n+\frac{1}{2}})$$

- Inoltre posso stimare il termine al secondo membro come media tra i valori che la funzione  $f$  assume nei punti  $n$  e  $n+1$  
$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} + O^2 = \frac{1}{2} (f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)) + O^2$$

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- Ottengo quindi la relazione ricorsiva

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(f(t_{n+1}, y_{n+1}) + f(t_n, y_n)) + O^2$$

- nella quale il termine di posto  $n+1$  è presente in entrambi i membri il che non permette un calcolo esplicito,  $y_{n+1}$  deve essere determinato risolvendo l'equazione, eventualmente con tecniche numeriche.

- I metodi impliciti sono raramente utilizzati direttamente ma sono alla base della tecnica ***predictor-corrector***
  - il valore al passo  $n+1$  è ***“predetto” utilizzando un metodo esplicito*** e ***utilizzato nel metodo implicito per ricalcolarlo (“correggerlo”)*** ottenendo così una maggiore precisione.
- Esistono poi metodi multi passo impliciti (ex.: l'algoritmo di Adams-Moulton che rende l'algoritmo multi passi di Adams visto in precedenza implicito) e in generale una grande varietà di metodi sviluppati per risolvere specifiche equazioni differenziali.
- I metodi alla R-K sono però i più generali, affidabili e semplici da implementare.

---

# ESEMPI

---

## Caduta in fluido viscoso Proiettile

# DINAMICA DEI FLUIDI IDEALI

## Definizione di fluidi ideali:

- \* assenza di attrito viscoso
  - gli strati di fluido scorrono l'uno sull'altro senza attrito (no dissipazione di energia)
- \* fluido incomprimibile
  - densità costante
- \* flusso laminare o stazionario
  - i cammini seguiti dalle particelle di fluido non si intersecano; le velocità in ogni punto sono costanti nel tempo
- \* flusso irrotazionale
  - una piccola ruota a pale collocata nel fluido (in qualsiasi punto) non ruota attorno al suo asse

Un fluido ideale in movimento può essere immaginato costituito da tante lamine sottili in grado di scorrere l'una sull'altra senza attrito.

Il movimento del fluido è sempre parallelo alla superficie delle lamine.

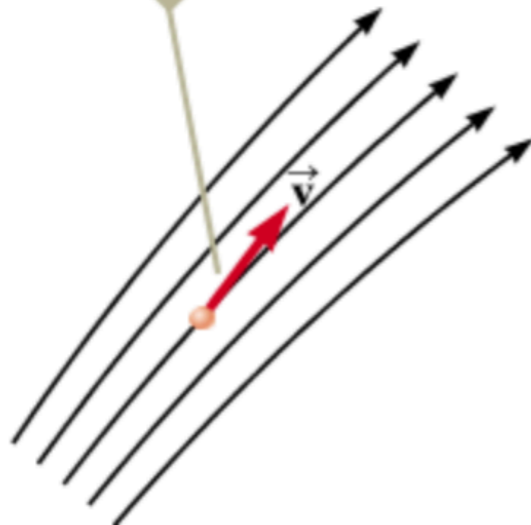
## Esempi:

- in un fiume il movimento dell'acqua, supposta un fluido ideale, può essere scomposto nello scorrimento di tante lamine orizzontali sovrapposte che si muovono parallele al letto del fiume;
- in un condotto di sezione cilindrica il movimento può essere scomposto in tante lamine circolari concentriche con raggio crescente a partire dall'asse centrale del condotto che si muovono parallele all'asse del condotto.



# DINAMICA DEI FLUIDI IDEALI

In ogni punto lungo il cammino la velocità della particella è tangente alla linea di flusso.

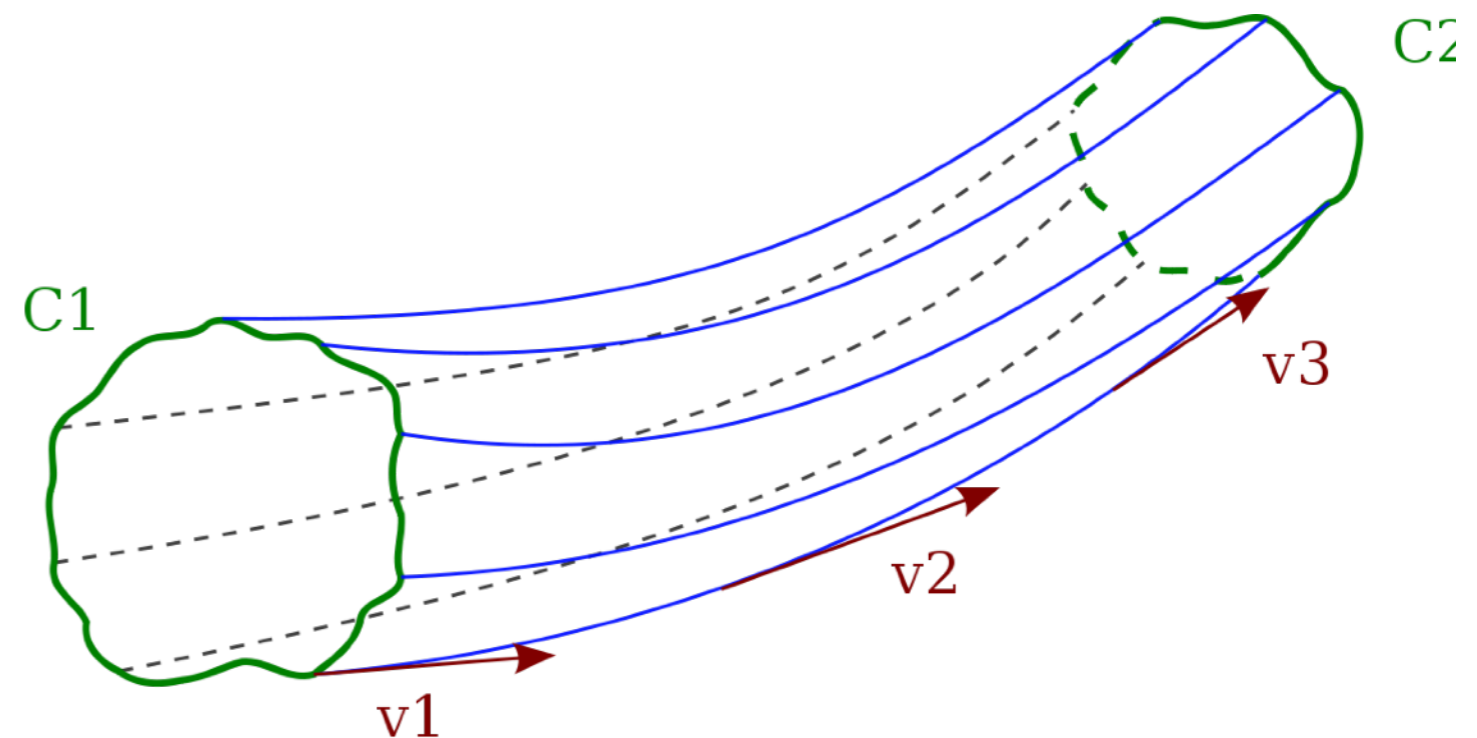


**FIGURA 15.16** Una particella in flusso laminare segue le linee di flusso.

Linea di flusso

o *linea di corrente* = curva che in ogni punto è tangente al vettore velocità in quel punto

superficie formata da una serie di linee di flusso



Tubo di flusso

# FLUIDI REALI

*I fluidi (definizione) non dovrebbero presentare resistenza al moto di scorrimento;* invece nei fluidi reali tale resistenza è osservata

una forma d'attrito interno, detta **viscosità**, fra strati adiacenti di fluido si oppone allo scorrimento dell'uno sull'altro;

*anche in regime laminare*

Anche in questo caso il movimento del

fluido è sempre parallelo alla superficie delle lamine ma stavolta, proprio a causa della

presenza dell'attrito nel movimento sarà speso del lavoro. L'intensità di queste forze

d'attrito può essere espressa secondo la seguente espressione:  $F = \eta \frac{dv}{dy} \Delta S$  dove  $\Delta S$

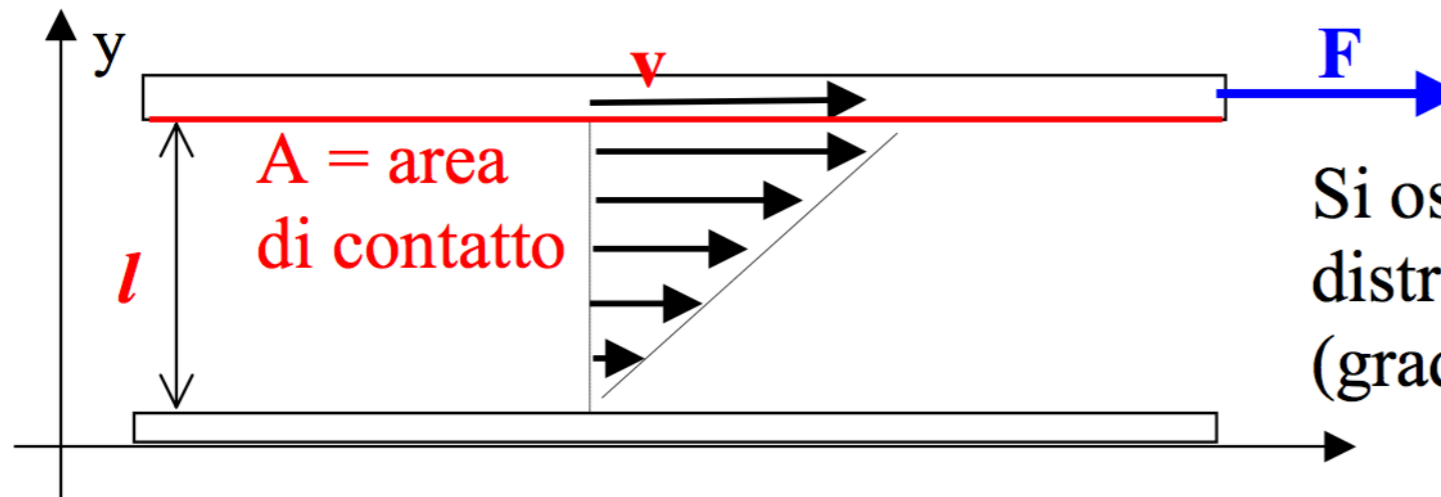
è la superficie di contatto fra due lamine contigue,  $\frac{dv}{dy}$  il gradiente di velocità fra le

due lamine ed infine  $\eta$  la **viscosità** del fluido. La viscosità viene misurata in Pa·s nel

**SI** oppure in poise (P) nel sistema **CGS** ( $1\text{Pa} \cdot \text{s} = 10 \text{ P}$ ).

# FLUIDI REALI - VISCOSITÀ

Consideriamo due lastre di vetro, una fissa e l'altra in moto con velocità costante  $v$ , al cui interno si trova un fluido reale.



Si osserva una distribuzione di velocità (gradiente di velocità)

Per  $v = \text{costante}$ , bisogna applicare  $F = \text{costante}$  e risulta  $F \propto \frac{vA}{l}$  con una proporzionalità  $\eta$  che dipende al fluido interposto.

$$\eta = \frac{Fl}{Av} \quad \text{ovvero} \quad F_v = \eta \frac{Av}{l} \quad \text{o più in generale} \quad F_v = \eta A \frac{dv}{dy}$$

dove si assume che  $\eta$  sia **indipendente** da  $v$ .

# ESEMPI

Shape	Drag Coefficient
Sphere	0.47
Half-sphere	0.42
Cone	0.50
Cube	1.05
Angled Cube	0.80
Long Cylinder	0.82
Short Cylinder	1.15
Streamlined Body	0.04
Streamlined Half-body	0.09

$$F_a = \frac{1}{2} c_r \rho S v^2$$

Measured Drag Coefficients

Quando un corpo si muove all'interno di un fluido (liquido o gas) è soggetto ad una forza di attrito dovuta all'interazione del corpo con le molecole del fluido. Tale forza di attrito è legata ad un numero adimensionale detto numero di Reynolds (Re) che dipende dalla velocità del corpo.

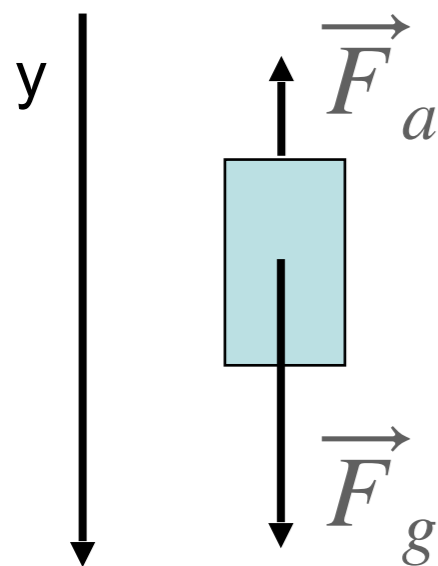
- Se il corpo si muove **a bassa velocità (Re < 1)**, prevalgano le forze di viscosità rispetto a quelle d'inerzia (**regime di Stokes**), In questo caso la forza di attrito è proporzionale alla velocità del corpo nel fluido,
- Se la velocità del corpo è superiore (**Re > 1**), le forze d'inerzia prevalgono rispetto alla viscosità. Il moto del fluido può essere laminare (fino a Re = 10<sup>6</sup>) oppure turbolento (per Re > 10<sup>6</sup>). In ogni caso è possibile approssimare la forza di attrito con la formula

$$\vec{F}_a = -\frac{1}{2} c_r \rho S v^2 \hat{v}$$

Dove  $\rho$  è la densità del fluido  $S$  è la sezione d'urto dell'oggetto e  $c_r$  è il coefficiente aerodinamico di resistenza che dipende dalla forma dell'oggetto ed è una grandezza adimensionale (il CX delle auto)

# UN ESEMPIO

- **Moto di caduta di un grave in presenza di attrito in regime laminare o turbolento**



$$\begin{aligned}\vec{F}_g + \vec{F}_a &= m \vec{a} \\ \vec{F}_g &= mg \hat{y} \\ \vec{F}_a &= -\frac{1}{2} c_r S \rho v^2 \hat{y}\end{aligned}$$

Il corpo è di forma cilindrica con  
 $m=0.1$  kg  
 $S=4 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup>  
 $c_r=0.82$   
 La densità dell'aria è  
 $\rho=1.2$  kg/m<sup>3</sup>

- Il problema è unidimensionale e l'**equazione differenziale del secondo ordine** da risolvere è:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -0.00197 \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + 9.8$$

con condizioni  
iniziali

$$\begin{aligned}y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0\end{aligned}$$

# UN ESEMPIO

## Moto di caduta di un grave in presenza di attrito in regime laminare o turbolento

- Il **sistema di equazioni differenziali del primo ordine** che corrisponde al problema di Cauchy del secondo ordine è:

$$\frac{dv}{dt} = -0.00197(v)^2 + 9.8$$

$$\frac{dy}{dt} = v$$

$$y(0) = 0$$

$$v(0) = 0$$

- Se lo riscriviamo usando la simbologia generica precedente, il sistema diventa:

$$\frac{dy_a}{dt} = f_a(y_a, y_b, t) = -0.00197(y_a)^2 + 9.8$$

$$\frac{dy_b}{dt} = f_b(y_a, y_b, t) = y_a$$

$$y_a(0) = 0$$

$$y_b(0) = 0$$

- Con  $y_a =$  velocità,  $y_b =$  posizione

# Moto di caduta di un grave in presenza di attrito in regime laminare o turbolento

```
double fa(double t, double ya, double yb) {  
    double f=-0.00196*ya*ya+9.8;  
    return f;  
}  
double fb(double t, double ya, double yb) {  
    double f=ya;  
    return f;  
}
```

Eseguo la macro che crea e riempie il TTree

```
root [0] .x EuleroMult1.C  
root [1] TFile *_file0 = TFile::Open("EuleroMult1.root")
```

Apro il file che contiene il tree

```
(TFile *) 0x12fcc2800  
root [2] .ls  
TFile**      EuleroMult1.root  
TFile*       EuleroMult1.root  
KEY: TTree   T;1      Equazioni Differenziali
```

Guardo elenco delle variabili

```
root [3] T->Print()  
*****  
*Tree      :T          : Equazioni Differenziali *  
*Entries   : 100000   : Total =          2407906 bytes File Size = 1631033 *  
*          :          : Tree compression factor = 1.48 *  
*****  
*Br      0 :t          : t/D *  
*Entries  : 100000   : Total Size=      802507 bytes File Size = 381905 *  
*Baskets  : 26       : Basket Size=     32000 bytes Compression= 2.10 *  
*.....*  
*Br      1 :V          : ya/D *  
*Entries  : 100000   : Total Size=      802510 bytes File Size = 582299 *  
*Baskets  : 26       : Basket Size=     32000 bytes Compression= 1.38 *  
*.....*  
*Br      2 :Y          : yb/D *  
*Entries  : 100000   : Total Size=      802510 bytes File Size = 665669 *  
*Baskets  : 26       : Basket Size=     32000 bytes Compression= 1.20 *  
*.....*
```

Plot di ya (velocita') vs tempo

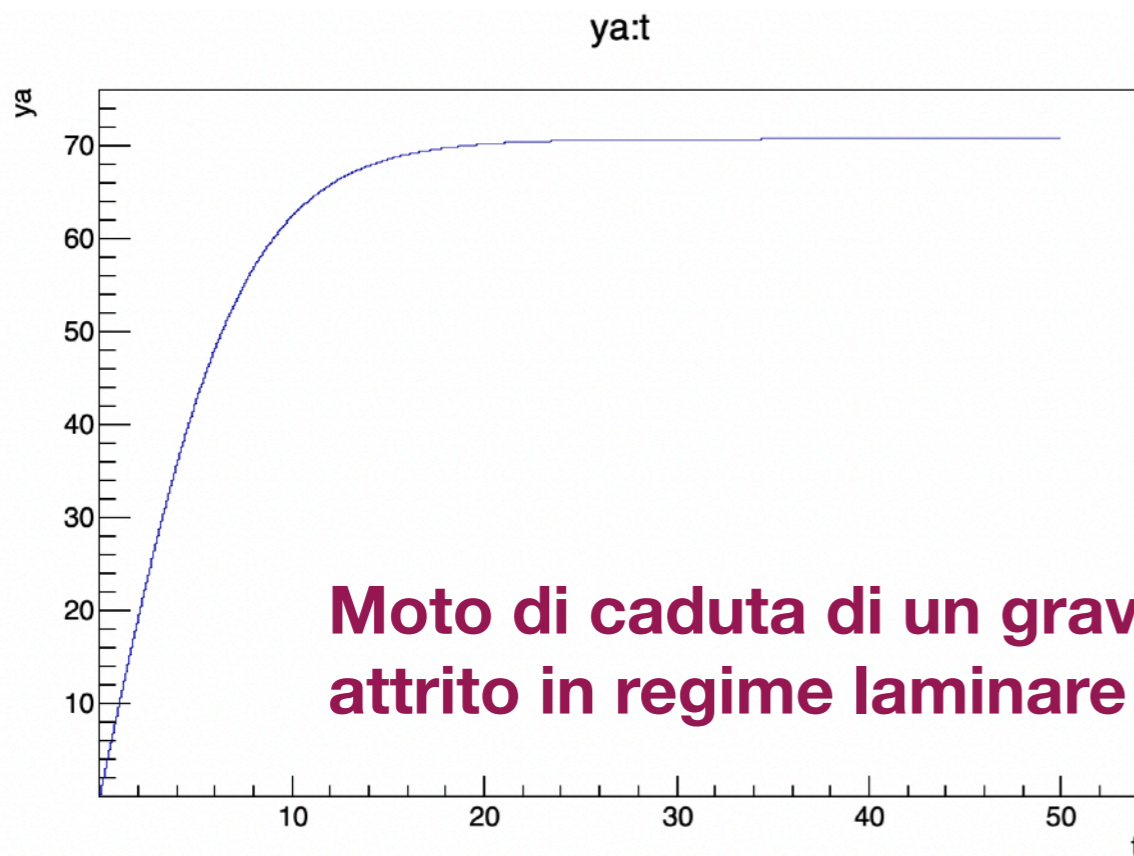
```
root [4] T->Draw("ya:t","","L")  
Info in <TCanvas::MakeDefCanvas>: created default TCanvas with name c1  
(long long) 100000
```

Plot di yb (coordinata y) vs tempo

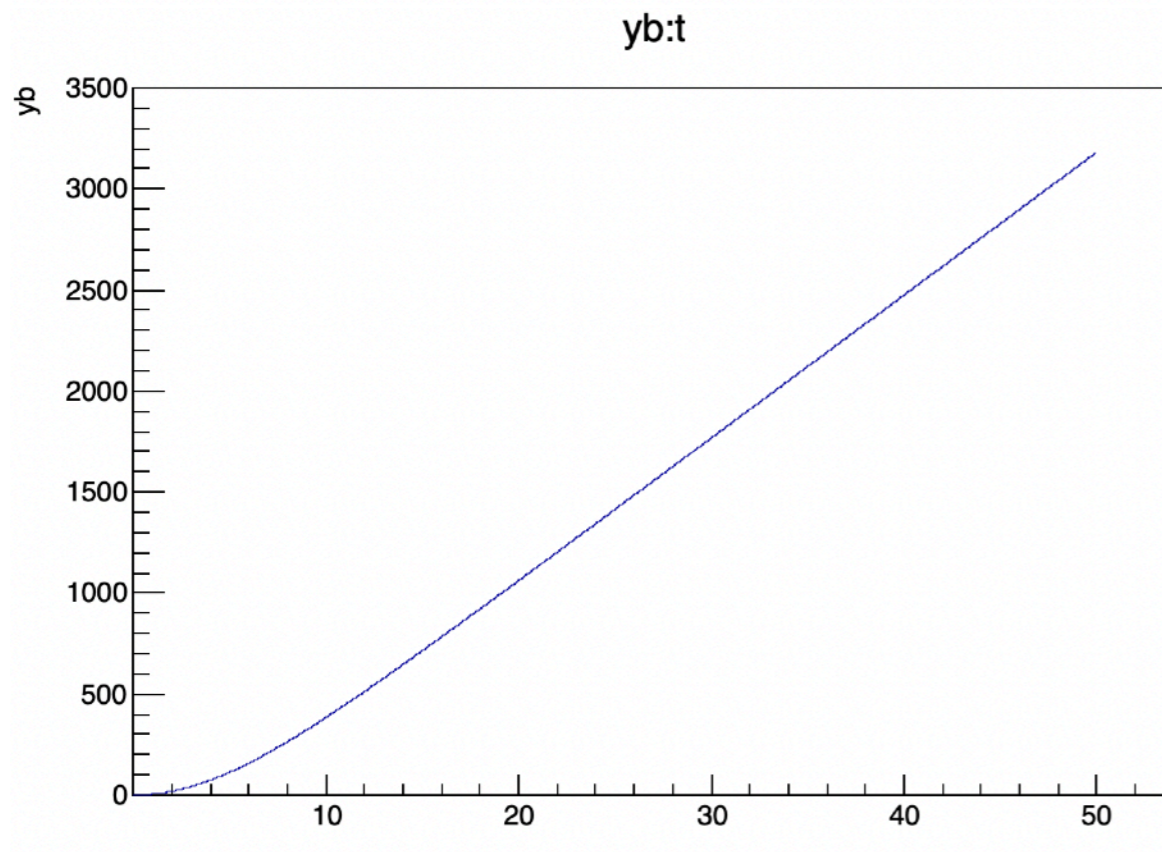
```
root [5] new TCanvas  
(TCanvas *) 0x11e267060  
root [6] T->Draw("yb:t","","L")  
(long long) 100000
```

```
void EuleroMult1() {  
    // TTree che conterra il risultato delle simulazione  
    // Apro file  
    TFile * f=new TFile("EuleroMult1.root","RECREATE");  
    // Creo il TTree  
    TTree * T= new TTree("T","Equazioni Differenziali");  
    // Le variabili del TTree  
    double ya=0,yb=0,t=0;  
    T->Branch("t",&t,"t/D");  
    T->Branch("V",&ya,"ya/D");  
    T->Branch("Y",&yb,"yb/D");  
    // step usato per la discretizzazione  
    int NPoint=100000;  
    double h;  
    // step dato l'intervallo e il numero di punti.  
    h=50./NPoint;  
    // condizioni iniziali  
    t=0;  
    ya=0;  
    yb=0;  
    double ya_old=ya,yb_old=yb,t_old=t;  
    // Loop principale  
    for (int i=0; i<NPoint; i++) {  
        t=t+h;  
        // formula di Eulero  
        ya=ya_old+h*fa(t_old, ya_old, yb_old);  
        yb=yb_old+h*fb(t_old, ya_old, yb_old);  
        // riempio TTree  
        T->Fill();  
        // mi preparo a passo successivo  
        ya_old=ya;  
        yb_old=yb;  
        t_old=t;  
    }  
    //  
    T->Write();  
    f->Close();  
}
```

# SOLUZIONE NUMERICA



- Velocita'
  - esponenzialmente raggiunge il valore limite



```
root [4] T->Draw("ya:t", "", "L")
Info in <TCanvas::MakeDefCanvas>: created default TCanvas with name c1
(long long) 100000
root [5] new TCanvas
(TCanvas *) 0x11e267060
root [6] T->Draw("yb:t", "", "L")
(long long) 100000
```

Plot di ya (velocita') vs tempo

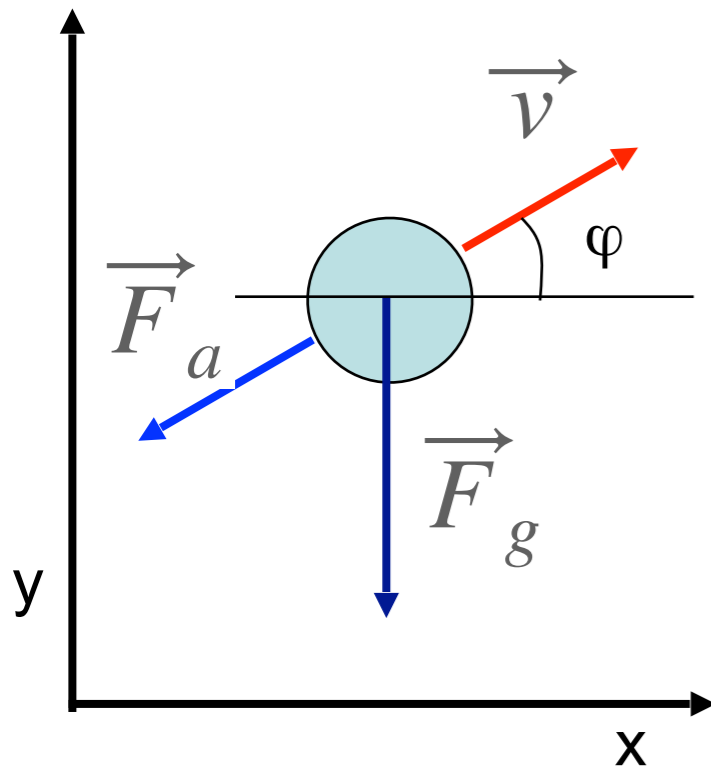
Plot di yb (coordinata y) vs tempo

- Legge oraria  $y(t) \Rightarrow$ 
  - raggiunge presto l'andamento lineare del moto rettilineo uniforme



# SISTEMA DI EQ DEL SECONDO ORDINE

- Consideriamo il ***moto di un proiettile (sferico) soggetto ad attrito***



$$\vec{F}_g + \vec{F}_a = m \vec{a}$$

$$\vec{F}_g = -mg\hat{y}$$

$$\vec{F}_a = -\frac{1}{2}c_r S \rho v v_y \hat{y} - \frac{1}{2}c_r S \rho v v_x \hat{x}$$

$$v_x = v \cos(\varphi)$$

$$v_y = v \sin(\varphi)$$

Valori numerici dei parametri:

Sfera

$$m=0.1 \text{ kg}$$

$$S=7.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$c_r=0.47$$

La densità dell'aria è

$$\rho=1.2 \text{ kg/m}^3$$

Il sistema di equazioni differenziali da risolvere è quindi:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -0.022 \left( \frac{dy}{dt} \right) \sqrt{\left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx}{dt} \right)^2} - 9.8$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -0.022 \left( \frac{dx}{dt} \right) \sqrt{\left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dx}{dt} \right)^2}$$

# SISTEMA DI EQ DEL SECONDO ORDINE

## *moto di un proiettile (sferico) soggetto ad attrito*

Le due equazioni differenziali del secondo ordine diventano 4 equazioni differenziali del primo ordine

*Condizioni iniziali:*

$$x(0)=y(0)=0$$

$$v_x(0) = v_y(0) = 300 \text{ m/s} \quad (\Phi = 45)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -0.022v_y\sqrt{v_x^2 + v_y^2} - 9.8$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -0.022v_x\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dy_a}{dt} = -0.022y_a\sqrt{y_a^2 + y_b^2} - 9.8$$

$$\frac{dy_b}{dt} = -0.022y_b\sqrt{y_a^2 + y_b^2}$$

$$\frac{dy_c}{dt} = y_a$$

$$\frac{dy_d}{dt} = y_b$$

Usando la simbologia precedente

$y_a \Rightarrow$  **velocita' y**

$y_b \Rightarrow$  **velocita' x**

$y_c \Rightarrow$  **coordinata y**

$y_d \Rightarrow$  **coordinata x**

# SISTEMA DI EQ DEL SECONDO ORDINE

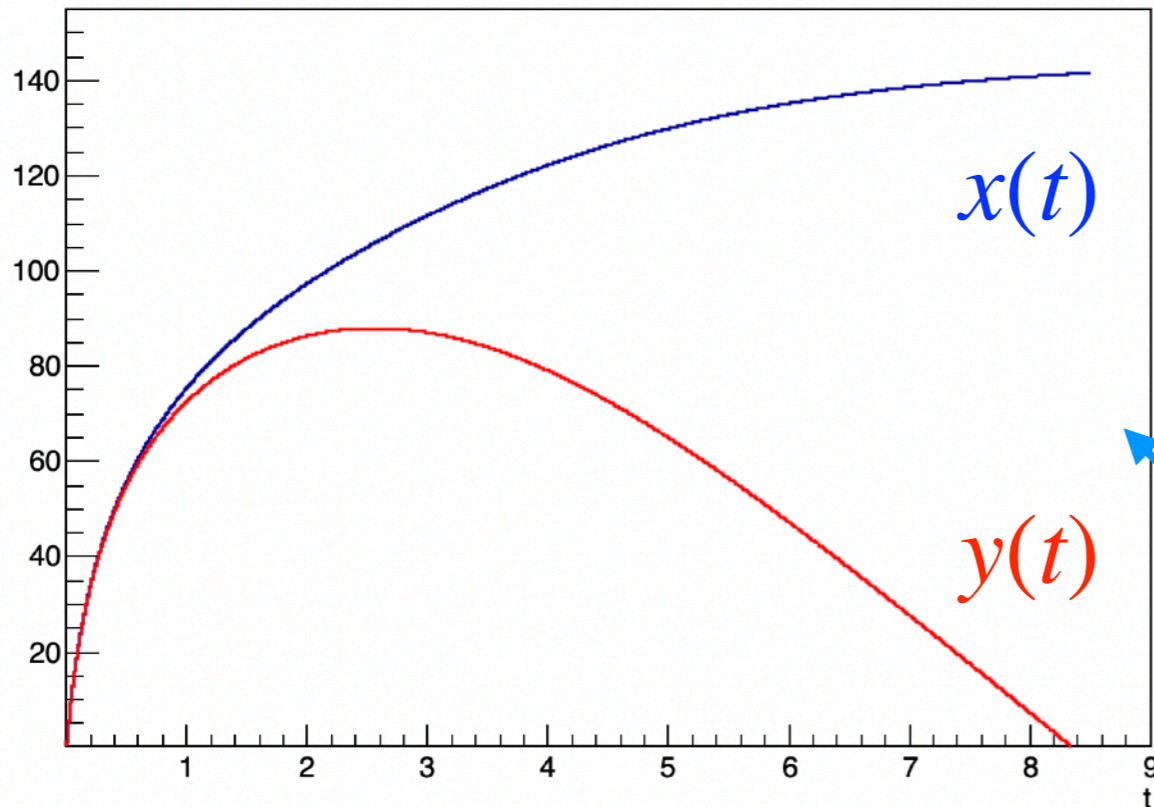
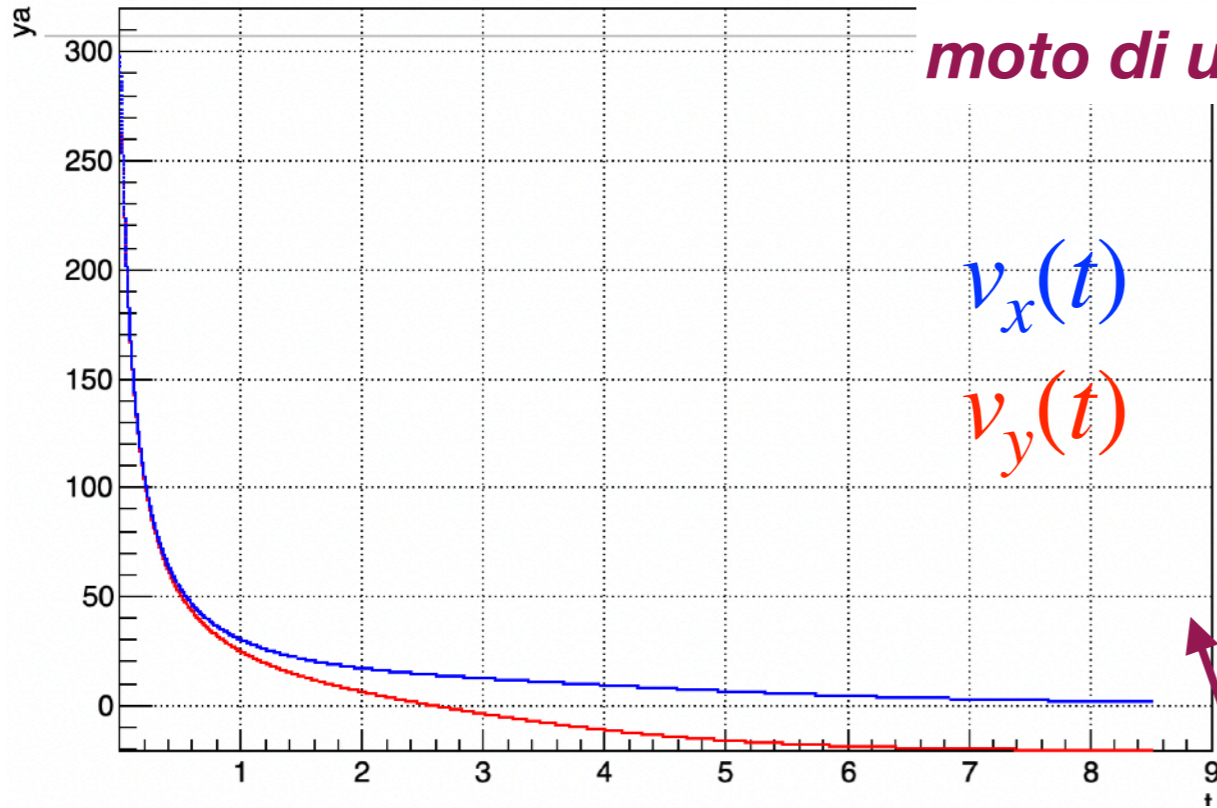
## EuleroMult2.C

```
// Creo il TTree
TTree * T= new TTree("T","Equazioni Differenziali");
// Le variabili del TTree
double ya=0,yb=0,yc=0,yd=0,t=0;
T->Branch("t",&t,"t/D");
T->Branch("Vy",&ya,"ya/D");
T->Branch("Vx",&yb,"yb/D");
T->Branch("Y",&yc,"yc/D");
T->Branch("X",&yd,"yd/D");
//step usato per la discretizzazione
int NPoint=10000;
double h;
h=8.5/NPoint;
// condizioni iniziali
t=0;
ya=300; // Vy Si assuma che la velocità iniziale sia
yb=300; // Vx uguale su entrambi gli assi (angolo 45 gradi)
yc=0; // Y posizione iniziale nell'origine del sistema
yd=0; // X di riferimento
double ya_old=ya,yb_old=yb,yc_old=yc,yd_old=yd,t_old=t;
// Loop principale
for (int i=0; i<NPoint; i++) {
    t=t+h;
// formula di Eulero
ya=ya_old+h*fa(t_old,ya_old,yb_old,yc_old,yd_old);
yb=yb_old+h*fb(t_old,ya_old,yb_old,yc_old,yd_old);
yc=yc_old+h*fc(t_old,ya_old,yb_old,yc_old,yd_old);
yd=yd_old+h*fd(t_old,ya_old,yb_old,yc_old,yd_old);
// riempio TTree
T->Fill();
// mi preparo a passo successivo
ya_old=ya;
yb_old=yb;
yc_old=yc;
yd_old=yd;
t_old=t;
}
```

```
double fa(double t, double ya, double yb, double yc, double yd) {
    double f=-0.022*ya*sqrt(ya*ya+yb*yb)-9.8;
    return f;
}
double fb(double t, double ya, double yb, double yc, double yd) {
    double f=-0.022*yb*sqrt(ya*ya+yb*yb);
    return f;
}
double fc(double t, double ya, double yb, double yc, double yd) {
    double f=ya;
    return f;
}
double fd(double t, double ya, double yb, double yc, double yd) {
    double f=yb;
    return f;
}
```

# SISTEMA DI EQ DEL SECONDO ORDINE

*moto di un proiettile (sferico) soggetto ad attrito*



```

root [0] .X EuleroMult2.C
root [2] TFile *_file0 = TFile::Open("EuleroMult2.root")
root [4] T->Print()
*****
*Tree   :T           : Equazioni Differenziali                *
*Entries : 10000     : Total =          403769 bytes File Size =   347495 *
*       :           : Tree compression factor =    1.16          *
*****
*Br    0 :t           : t/D                                  *
*Entries : 10000     : Total Size=       80672 bytes File Size =   58961 *
*Baskets :    3      : Basket Size=    32000 bytes Compression=  1.36   *
*.....*
*Br    1 :Vy          : ya/D                                  *
*Entries : 10000     : Total Size=       80679 bytes File Size =   72013 *
*Baskets :    3      : Basket Size=    32000 bytes Compression=  1.11   *
*.....*
*Br    2 :Vx          : yb/D                                  *
*Entries : 10000     : Total Size=       80679 bytes File Size =   74838 *
*Baskets :    3      : Basket Size=    32000 bytes Compression=  1.07   *
*.....*
*Br    3 :Y           : yc/D                                  *
*Entries : 10000     : Total Size=       80675 bytes File Size =   72384 *
*Baskets :    3      : Basket Size=    32000 bytes Compression=  1.11   *
*.....*
*Br    4 :X           : yd/D                                  *
*Entries : 10000     : Total Size=       80675 bytes File Size =   68570 *
*Baskets :    3      : Basket Size=    32000 bytes Compression=  1.17   *
*.....*

```

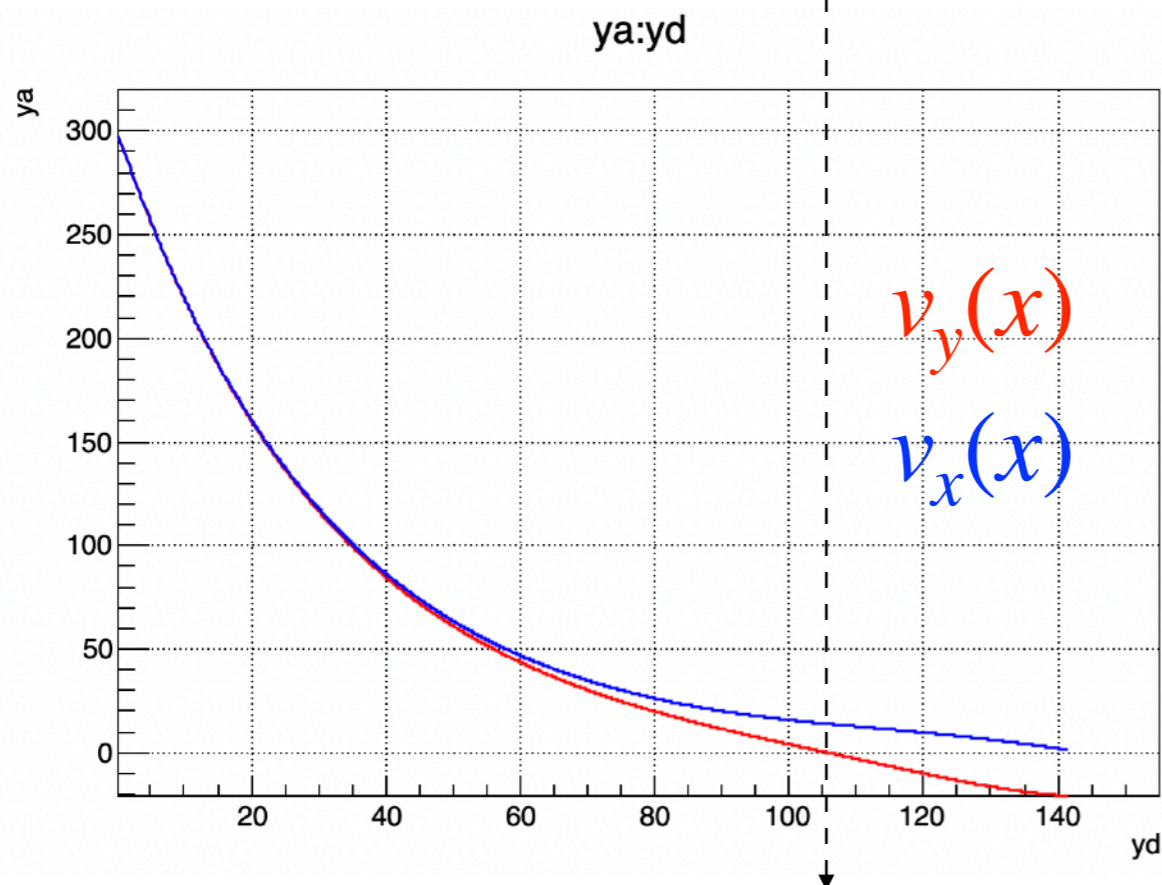
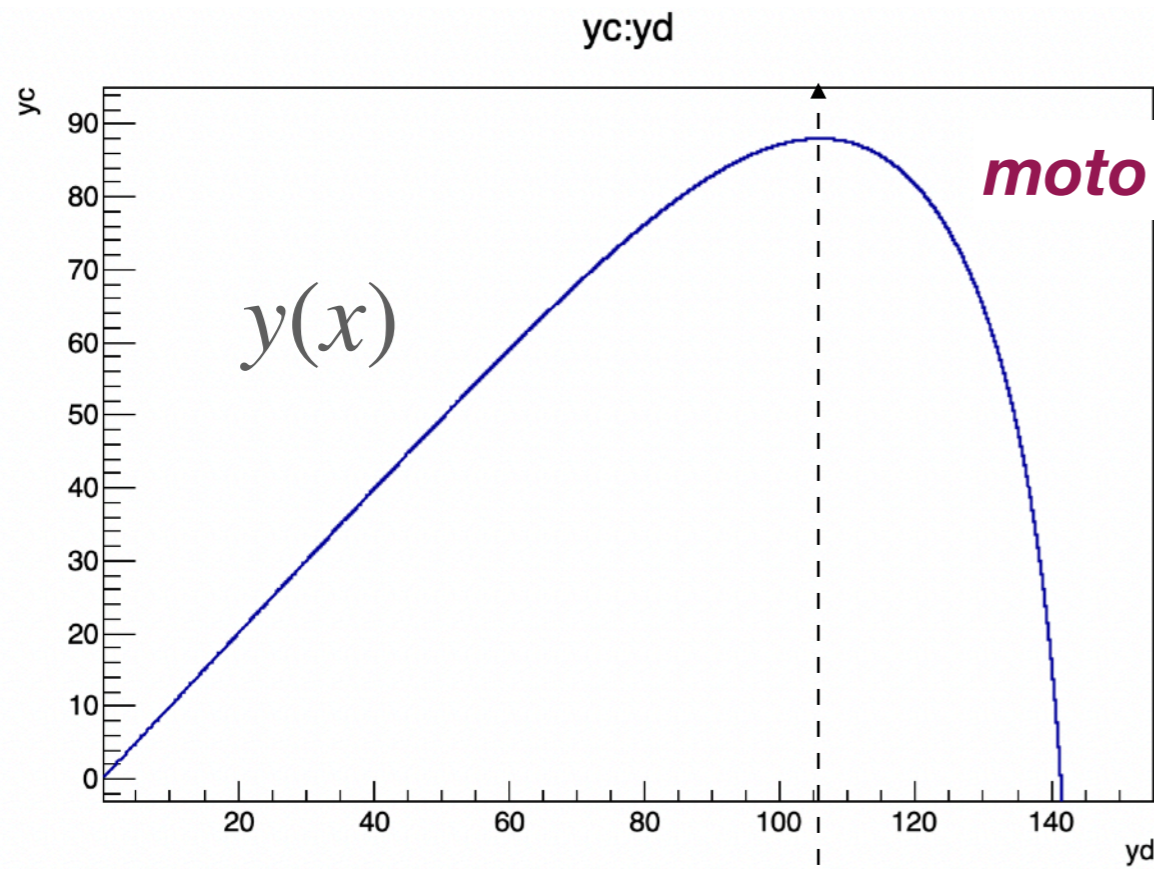
```

root [11] T->Draw("ya:t", "", "L")
(long long) 10000
root [12] T->Draw("yb:t", "", "Lsame")
(long long) 10000
root [15] T->Draw("yd:t", "", "L")
(long long) 10000
root [16] T->Draw("yc:t", "", "LSAME")
(long long) 10000

```

# SISTEMA DI EQ DEL SECONDO ORDINE

## *moto di un proiettile (sferico) soggetto ad attrito*



- La traiettoria:  $y$  vs  $x$

- $V_y$  e  $V_x$  vs  $x$

---

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

---

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- Un'Equazione alle Derivate Parziali (Partial Differential Equation: PDE) è un'equazione che mette in relazione una funzione incognita  $u$  dipendente da due (o più) variabili indipendenti alle sue derivate parziali rispetto a queste variabili
- Per esempio una PDE del secondo ordine puo' avere la forma seguente:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f \left( x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

- dove anche  $a, b, c$  possono essere funzioni di  $x, y, u$  e delle derivate parziali prime di  $u$

- Per semplificare la notazione si usa  $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- Le equazioni alle derivate parziali *del secondo ordine* sono le più diffuse in fisica
- Un'equazione alle derivate parziali si dice *di ordine p* se p è il massimo ordine di derivata che vi compare. Nell'equazione del secondo ordine non compare la derivata  $u_{yx}$  perché, in ipotesi di continuità, applicando il Teorema di Schwarz, le derivate parziali miste sono uguali:

$$u_{xy} = u_{yx}$$

- Spesso le equazioni alle derivate parziali sono rappresentate in forma più compatta utilizzando operatori differenziali come

$$\nabla \quad \textit{Gradiente} \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right)$$

$$\nabla \cdot \quad \textit{Divergenza} \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right)$$



# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- Le PDE si dividono in

- Equazioni **lineari**

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + d(x, y)u_x + e(x, y)u_y + f(x, y)u + g(x, y) = 0$$

- Equazioni **semi-lineari**

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

- Equazioni **quasi-lineari**

$$a(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + 2b(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} + \\ + f(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- Le PDE lineari sono poi ulteriormente classificate:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0,$$

- Se  $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}_2$  e  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$  per ogni  $(x, y) \in \Omega$  si considera la quantità

$$\Delta = b^2 - ac.$$

- Si dice che l'equazione è
  - iperbolica se  $\Delta > 0$
  - ellittica se  $\Delta < 0$
  - parabolica se  $\Delta = 0$
  - (Analogia con la classificazione delle coniche in un piano)
- Dato che  $a, b, e c$  sono a loro volta funzioni di  $(x, y)$  la classificazione non è univoca; un'equazione può essere iperbolica in alcune regioni dello spazio e diventare ellittica o parabolica in altre regioni del dominio di  $u$

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- Dal punto di vista fisico classifichiamo le PDE in base al tipo di fenomeno descritto.
- Due grandi categorie generali sono:
  - **equazioni stazionarie**, in cui tutte le variabili sono spaziali
  - **equazioni di evoluzione**, in cui si ha presentano una derivazione sia rispetto allo spazio che rispetto al tempo.
- Consideriamo alcuni esempi di equazioni alla derivate parziali noti in fisica appartenenti alle due classi appena citate.

L'equazione d'onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

descrive, in funzione della posizione e del tempo,

- lo spostamento, rispetto al punto di equilibrio, di una corda vibrante
- il campo elettrico o magnetico in un'onda elettromagnetica
- l'intensità di corrente oppure il potenziale lungo una linea di trasmissione.

La quantità  $c$  è la velocità di propagazione dell'onda.  
E' una equazione **di evoluzione iperbolica**.

$$\Delta = \frac{1}{c^2} > 0$$

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- L'equazione di Laplace descrive il potenziale elettrostatico in una regione priva di carica elettrica

$$\nabla^2 u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0$$

- L'equazione di Poisson descrive la stessa situazione dell'equazione di Laplace ma in una regione in cui c'è carica elettrica. La funzione  $\rho(x, y)$  rappresenta la densità della carica elettrica

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = -\frac{\rho(x, y)}{\varepsilon}$$

- Entrambe le equazioni sono Stazionarie ed Ellittiche ( $\Delta = -1$ );

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- La principale motivazione che spinge a risolvere numericamente le equazioni alle derivate parziali sta nel fatto che ***non esistono tecniche analitiche generali per ottenere la soluzione***
- I metodi per la risoluzione numerica di equazioni alle derivate parziali sono detti ***metodi alle differenze finite*** e sono basati sull'approssimazione discreta delle derivate parziali che compaiono nell'equazione
- Iniziamo col considerare una funzione ad una variabile
- Consideriamo una funzione  $f(\mathbf{t})$  definita in  $[a,b]$  continua e derivabile  $k$  volte ( $f \in C^k([a, b])$ ) e suddividiamo l'intervallo di variabilità di  $\mathbf{t}$  in sottointervalli di ampiezza  $h$ . Consideriamo tre punti consecutivi appartenenti a tale reticolo, rispettivamente  $t_{i-1}$ ,  $t_i$  e  $t_{i+1}$ . Consideriamo lo sviluppo in serie in avanti ed indietro per determinare il valore della funzione nei punti  $t_{i-1}$  e  $t_{i+1}$  a partire dal punto  $t_i$

$$f(t_{i+1}) = f(t_i) + hf'(t_i) + h^2 \frac{1}{2} f''(t_i) + h^3 \frac{1}{6} f'''(t_i) + h^4 \frac{1}{24} f^{iv}(\xi)$$

$$f(t_{i-1}) = f(t_i) - hf'(t_i) + h^2 \frac{1}{2} f''(t_i) - h^3 \frac{1}{6} f'''(t_i) + h^4 \frac{1}{24} f^{iv}(\eta)$$

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

$$f(t_{i+1}) = f(t_i) + hf'(t_i) + h^2 \frac{1}{2} f''(t_i) + h^3 \frac{1}{6} f'''(t_i) + h^4 \frac{1}{24} f^{iv}(\xi)$$

$$f(t_{i-1}) = f(t_i) - hf'(t_i) + h^2 \frac{1}{2} f''(t_i) - h^3 \frac{1}{6} f'''(t_i) + h^4 \frac{1}{24} f^{iv}(\eta)$$

- **Sommando** membro a membro otteniamo

$$f(t_{i+1}) + f(t_{i-1}) = 2f(t_i) + h^2 f''(t_i) + h^4 \frac{1}{24} (f^{iv}(\xi) + f^{iv}(\eta))$$

- da cui

$$f''(t_i) = \frac{f(t_{i+1}) + f(t_{i-1}) - 2f(t_i)}{h^2} - h^2 \frac{1}{24} (f^{iv}(\xi) + f^{iv}(\eta))$$

- approssimando al primo ordine

$$f''(t_i) \cong \frac{f(t_{i+1}) + f(t_{i-1}) - 2f(t_i)}{h^2}$$

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- L'approssimazione appena trovata coincide con il valore della derivata seconda della parabola passante per i punti  $(t_{i-1}, f(t_{i-1}))$ ,  $(t_i, f(t_i))$  e  $(t_{i+1}, f(t_{i+1}))$
- Infatti scrivendo l'equazione di tale parabola come:

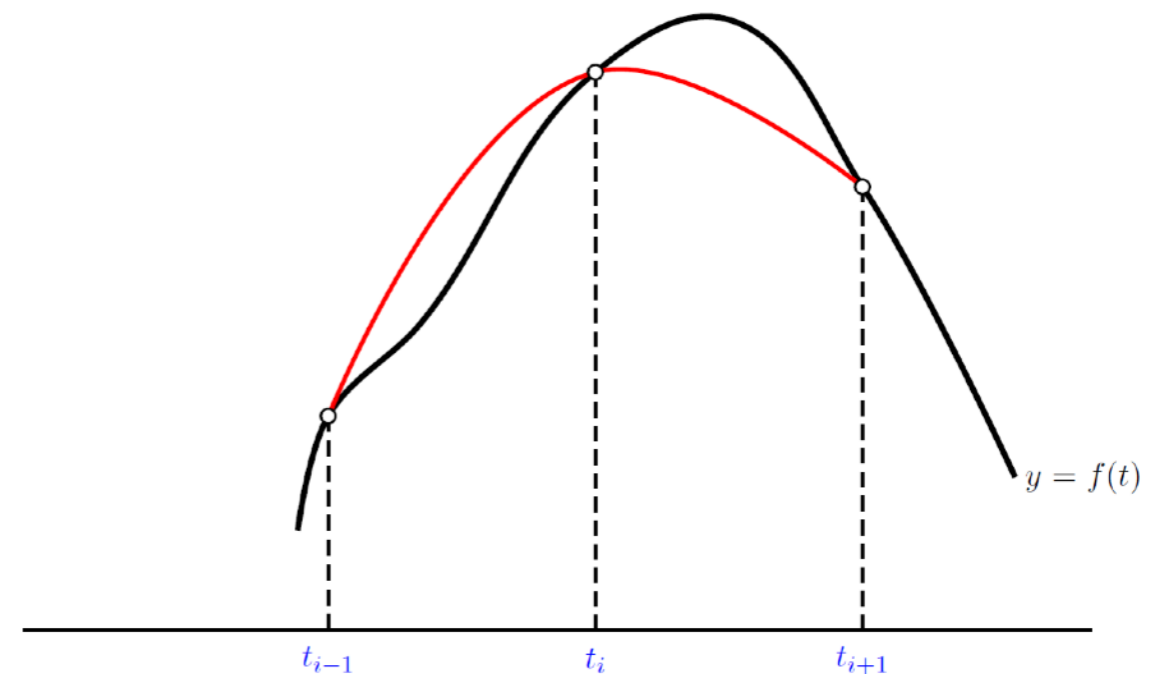
$$p(t) = a(t - t_i)(t - t_{i-1}) + b(t - t_{i-1}) + c$$

- I coefficienti della parabola assumono il valore:

$$c = f(t_{i-1})$$

$$b = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{h}$$

$$a = \frac{f(t_{i+1}) - 2f(t_i) + f(t_{i-1}))}{2h^2}$$



# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- Approssimare ora la **derivata prima**, procedendo allo stesso modo, cioè scrivendo le serie di Taylor per  $f(t_{i+1})$  e  $f(t_{i-1})$

$$f(t_{i+1}) = f(t_i) + hf'(t_i) + h^2 \frac{1}{2} f''(t_i) + h^3 \frac{1}{6} f'''(\lambda)$$

$$f(t_{i-1}) = f(t_i) - hf'(t_i) + h^2 \frac{1}{2} f''(t_i) - h^3 \frac{1}{6} f'''(\nu)$$

- **Sottraendo** membro a membro ottengo:

$$f(t_{i+1}) - f(t_{i-1}) = 2hf'(t_i) + h^3 \frac{1}{6} (f'''(\lambda) + f'''(\nu))$$

- da cui

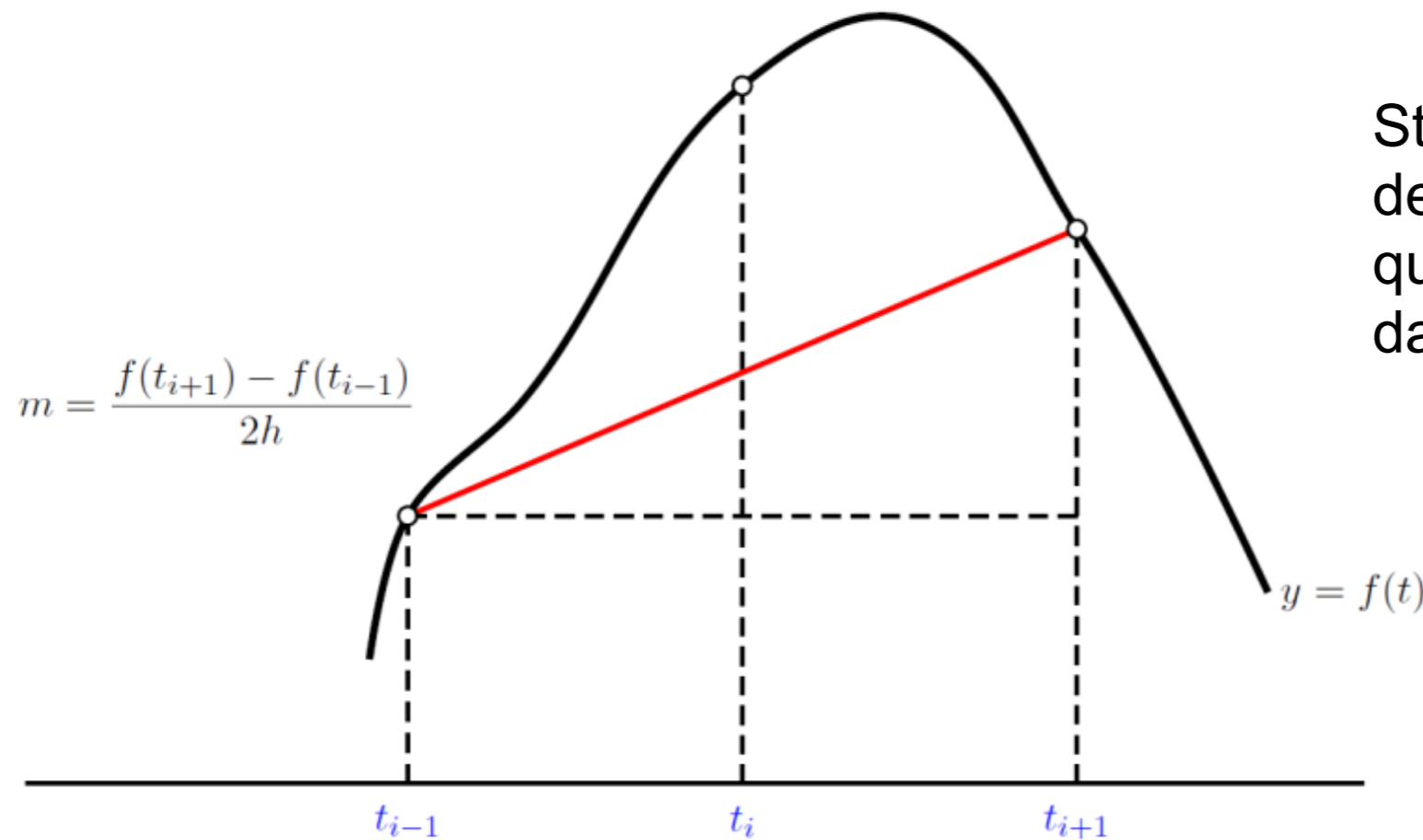
$$f'(t_i) = \frac{f(t_{i+1}) - f(t_{i-1})}{2h} - h^2 \frac{1}{12} (f'''(\lambda) + f'''(\nu))$$

- Approssimando

$$f'(t_i) \cong \frac{f(t_{i+1}) - f(t_{i-1})}{2h}$$



# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI



Stiamo approssimando la derivata della funzione con quella della retta passante dai due punti.

- Quello appena ottenuto non è però l'unico modo con cui si può approssimare la derivata prima della funzione
  - Altri due modi possibili sono utilizzando l'approssimazione in avanti o l'approssimazione all'indietro.

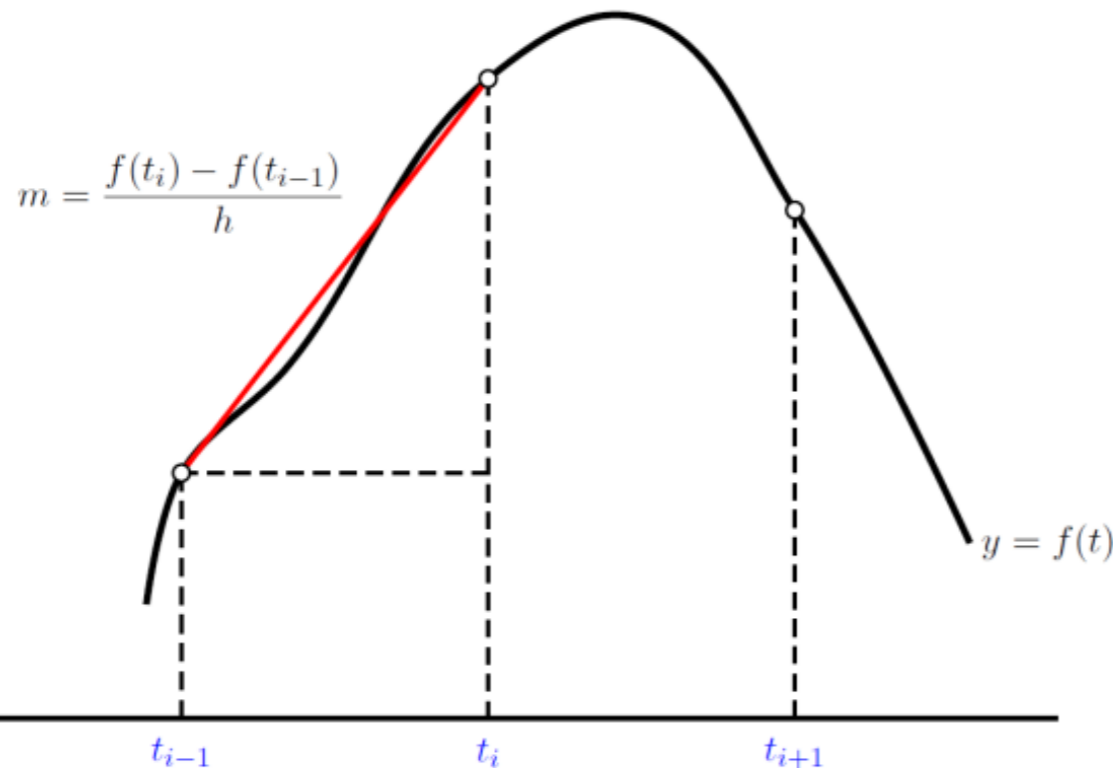
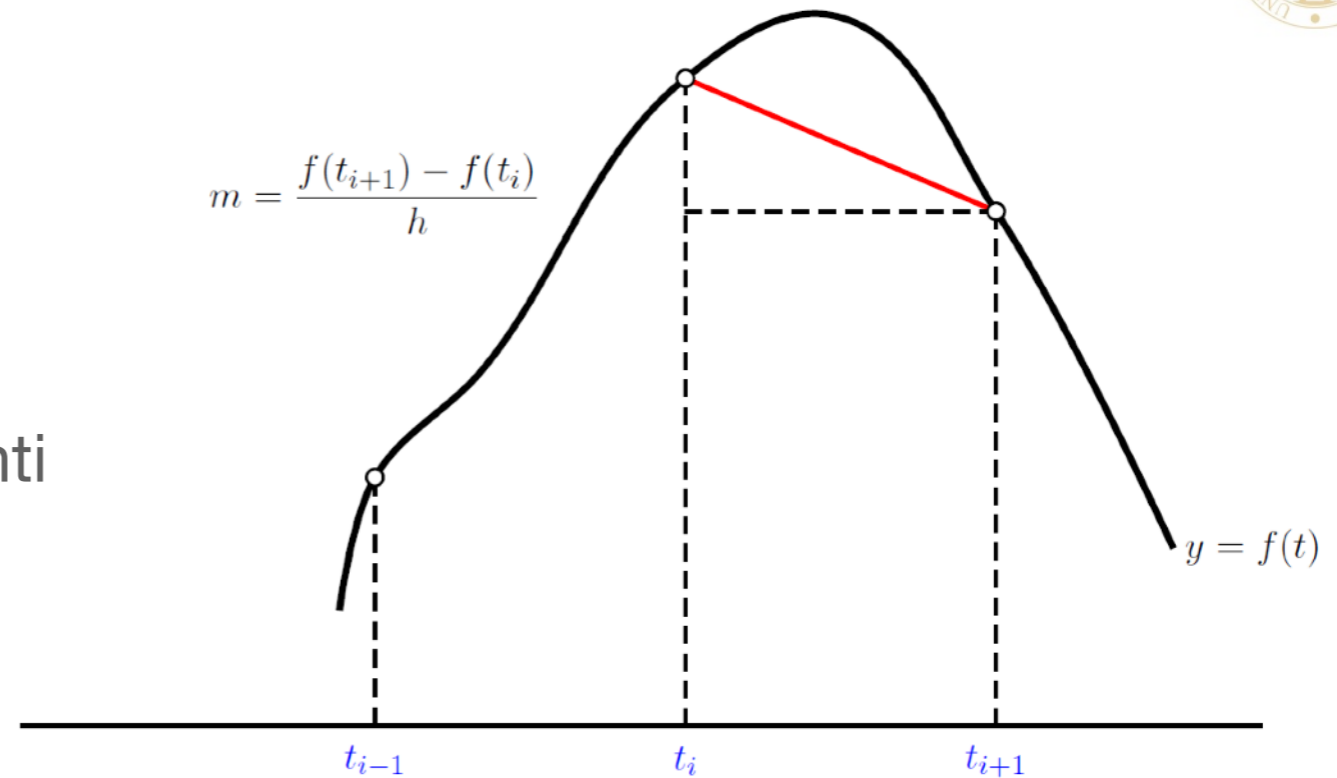
# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- Approssimazione in avanti:

$$f(t_{i+1}) = f(t_i) + hf'(t_i) + h^2 \frac{1}{2} f''(\sigma)$$

- Da cui formula alle differenze in avanti

$$f'(t_i) \cong \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{h}$$



- Approssimazione all'indietro:

$$f(t_{i-1}) = f(t_i) - hf'(t_i) + h^2 \frac{1}{2} f''(\sigma)$$

- Da cui formula alle differenze all'indietro

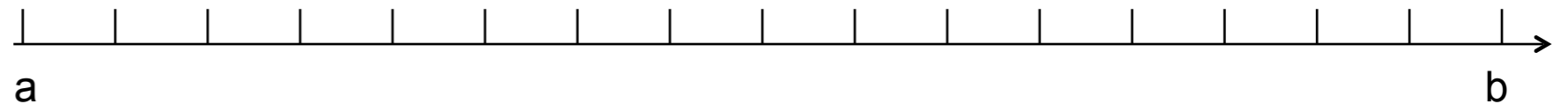
$$f'(t_i) \cong \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{h}$$

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- La soluzione numerica di PDE passa attraverso le approssimazioni che abbiamo ricavato. L'equazione differenziale viene approssimata con una equazione alle differenze finite in cui le varie derivate vengono sostituite con le loro approssimazioni. La soluzione dell'equazione viene quindi determinata su una griglia di punti.

Come esempio consideriamo nuovamente il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & a \leq t \leq b \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$



- Divido l'intervallo in N step di passo h. Per ogni punto della griglia posso calcolare l'equazione alle differenze finite usando una delle approssimazioni precedenti.
- Consideriamo per esempio la formula delle differenze in avanti.

$$f(t_i, y_i) = y'(t_i) \cong \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h}$$

$$y(t_{i+1}) \cong y(t_i) + hf(t_i, y_i)$$

**Metodo di Eulero!**

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- Consideriamo ora la più semplice delle equazioni ellittiche: l'equazione di Laplace.
- Esattamente come nel caso unidimensionale il problema ammette soluzione unica se all'equazioni si associano delle condizioni iniziali. In questo caso supponiamo di dover risolvere un problema alla Dirichlet.

Formulazione matematica: si parla di **problema alla Dirichlet** quando si cerca una  $u(x,y)$  soluzione dell'**equazione di Laplace** in una regione  $\Omega$  semplicemente connessa delimitata dalla frontiera  $T$  tale che  $u(x,y)$  sia continua in  $\Omega \cup T$  ed è nota una funzione  $f(x,y)$  di classe  $C^2(T)$  tale che  $u(x,y) = f(x,y)$  per ogni  $(x,y) \in T$  (**condizione al contorno**)

- Problema alla Dirichlet

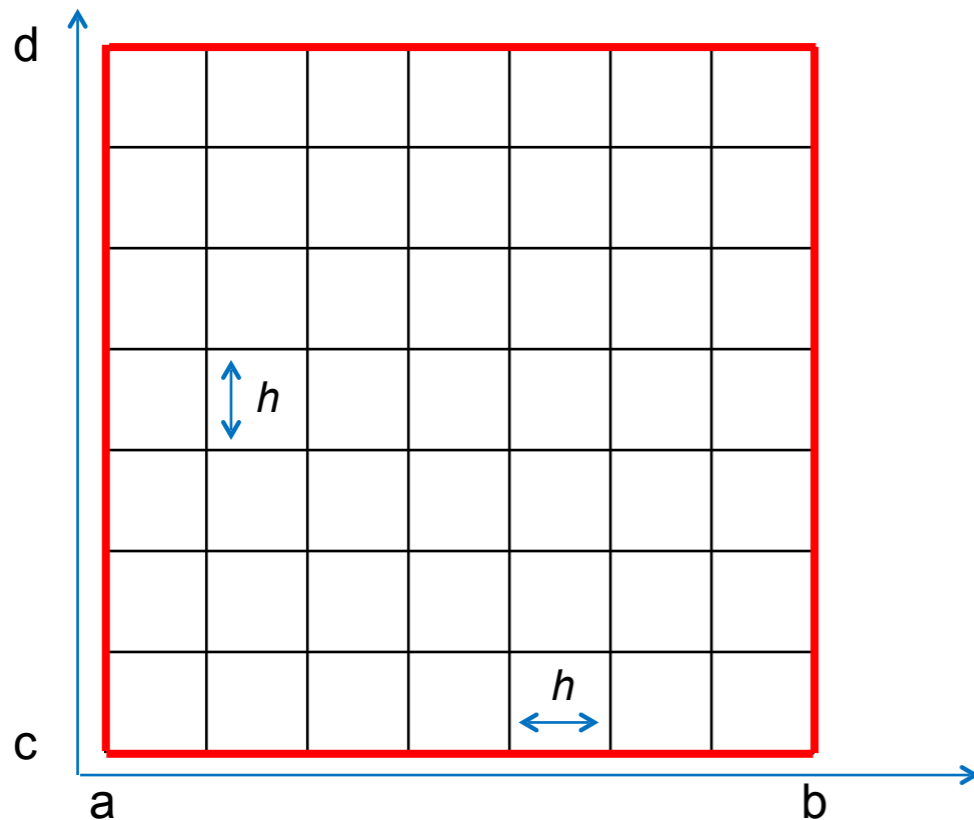
$$\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$u(x,y) \in C(\Omega \cup T)$$

$$u(x,y) = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in T \quad \leftarrow \text{Condizioni al contorno}$$

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- Supponiamo di dover risolvere l'equazione di Laplace in una regione rettangolare e che la soluzione sia nota sul bordo (linee rosse)



$$h = \frac{b - a}{N}$$

$$h = \frac{d - c}{M}$$

- Il metodo consiste nell'approssimare l'operatore differenziale dopo avere discretizzato l'insieme di definizione. Si suddivide l'intervallo  $[a, b]$  in  $N$  parti uguali, ognuna di ampiezza  $h$ , e l'intervallo  $[c, d]$  in  $M$  parti uguali, per semplicità di nuovo di ampiezza  $h$

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

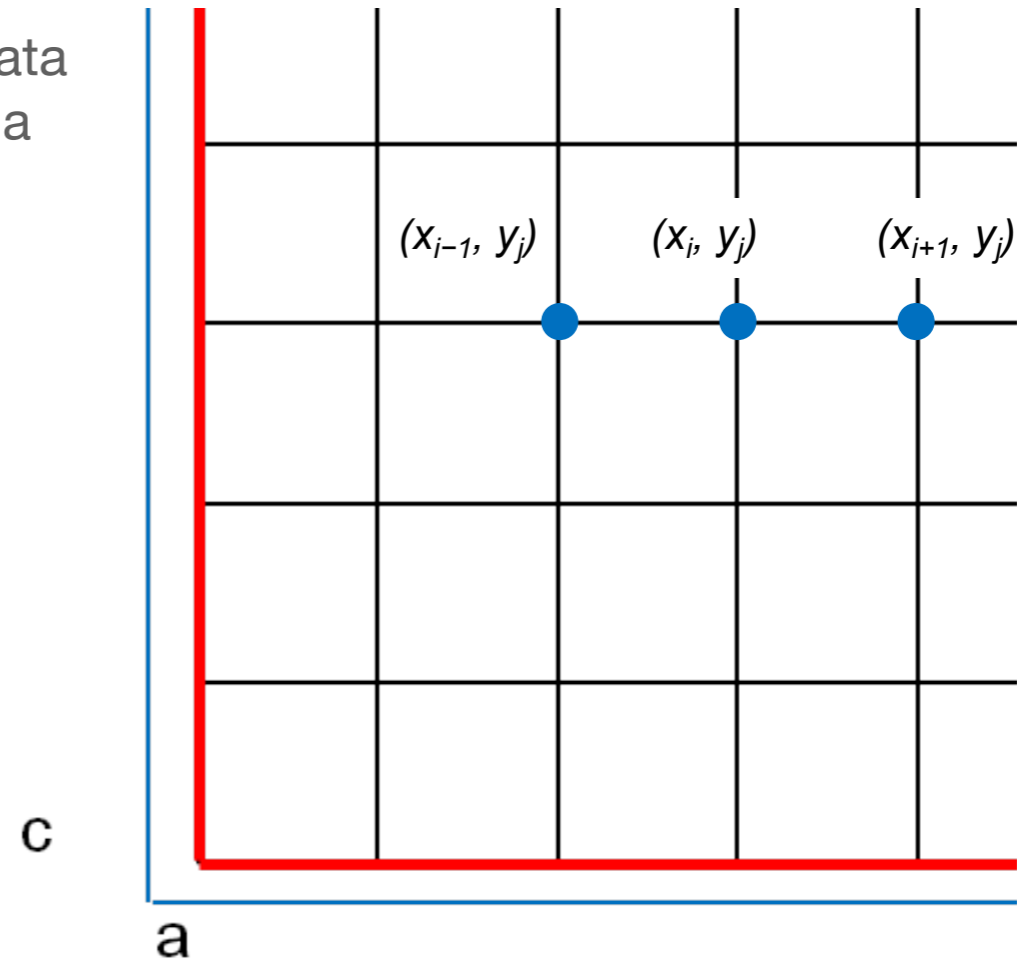
- Per approssimare la derivata parziale seconda  $u_{xx}(x_i, y_j)$ , consideriamo i seguenti 3 punti del reticolo  $(x_{i-1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_j)$  e  $(x_{i+1}, y_j)$  e, applicando l'approssimazione trovata (approssimando come costante il valore della seconda variabile), risulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}.$$

- Sostituendo le due approssimazioni nell'equazione di Laplace ottengo:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0$$



# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- Per approssimare la derivata parziale seconda  $u_{xx}(x_i, y_j)$ , consideriamo i seguenti 3 punti del reticolo  $(x_{i-1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_j)$  e  $(x_{i+1}, y_j)$  e, applicando l'approssimazione trovata (approssimando come costante il valore della seconda variabile), risulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

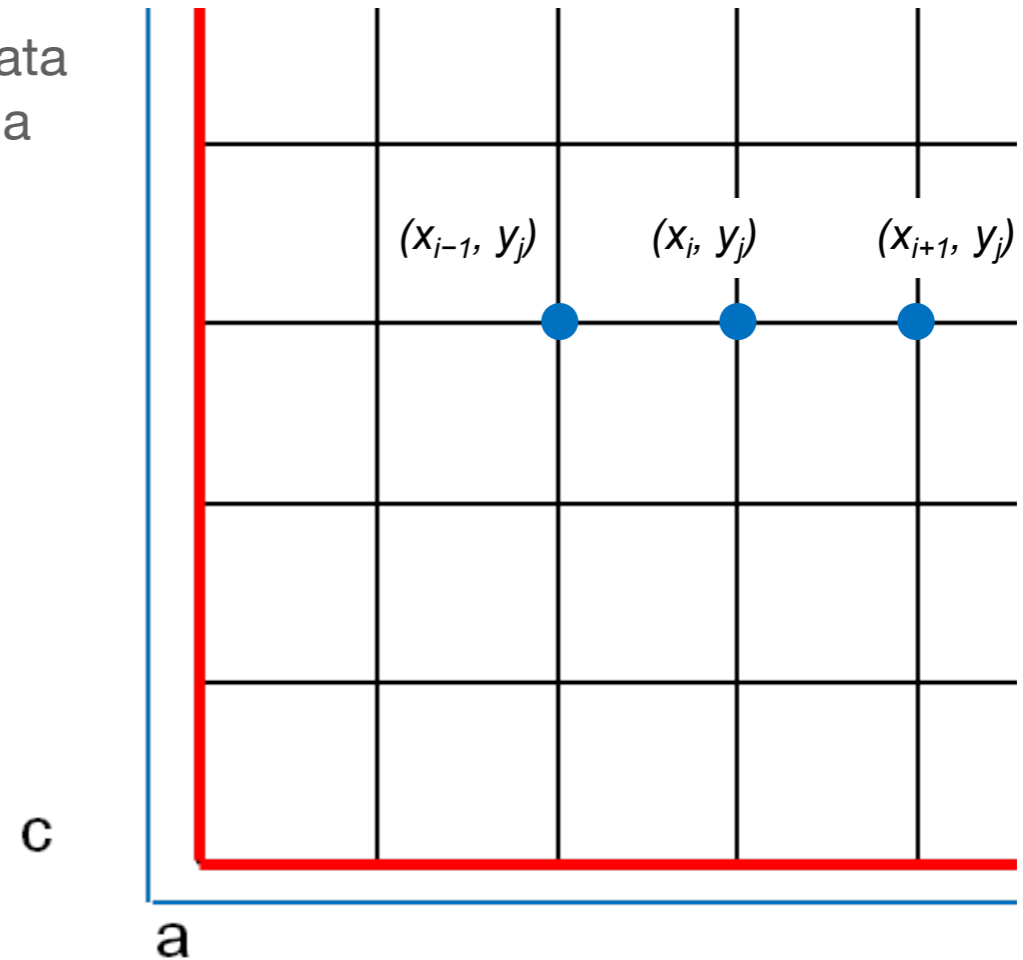
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}.$$

- Sostituendo le due approssimazioni nell'equazione di Laplace ottengo:

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0$$

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = 0$$

Posso scrivere un'equazione lineare per ogni punto del reticolo.  
Il numero di incognite coincide con il numero di punti del reticolo !



# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- Per approssimare la derivata parziale seconda  $u_{xx}(x_i, y_j)$ , consideriamo i seguenti 3 punti del reticolo  $(x_{i-1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_j)$  e  $(x_{i+1}, y_j)$  e, applicando l'approssimazione trovata (approssimando come costante il valore della seconda variabile), risulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \simeq \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

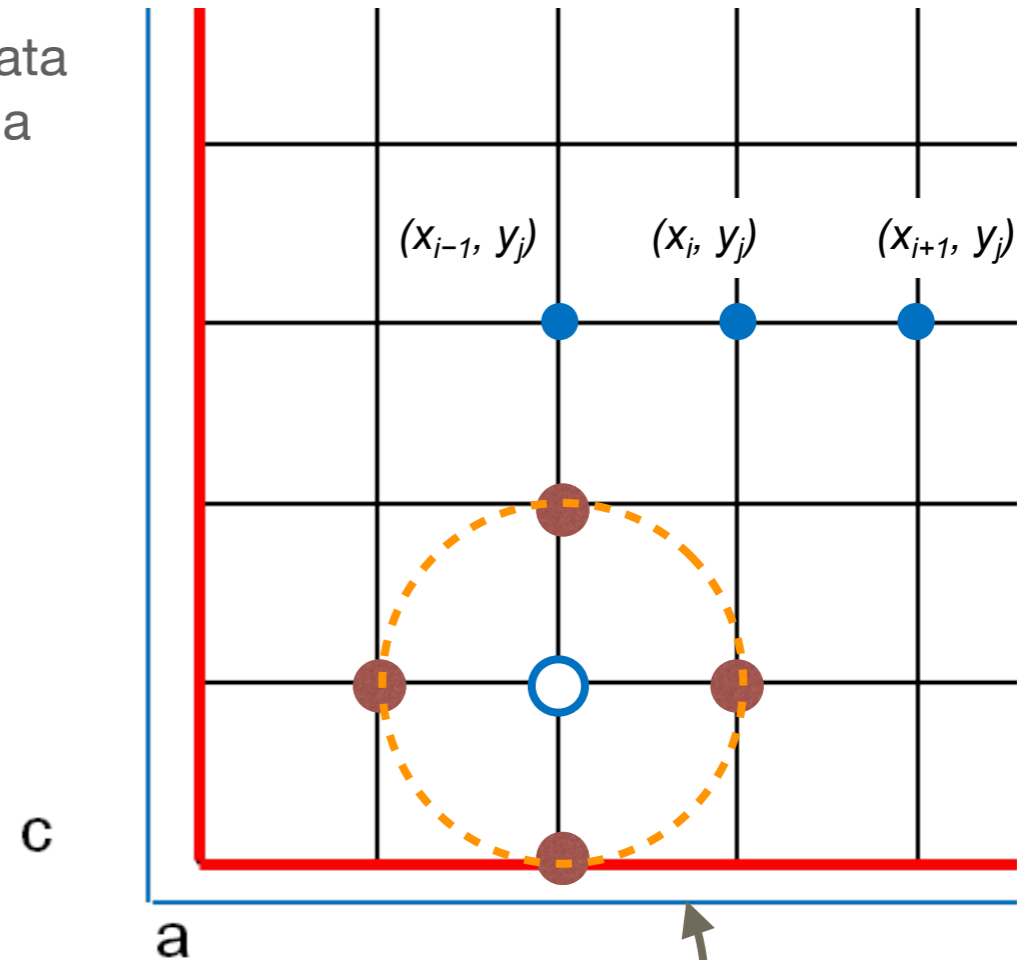
- Sostituendo le due approssimazioni nell'equazione di Laplace ottengo:

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1} = 0$$

Proprietà fondamentale delle funzioni armoniche, soluzioni dell'eq di Laplace

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1})$$

**NOTA:**  $u_{ij}$  è stimata come la media dei valori su 4 punti equidistanti, 4 punti su una sfera centrata nel punto  $ij$

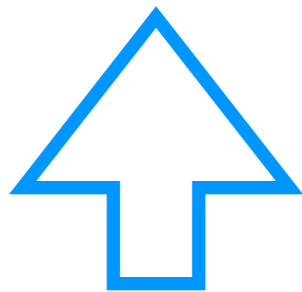




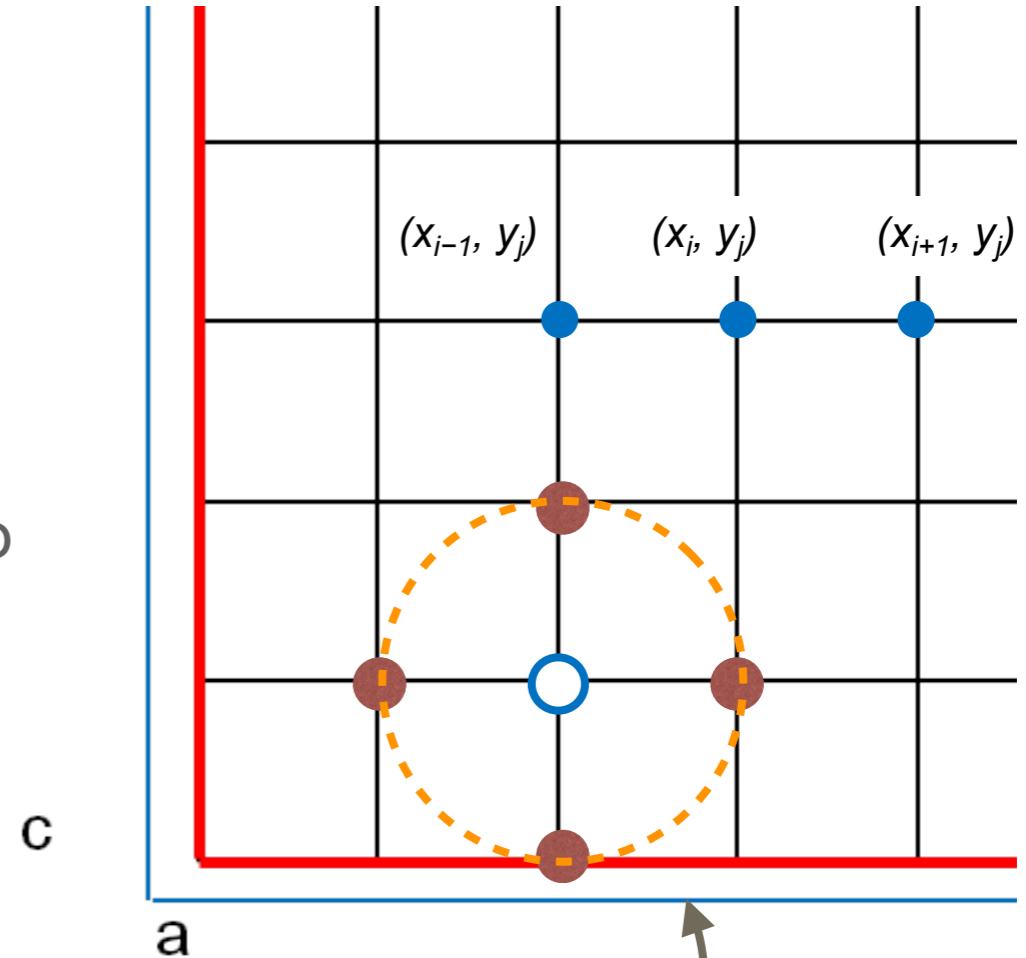
# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r_0^2} \int_{S_0} u(\vec{r}') ds'$$

Il valore del potenziale elettrostatico in un certo punto  $\vec{r}$  è uguale alla media su una sfera di raggio arbitrario con centro attorno a  $\vec{r}$



Proprietà fondamentale delle funzioni armoniche, soluzioni dell'eq di Laplace



$$u_{i,j} = \frac{1}{4} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1})$$

**NOTA:**  $u_{ij}$  è stimata come la media dei valori su 4 punti equidistanti, 4 punti su una sfera centrata nel punto  $ij$

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

## Torniamo al caso generale

- Sfruttando le approssimazioni alle differenze finite di derivate seconde e prime, una PDE lineare:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0,$$

- dove  $a, b, c$  (così come  $d, e, f, g$ ) sono funzioni note di  $(x, y)$
- può essere approssimata in ogni punto della griglia di  $N \times M$  punti nel sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  in cui si cerca la soluzione numerica con la sua forma *alle differenze finite*
- In pratica, in ciascuno degli  $N \times M$  punti l'eq. assume una forma specifica in cui intervengono il valore incognito della  $u_{ij}$  nel punto di indici  $(i, j)$  e i valori incogniti della  $u$  negli altri punti del reticolo.
  - Scrivendo le approssimazioni alle differenze finite della equazione in ciascun punto della griglia, si ottengono
    - $N \times M$  equazioni in  $N \times M$  incognite corrispondenti ai valori della funzione  $u_{ij}$  in ciascuno dei punti

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

## Torniamo al caso generale

- Sfruttando le approssimazioni alle differenze finite di derivate seconde e prime, una PDE lineare:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0,$$

- Abbiamo **NxM equazioni** in
  - **NxM incognite**  $\rightarrow u_{ij}$
  - Chiamiamo le incognite  $u_{ij} \rightarrow x_i$ 
    - **$i=1, \dots, n=NxM$**
  - La  $i$ -esima equazione avrà la forma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Torniamo al caso generale

n=NxM equazioni

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 + a_{15} x_5 + a_{16} x_6 + \dots + a_{1,n-1} x_{n-1} + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 + a_{25} x_5 + a_{26} x_6 + \dots + a_{2,n-1} x_{n-1} + a_{2n} x_n = b_1$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 + a_{35} x_5 + a_{36} x_6 + \dots + a_{3,n-1} x_{n-1} + a_{3n} x_n = b_1$$

...

...

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + a_{n4} x_4 + a_{n5} x_5 + a_{n6} x_6 + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1} + a_{nn} x_n = b_1$$

n=NxM incognite

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- Devo risolvere un sistema lineare di  **$N \times M$  equazioni con  $N \times M$  incognite**
- Esistono varie tecniche che tengono conto del fatto che la matrice del sistema è una matrice sparsa.
- In generale, però, i sistemi lineari che derivano dalla discretizzazione di equazioni alle derivate parziali hanno grandi dimensioni. E' quindi conveniente utilizzare tecniche iterative approssimate

- Supponiamo di dover risolvere il sistema la cui  $i$ -esima equazione si scrive:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

- La soluzione (*implicita*) è

$$x_i = \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j \right) \frac{1}{a_{ii}} \quad i = 1, \dots, n.$$

*L'incognita  $x_i$  e' espressa in funzione delle altre incognite*

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

per esempio, con la terza equazione risolviamo per  $x_3$

n=NxM equazioni

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4 + a_{15} x_5 + a_{16} x_6 + \dots + a_{1,n-1} x_{n-1} + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + a_{24} x_4 + a_{25} x_5 + a_{26} x_6 + \dots + a_{2,n-1} x_{n-1} + a_{2n} x_n = b_2$$

$$a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 + a_{35} x_5 + a_{36} x_6 + \dots + a_{3,n-1} x_{n-1} + a_{3n} x_n = b_3$$

...

...

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + a_{n4} x_4 + a_{n5} x_5 + a_{n6} x_6 + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1} + a_{nn} x_n = b_n$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}} \left( b_3 - a_{31} x_1 - a_{32} x_2 - a_{34} x_4 - a_{35} x_5 - a_{36} x_6 - \dots + a_{3,n-1} x_{n-1} - a_{3n} x_n \right)$$

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- *Adottiamo una procedura iterativa* che consiste nello stimare le  $N+M$  incognite a partire da un'approssimazione iniziale  $x_j^{(0)}$

$$x_i^{(k+1)} = \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \frac{1}{a_{ii}} \quad i = 1, \dots, n;$$

- La generica componente  $i$ -esima del vettore al passo  $k + 1$  è calcolata per mezzo di tutte le componenti del vettore al passo  $k$  eccetto la  $i$ -esima. Questo procedimento iterativo prende il nome di **metodo di Jacobi**.

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Per determinare la soluzione *all'iterazione k+1*, uso la stima di tutte le incognite all'iterazione k

n=NxM equazioni

$$a_{11} x_1^{k+1} + a_{12} x_2^k + a_{13} x_3^k + a_{14} x_4^k + a_{15} x_5^k + a_{16} x_6^k + \dots + a_{1,n-1} x_{n-1}^k + a_{1n} x_n^k = b_1$$

$$a_{21} x_1^k + a_{22} x_2^{k+1} + a_{23} x_3^k + a_{24} x_4^k + a_{25} x_5^k + a_{26} x_6^k + \dots + a_{2,n-1} x_{n-1}^k + a_{2n} x_n^k = b_1$$

$$a_{31} x_1^k + a_{32} x_2^k + a_{33} x_3^{k+1} + a_{34} x_4^k + a_{35} x_5^k + a_{36} x_6^k + \dots + a_{3,n-1} x_{n-1}^k + a_{3n} x_n^k = b_1$$

...

...

$$a_{n1} x_1^k + a_{n2} x_2^k + a_{n3} x_3^k + a_{n4} x_4^k + a_{n5} x_5^k + a_{n6} x_6^k + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1}^k + a_{nn} x_n^{k+1} = b_1$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad i = 1, \dots, n$$

**Metodo di Jakobi**



# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- **Adottiamo una procedura iterativa** che consiste nello stimare le  $N+M$  incognite a partire da un'approssimazione iniziale  $x_j^{(0)}$

$$x_i^{(k+1)} = \left( b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \frac{1}{a_{ii}} \quad i = 1, \dots, n;$$

- La generica componente  $i$ -esima del vettore al passo  $k + 1$  è calcolata per mezzo di tutte le componenti del vettore al passo  $k$  eccetto la  $i$ -esima. Questo procedimento iterativo prende il nome di **metodo di Jacobi**.
- Una variante del metodo di Jacobi si ottiene osservando che, quando si calcola  $x_i^{(k+1)}$  si possono utilizzare le approssimazioni  $x_j^{(k+1)}$ , con  $j = 1, \dots, i - 1$ , ottenendo

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right).$$

- **Metodo di Gauss-Seidel**

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Per determinare l'incognita  $x_i$  **all'iterazione  $k+1$** , uso la stima migliore disponibile per ogni altra incognite:  $k+1$  per le incognite già stimate a questa iterazione (da 1 a  $i-1$ ),  $k$  per le rimanenti

$$\begin{aligned}
 a_{11} x_1^{k+1} + a_{12} x_2^k + a_{13} x_3^k + a_{14} x_4^k + a_{15} x_5^k + a_{16} x_6^k + \dots + a_{1,n-1} x_{n-1}^k + a_{1n} x_n^k &= b_1 \\
 a_{21} x_1^{k+1} + a_{22} x_2^{k+1} + a_{23} x_3^k + a_{24} x_4^k + a_{25} x_5^k + a_{26} x_6^k + \dots + a_{2,n-1} x_{n-1}^k + a_{2n} x_n^k &= b_1 \\
 a_{31} x_1^{k+1} + a_{32} x_2^{k+1} + a_{33} x_3^{k+1} + a_{34} x_4^k + a_{35} x_5^k + a_{36} x_6^k + \dots + a_{3,n-1} x_{n-1}^k + a_{3n} x_n^k &= b_1 \\
 \dots & \\
 \dots &
 \end{aligned}$$

$$a_{n1} x_1^{k+1} + a_{n2} x_2^{k+1} + a_{n3} x_3^{k+1} + a_{n4} x_4^{k+1} + a_{n5} x_5^{k+1} + a_{n6} x_6^{k+1} + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1}^{k+1} + a_{nn} x_n^{k+1} = b_1$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad i = 1, \dots, n$$

**Metodo di Gauss-Seidel**

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

- entrambi i metodi appena introdotti non utilizzano la componente  $i$ -esima al passo  $k$ . Per questo si introduce una nuova variante che coinvolge tale valore a partire da un parametro  $\omega \neq 0$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right] + (1 - \omega) x_i^{(k)}.$$

- Questa classe di metodi prende il nome di **Metodi di Rilassamento**;
  - se si pone  $\omega=1$  il metodo di Rilassamento coincide con il metodo di Gauss-Seidel.

- Per terminare il processo iterativo si monitora la grandezza:

$$\Delta^{k+i,k} = \max_{i,j} (\delta_{i,j}^{k+i,k}) = \max_{i,j} \frac{|u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k|}{|u_{i,j}^{k+1}|}$$

- Che rappresenta la variazione massima della soluzione da un passo al successivo. Il processo si arresta quando tale variazione è inferiore ad una precisione fissata a priori.

# EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Per determinare l'incognita  $x_i$  **all'iterazione  $k+1$** , uso la stima migliore disponibile per ogni altra incognite:  $k+1$  per le incognite già stimate a questa iterazione (da 1 a  $i-1$ ),  $k$  per le rimanenti

$$\begin{aligned}
 a_{11} x_1^{k+1} + a_{12} x_2^k + a_{13} x_3^k + a_{14} x_4^k + a_{15} x_5^k + a_{16} x_6^k + \dots + a_{1,n-1} x_{n-1}^k + a_{1n} x_n^k &= b_1 \\
 a_{21} x_1^{k+1} + a_{22} x_2^{k+1} + a_{23} x_3^k + a_{24} x_4^k + a_{25} x_5^k + a_{26} x_6^k + \dots + a_{2,n-1} x_{n-1}^k + a_{2n} x_n^k &= b_1 \\
 a_{31} x_1^{k+1} + a_{32} x_2^{k+1} + a_{33} x_3^{k+1} + a_{34} x_4^k + a_{35} x_5^k + a_{36} x_6^k + \dots + a_{3,n-1} x_{n-1}^k + a_{3n} x_n^k &= b_1 \\
 \dots & \\
 \dots &
 \end{aligned}$$

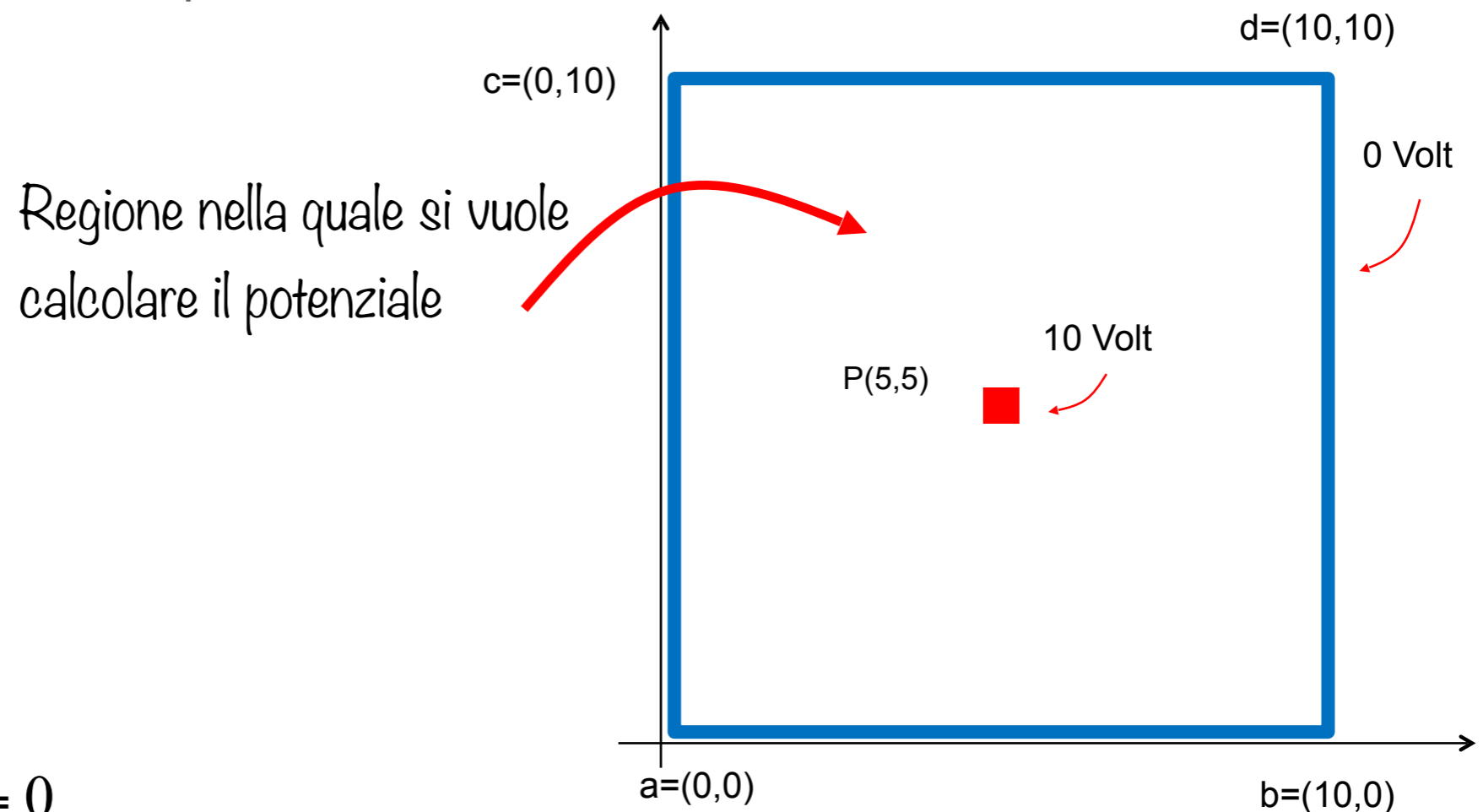
$$a_{n1} x_1^{k+1} + a_{n2} x_2^{k+1} + a_{n3} x_3^{k+1} + a_{n4} x_4^{k+1} + a_{n5} x_5^{k+1} + a_{n6} x_6^{k+1} + \dots + a_{n,n-1} x_{n-1}^{k+1} + a_{nn} x_n^{k+1} = b_1$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1 - \omega)x_i^{(k)} \quad i = 1, \dots, n$$

**Metodo di Rilassamento**

# ESEMPI

- Supponiamo di voler calcolare il potenziale in una regione dello spazio quadrata delimitata da due conduttori posti a potenziale noto. Il conduttore a potenziale più alto (10 Volt) è al centro della regione ed è di dimensioni trascurabili.
- La struttura esterna è posta a potenziale nullo.









Problema alla Dirichlet

$$\nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$u(0, y) = u(y, 0) = u(10, y) = u(x, 10) = 0 \quad u(5, 5) = 10$$

# IMPLEMENTAZIONE

- [http://www.dmf.unisalento.it/~spagnolo/MSC\\_aa21\\_22/EquazioniDifferenziali/esempi/PDE/](http://www.dmf.unisalento.it/~spagnolo/MSC_aa21_22/EquazioniDifferenziali/esempi/PDE/)

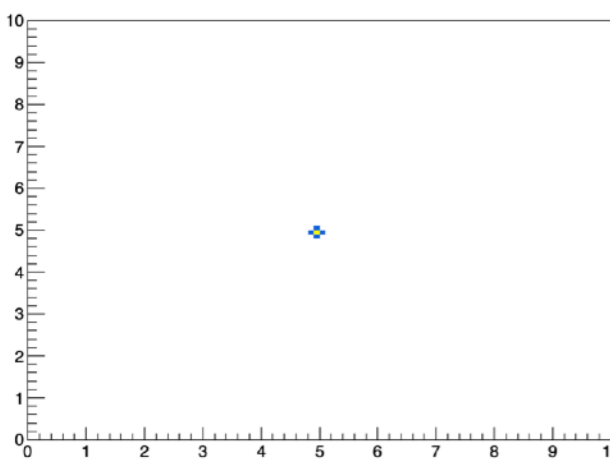
 Icon	<u>Name</u>
	[DIR] <a href="#">Parent Directory</a>
	[TXT] <a href="#">EqDiff_1.C</a>
	[TXT] <a href="#">EqDiff_2.C</a>
	[TXT] <a href="#">EqDiff_3.C</a>
	[TXT] <a href="#">EqDiff_4.C</a>

*Apache/2.2.3 (Scientific Linux) Server at www.dmf.unisc*

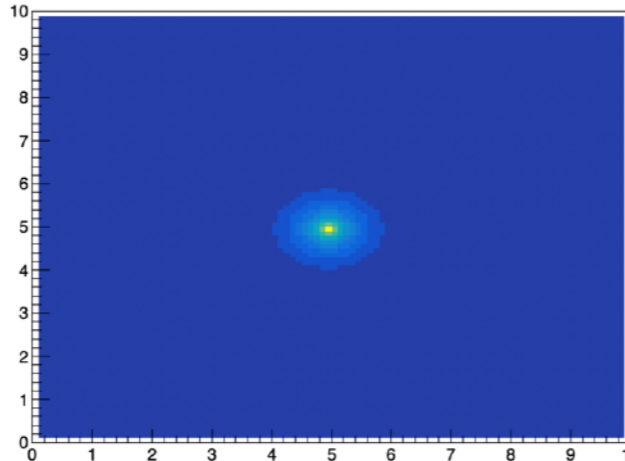
# EQ DI LAPLACE - ESEMPIO

- Metodo di Jacobi

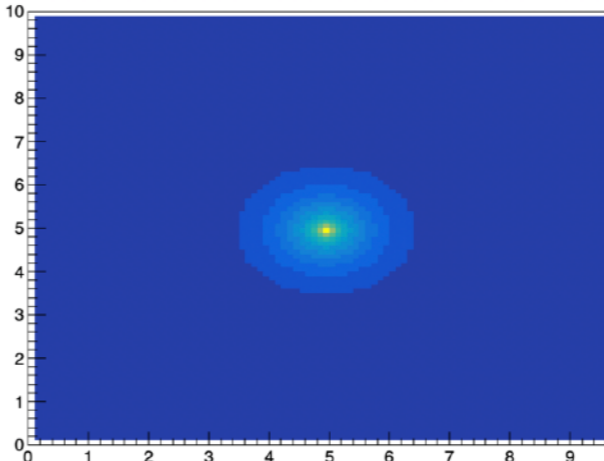
k=1



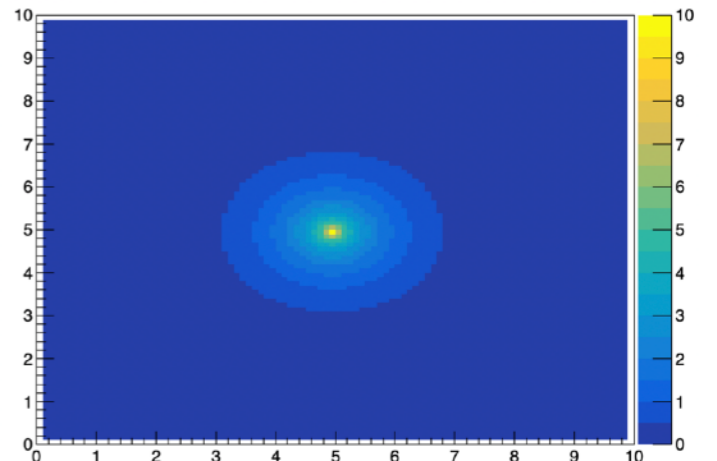
k=200



k=600

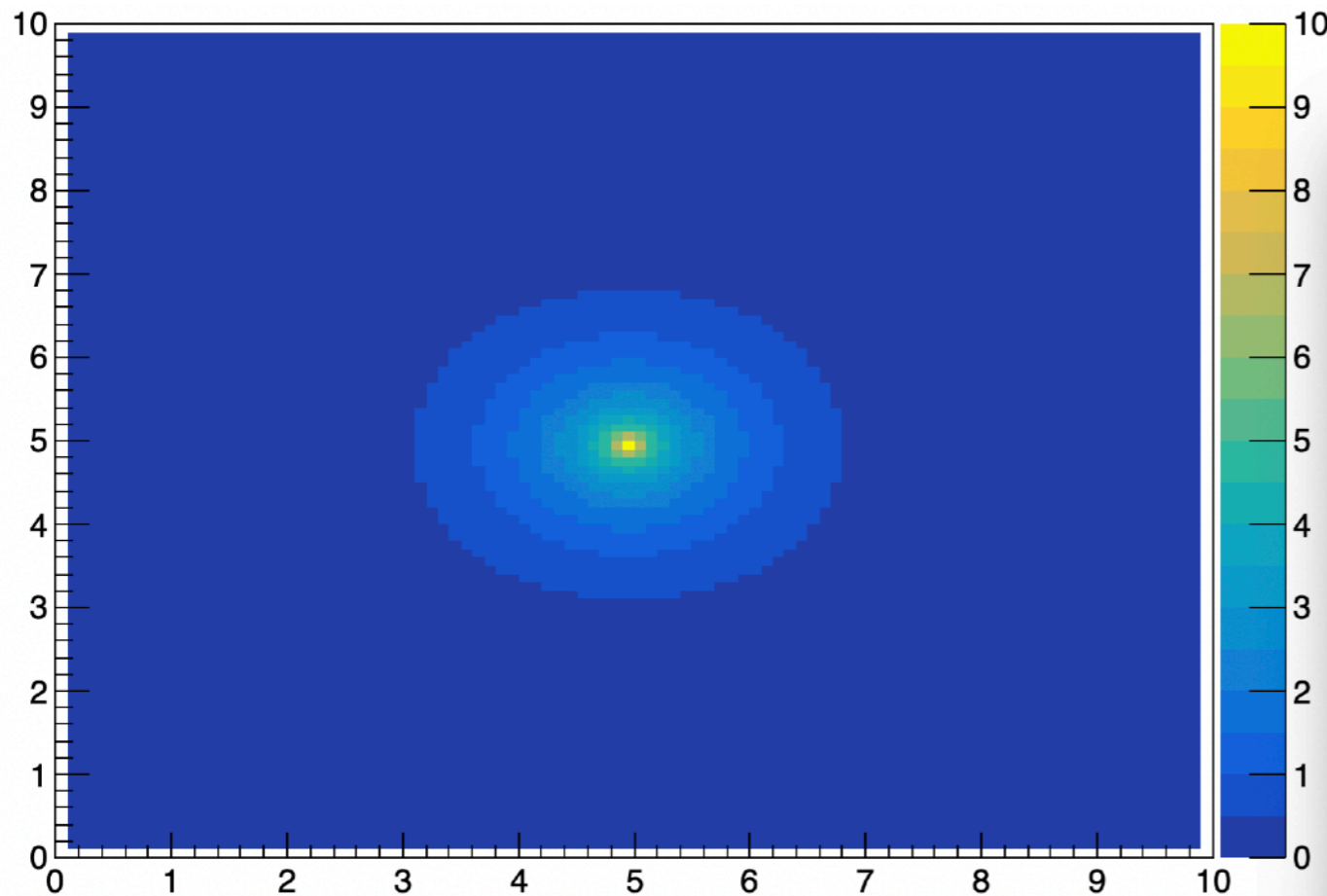


k=1000

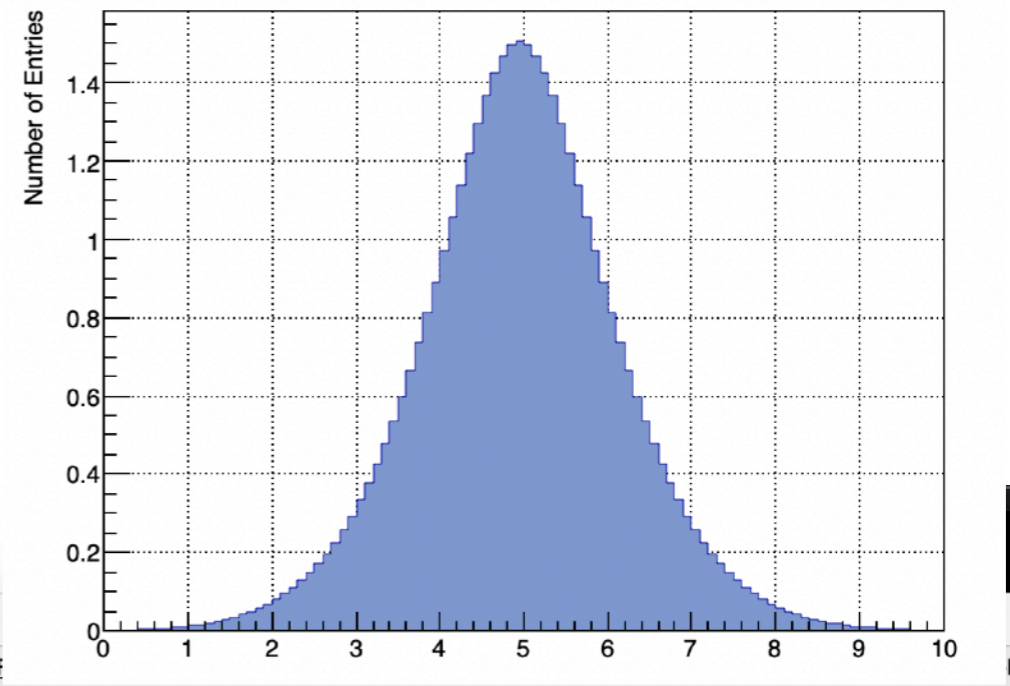


# EQ DI LAPLACE - ESEMPIO

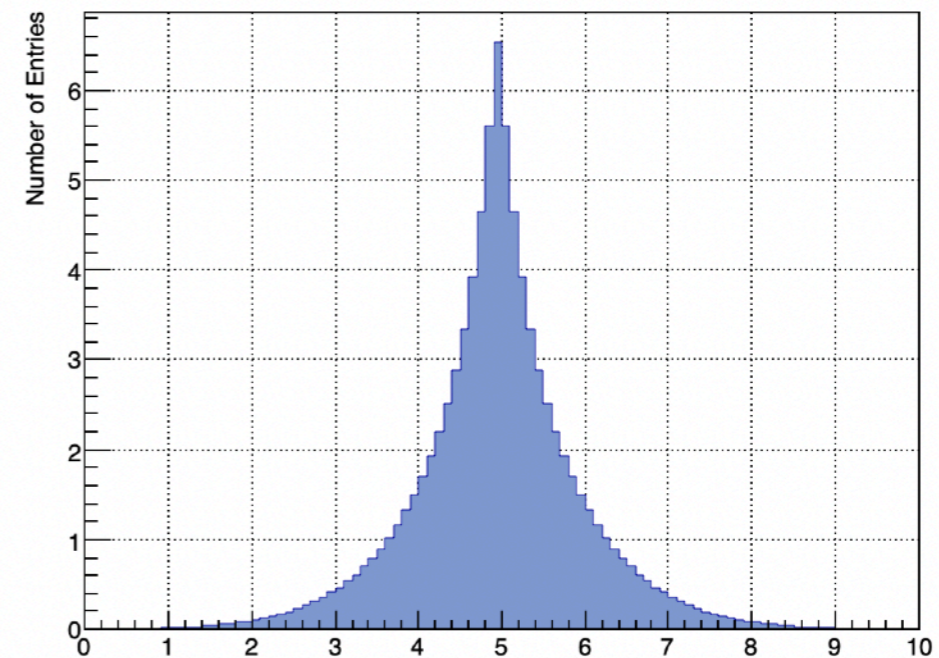
- Metodo di Jacobi



ProjectionX of biny=40 [y=3.90..4.00]



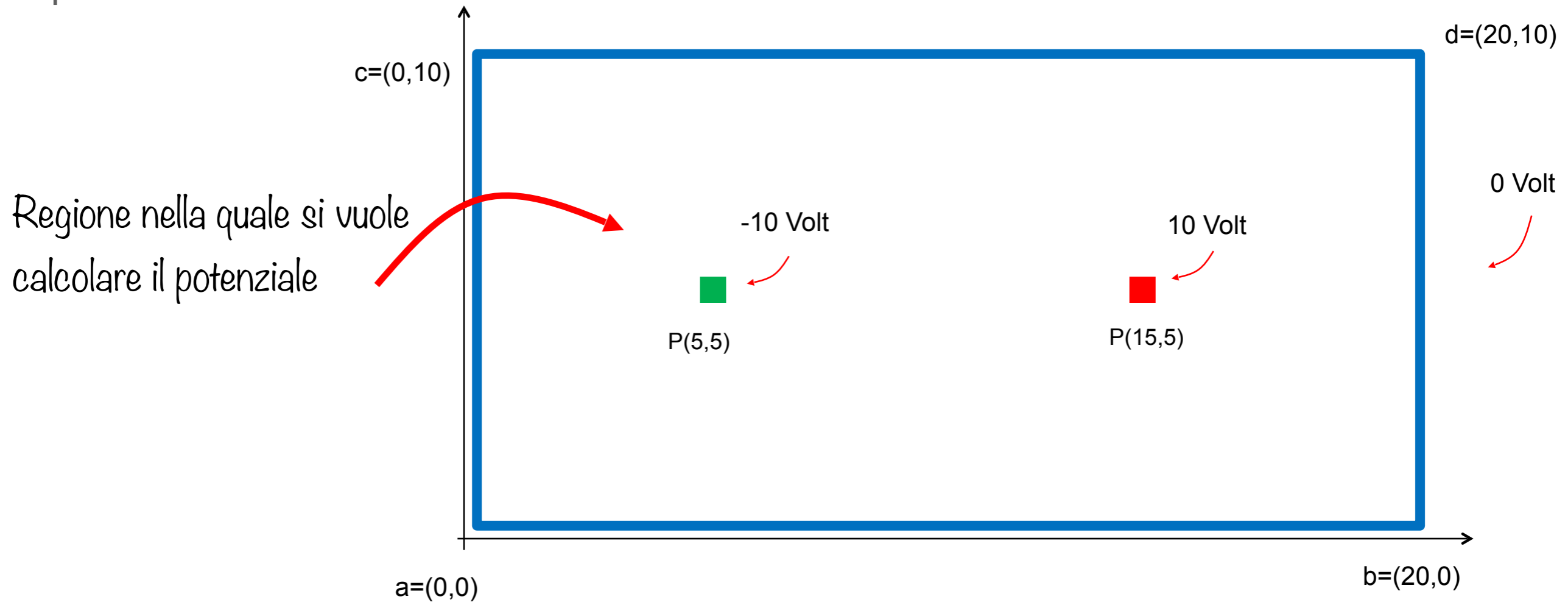
ProjectionX of biny=51 [y=5.00..5.10]





# EQUAZIONI DIFFERENZIALI

- Calcolo del potenziale in una regione in cui si trovano due conduttori a potenziale +10 e -10 Volt

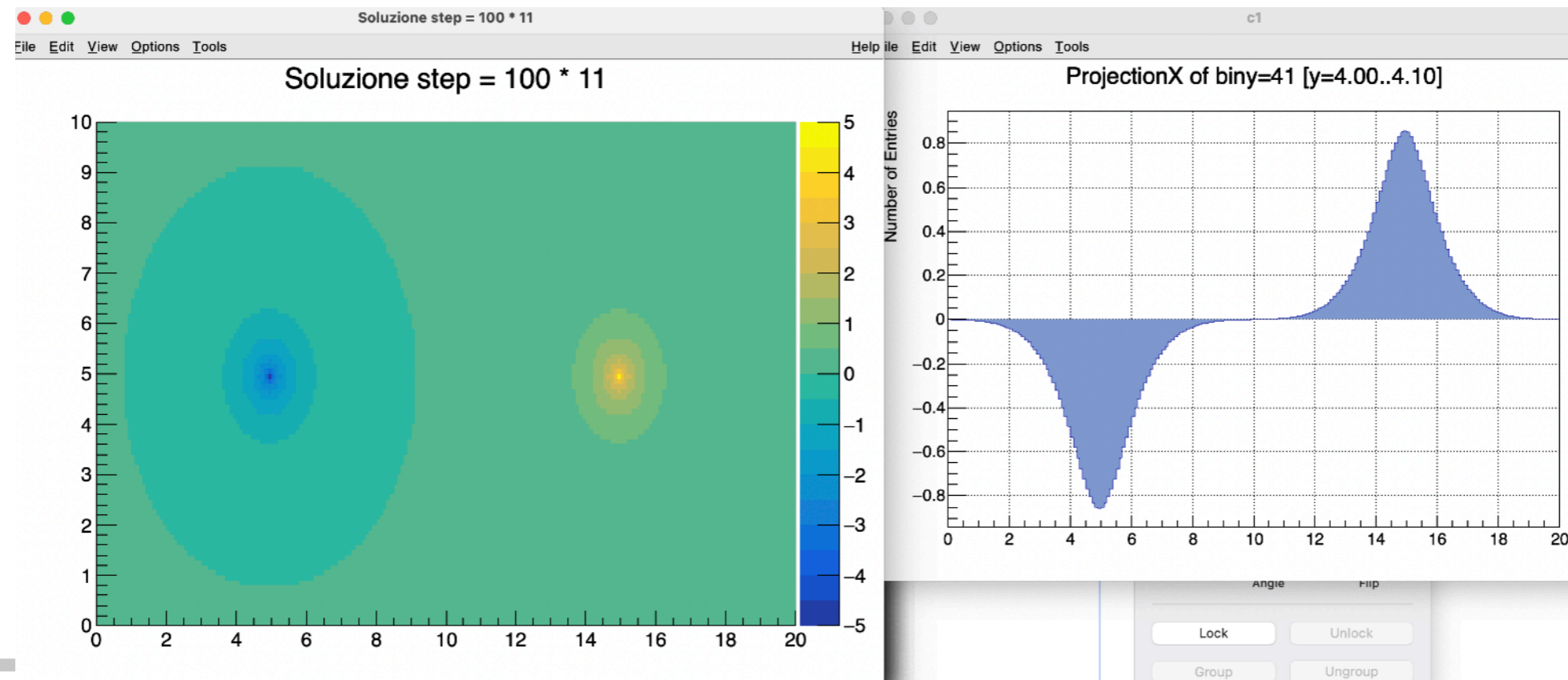
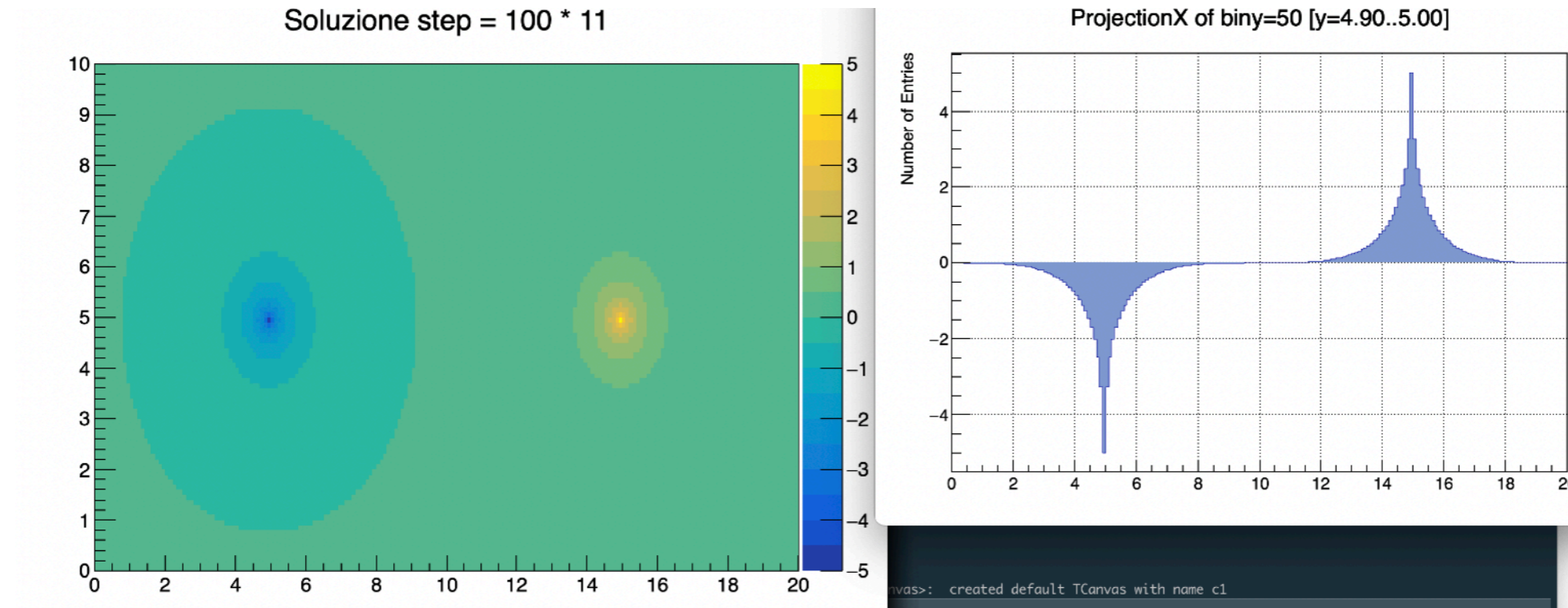


$$\nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Problema alla Dirichlet

$$u(0, y) = u(y, 0) = u(20, y) = u(x, 20) = 0 \quad u(5, 5) = -10 \quad u(15, 5) = 10$$

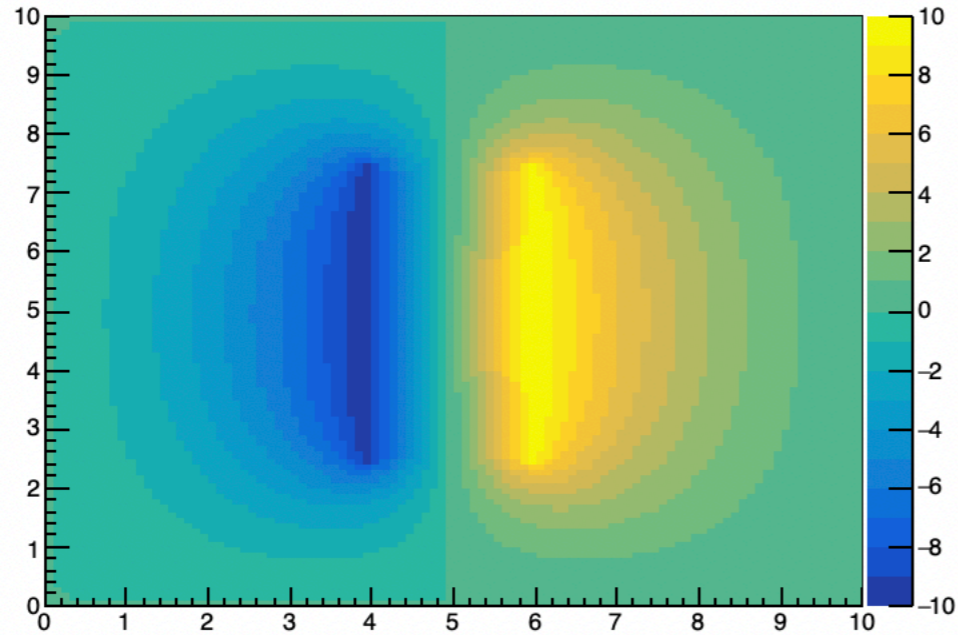
# EQ DI LAPLACE - ESEMPIO



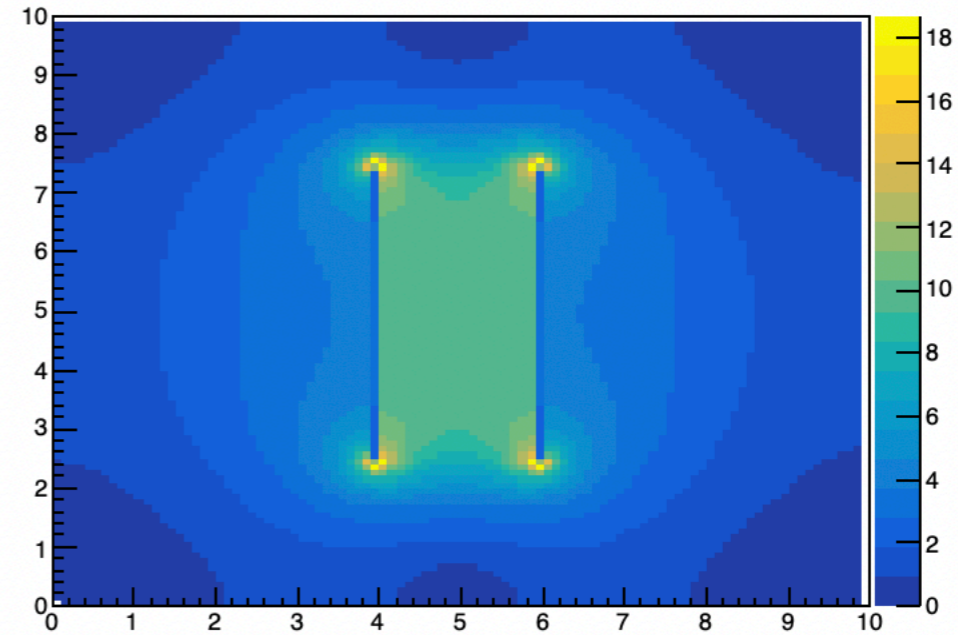
# EQ DI LAPLACE - ESEMPIO

- Condensatore piano

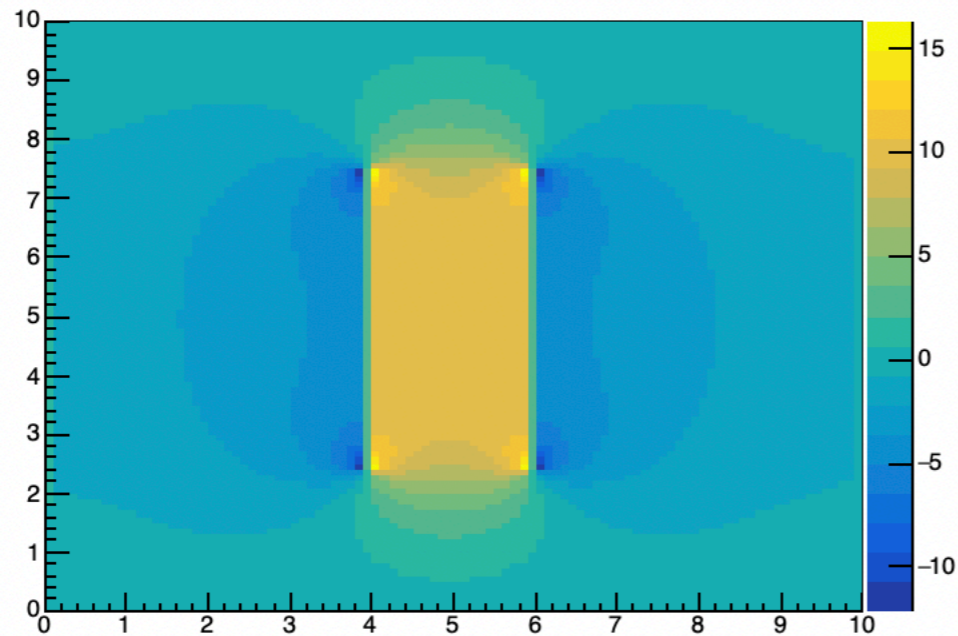
V Soluzione step = 100 \* 11



E Soluzione step = 100 \* 11



Ex Soluzione step = 100 \* 11



Ey Soluzione step = 100 \* 11

