METODI STATISTICI E COMPUTAZIONALI

Stefania Spagnolo

Dipartimento di Matematica e Fisica, Univ. del Salento

LEZIONE 15

INTERPOLAZIONE

Interpolazione polinomiale

INTERPOLAZIONE

- E' frequente trovarsi a conoscere una relazione funzionale solo attraverso una tabella di valori; i metodi di ***interpolazione*** forniscono una stima numerica della funzione in punti del dominio di definizione in cui il valore non è noto a partire dalla tabella di valori noti (in punti intermedi a quelli in cui la funzione è conosciuta)
  - Conosciamo una funzione per punti (discreti e finiti)
    - Per esempio, perché i valori numerici rappresentano l'***andamento di una funzione incognita*** e sono determinati sperimentalmente
    - NOTA: nei problemi di *regressione* invece l'*andamento analitico è noto ma qualche parametro della funzione è incognito*, deve essere determinato dai dati

INTERPOLAZIONE

- Di una funzione si conosce solo il valore che assume in ***n+1*** punti
  - ***{ x_i , $y_i = f (x_i)$ }*** con *i=0,…,n*;
  - gli ***x_i*** appartengono ad un intervallo ***[a, b]*** e sono detti ***nodi o punti base*** dell'interpolazione.
- È fissato un insieme di ***n+1*** funzioni ***$\phi_i (x)$*** con ***i=0,…,n*** definite in [a, b] e *linearmente indipendenti*.
- Soluzione del problema consiste nell'identificare ***n+1*** coefficienti ***α_i*** con ***i=0,…,n*** tali che la funzione

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \ \phi_i(x)$$

- Assuma i valori della funzione incognita in ogni nodo, ossia

$$\forall i \in \{0,..,n\} \quad g(x_i) = y_i = f(x_i)$$

- La funzione g rappresenta una approssimazione di f, utilizzata per calcolarne i valori in punti diversi dai nodi

INTERPOLAZIONE

- Il modello di interpolazione dipende dalla scelta delle funzioni $\phi_i(x)$
- ***Caratteristiche delle*** $\phi_i(x)$
  - facilmente calcolabili
  - buone proprietà di regolarità (continuità, derivabilità, etc.).
- Le classi di funzioni normalmente usate sono le ***funzioni razionali*** e le ***funzioni trigonometriche***

- Tra le funzioni razionali: Polinomi
  - $\phi_i(x)$ ***polinomi*** x^i ==>>> interpolazione polinomiale

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- Tra le funzioni razionali: Polinomi
  - ***$\phi_i(x)$ polinomi x^i*** ==>>> interpolazione polinomiale

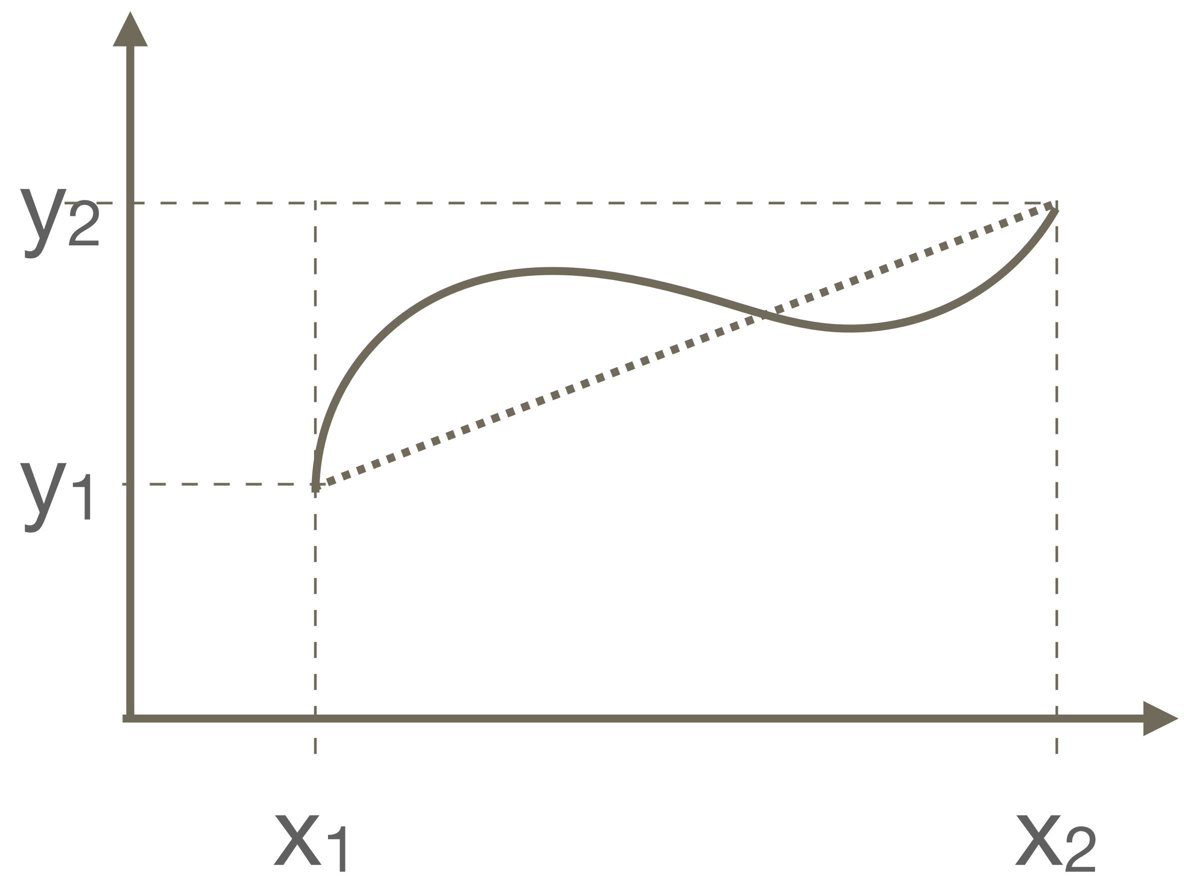
- **Teorema di esistenza e unicità**
  - *per n+1 punti distinti passa un e un solo polinomio di grado n*

- Ci assicura che esiste ed è unica la soluzione del problema di interpolazione che è stato posto
- Il polinomio di grado ***n*** costituito dalla combinazione lineare di ***n+1*** funzioni del tipo **$\phi_i(x)=x^i$** è proprio la mia funzione approssimante e, per il teorema precedente, deve esistere ed essere unico

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \; x^i$$

INTERPOLAZIONE LINEARE

- Caso piu' semplice
  - Interpolazione lineare

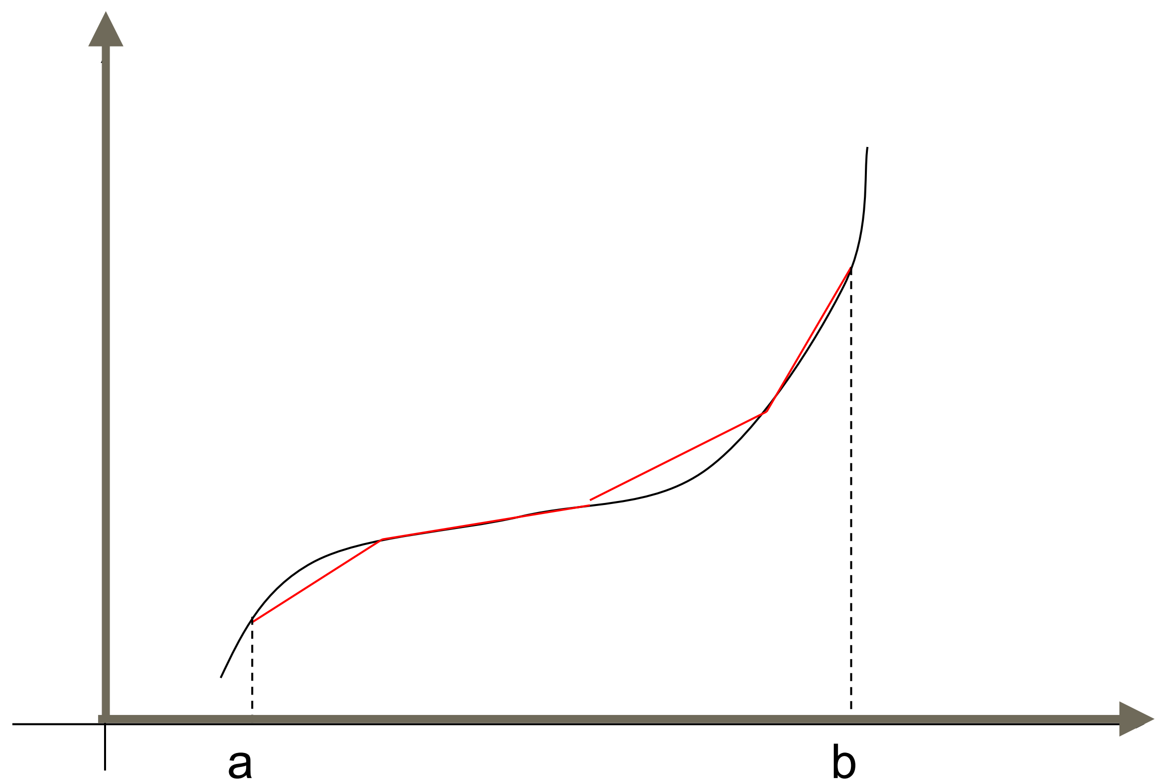


$$\frac{g(x) - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$g(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + y_1$$

INTERPOLAZIONE LINEARE

- Caso piu' semplice
  - Interpolazione lineare ***a tratti***



  - In ogni tratto:

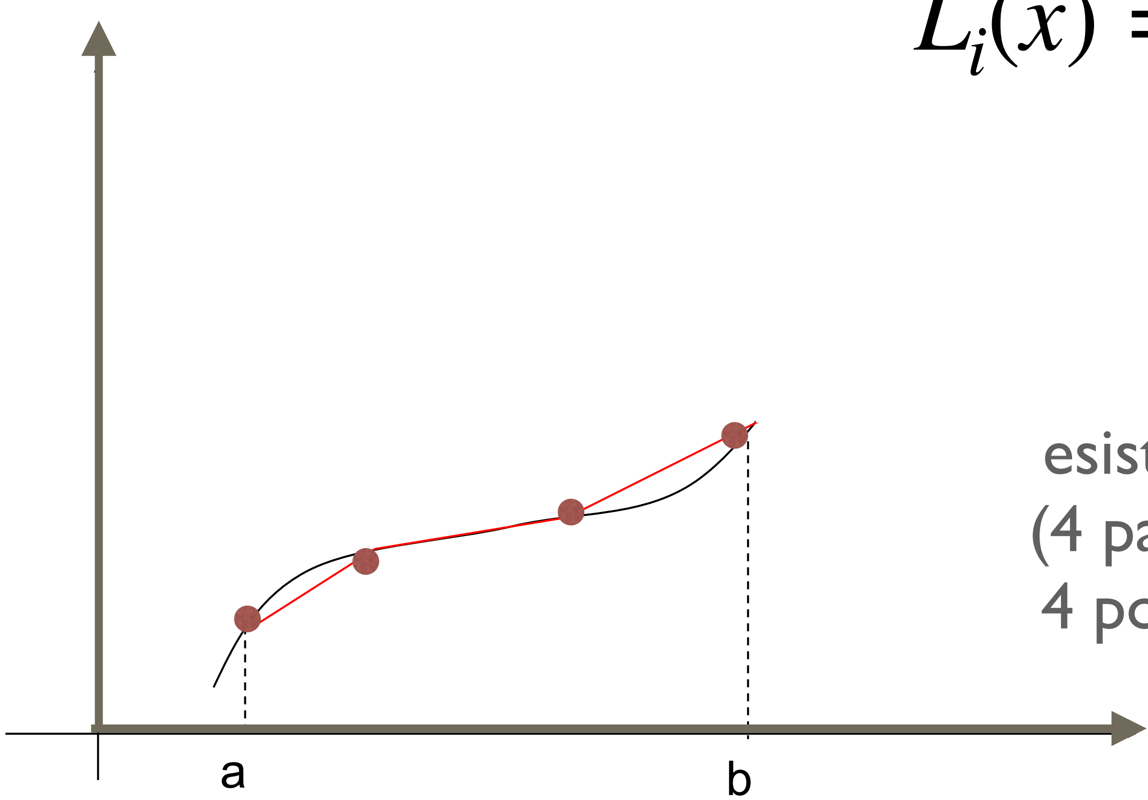
$$\frac{g(x) - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$g(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + y_1$$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- Polinomi di Lagrange
  - per ottenere un polinomio che passa per n+1 punti
  - Il teorema di unicità mi garantisce che una volta che ho identificato un polinomio che passa per n+1 punti questo è l'unico polinomio possibile.
- Dati n+1 valori x_i con i=0,…,n si dice ***polinomio di Lagrange*** un polinomio nella forma:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$



4 nodi, n=3,
esiste un polinomio di III grado (4 parametri) che passa dai nodi
4 polinomi di Lagrange: ognuno di grado 3

Conosco:
$x \rightarrow x_0, x_1, x_2, x_3$
$y \rightarrow y_0, y_1, y_2, y_3$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- Polinomi di Lagrange
  - per ottenere un polinomio che passa per n+1 punti
  - Il teorema di unicità mi garantisce che una volta che ho identificato un polinomio che passa per n+1 punti questo è l'unico polinomio possibile.
- Dati n+1 valori x_i con i=0,…,n si dice ***polinomio di Lagrange*** un polinomio nella forma:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$\left.\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\frac{x - x_2}{x_0 - x_2}\frac{x - x_3}{x_0 - x_3} \\
L_1(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\frac{x - x_2}{x_1 - x_2}\frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \\
L_2(x) &= \frac{x - x_0}{x_2 - x_0}\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \\
L_3(x) &= \frac{x - x_0}{x_3 - x_0}\frac{x - x_1}{x_3 - x_1}\frac{x - x_2}{x_3 - x_2}
\end{aligned}\right\}$$

4 nodi, n=3,
esiste un polinomio di III grado (4 parametri) che passa dai nodi
4 polinomi di Lagrange: ognuno di grado 3

Conosco:
$x \rightarrow \ x_0, x_1, x_2, x_3$
$y \rightarrow \ y_0, y_1, y_2, y_3$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- Polinomi di Lagrange
  - per ottenere un polinomio che passa per n+1 punti
  - Il teorema di unicità mi garantisce che una volta che ho identificato un polinomio che passa per n+1 punti questo è l'unico polinomio possibile.
- Dati n+1 valori x_i con i=0,…,n si dice ***polinomio di Lagrange*** un polinomio nella forma:

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$\left.\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\frac{x-x_3}{x_0-x_3} \\
L_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\frac{x-x_3}{x_1-x_3} \\
L_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\frac{x-x_3}{x_2-x_3} \\
L_3(x) &= \frac{x-x_0}{x_3-x_0}\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\frac{x-x_2}{x_3-x_2}
\end{aligned}\right\}$$

4 nodi, n=3,
esiste un polinomio di III grado (4 parametri) che passa dai nodi
4 polinomi di Lagrange: ognuno di grado 3

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & se \quad j = i \\ 0 & se \quad j \neq i \end{cases}$$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

Quindi $g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x)$

$L_0(x)=1$ se $x=x_0$
$L_0(x)=0$ se $x=x_{1,2,3}$

Infatti

$$g(x_0) = a_0 = y_0$$

in generale

$$g(x_i) = a_i = y_i$$

$$L_0(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\frac{x-x_3}{x_0-x_3}$$

$$L_1(x) = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\frac{x-x_3}{x_1-x_3}$$

$$L_2(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\frac{x-x_3}{x_2-x_3}$$

$$L_3(x) = \frac{x-x_0}{x_3-x_0}\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\frac{x-x_2}{x_3-x_2}$$

4 nodi, n=3,
esiste un polinomio di III grado (4 parametri) che passa dai nodi
4 polinomi di Lagrange: ognuno di grado 3

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & se \quad j = i \\ 0 & se \quad j \neq i \end{cases}$$

Interpolazione polinomiale

Quindi $$\boxed{g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x)}$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Infatti

$$g(x_0) = a_0 = y_0$$

in generale

$$g(x_i) = a_i = y_i$$

Il polinomio cosi costruito passa per tutti i nodi ed è di grado n

Per il teorema di esistenza ed unicità g(x) è l'unico polinomio che passa per gli n+1 nodi

Interpolazione polinomiale

La funzione interpolante

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x)$$

dove

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$a_i = y_i$$

Può essere scritta in modo più conveniente così

$$g(x) = \pi(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{z_i}{(x - x_i)}$$

dove

$$\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

$$z_i = \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

$$g(x) = \pi(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{z_i}{(x-x_i)}$$

$$\pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

$$z_i = \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)}$$

Infatti
$$g(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\times\Big(\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}\frac{1}{x-x_0} + \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\frac{1}{x-x_1} + \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\frac{1}{x-x_2} + \frac{y_3}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\frac{1}{x-x_3}\Big)$$

$$\left.\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\frac{x-x_3}{x_0-x_3} \\
L_1(x) &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\frac{x-x_3}{x_1-x_3} \\
L_2(x) &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\frac{x-x_3}{x_2-x_3} \\
L_3(x) &= \frac{x-x_0}{x_3-x_0}\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\frac{x-x_2}{x_3-x_2}
\end{aligned}\right\}$$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

$$g(x) = \pi(x)\sum_{i=0}^{n} \frac{z_i}{(x - x_i)}$$

$$\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots.(x - x_n)$$

$$z_i = \frac{y_i}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x_i - x_j)}$$

Infatti

$$g(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \times \left(\frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \frac{1}{x - x_0} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \frac{1}{x - x_1} + \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \frac{1}{x - x_2} + \frac{y_3}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \frac{1}{x - x_3} \right)$$

Costo computazionale

n+1 sottrazioni
n(n+1)/2 sottrazioni
n(n+1) moltiplicazioni
n addizioni e n(n+1) moltiplicazioni

In pratica ***n²/2 addizioni***, ***n² moltiplicazioni*** + termini di ordine inferiore in n

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- Nodi equidistanti $x_{i+1} = x_i + h$ quindi $x_i = x_0 + ih$
- Introdotta la variabile reale *0 ≤ t ≤ n* per cui ***x = x₀ + th*** i polinomi di Lagrange si possono scrivere nel modo seguente

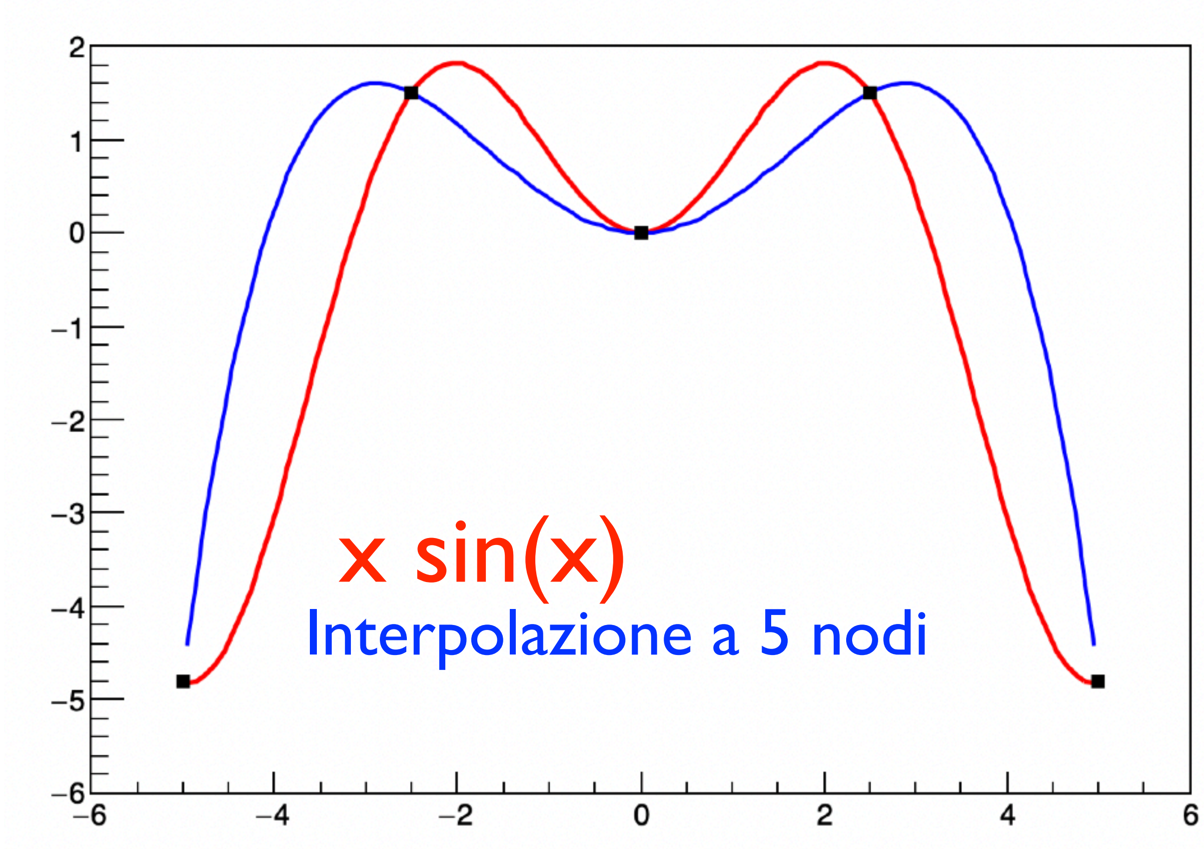
$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x_0 + th - x_0 - jh}{x_0 + ih - x_0 - jh} = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t - j}{i - j}$$

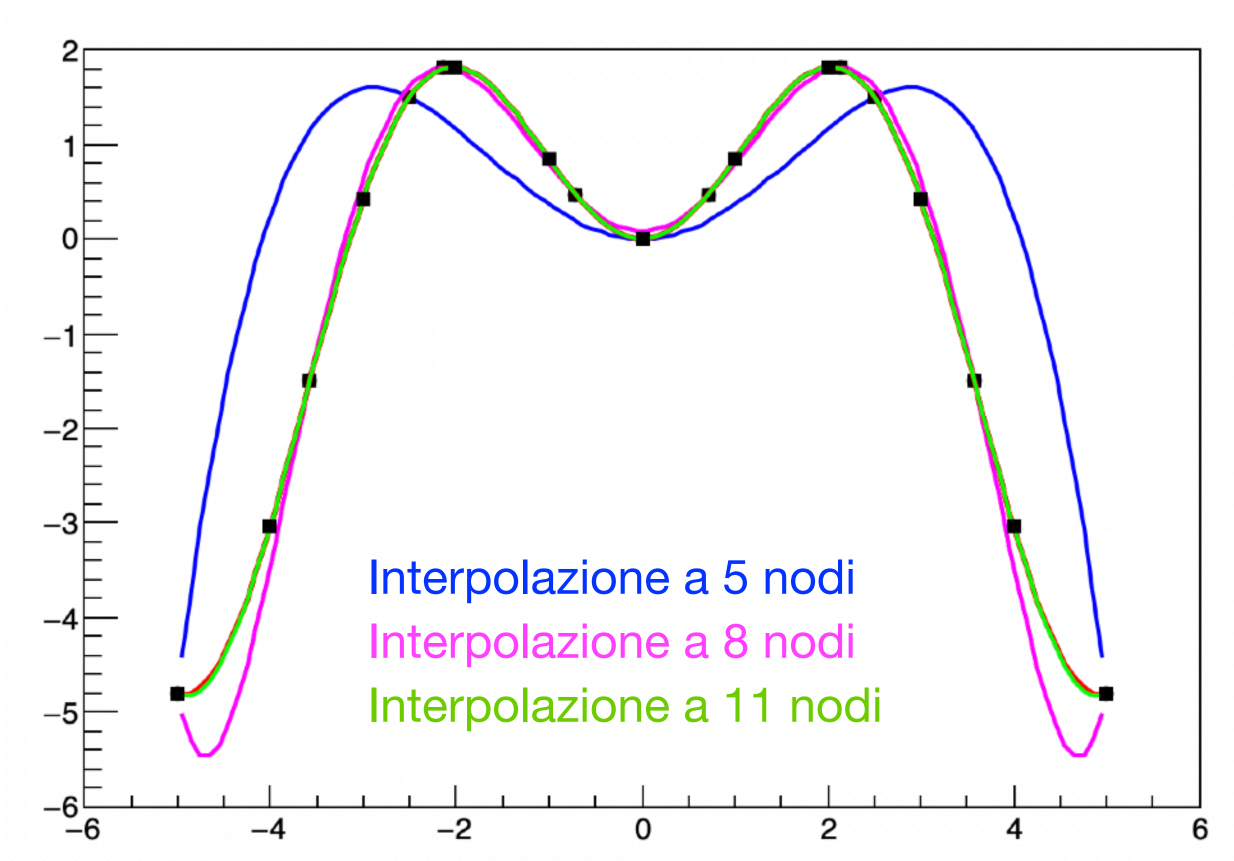
- *Polinomi definiti in [0,n] dipendenti solo dal numero di punti*
- La funzione π(x) si può scrivere nel modo seguente

$$\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) =$$
$$= (x_0 + th - x_0)(x_0 + th - x_0 - h)\ldots(x_0 + th - x_0 - nh) =$$
$$= h^{n+1} t(t-1)(t-2)\ldots(t-n) =$$
$$= h^{n+1}\pi_{n+1}(t)$$

dove i *$\pi_{n+1}(t)$ sono polinomi di grado n+1 indipendenti dallo specifico valore dei nodi*

ESEMPIO





- All’aumentare di n = numero dei nodi migliora l’interpolazione
  - diminuisce l’errore

- Non è sempre cosi’

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- ***Quant'è l'errore*** che si commette nel valutare la funzione f(x) utilizzando una sua approssimazione ottenuta attraverso un polinomio ?
  - Definisco ***funzione errore***

$$r(x) = f(x) - g(x)$$

  - La funzione errore così definita varrà zero in corrispondenza dei nodi dell'interpolazione, cioe' ***$r(x_i) = 0$, i=0,…,n.***
- Si puo' dimostrare che se la f(x) è derivabile con continuità n+1 volte allora la funzione errore sarà pari a

$$r(x) = \pi(x)\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$$

dove ζ si trova all'interno dell'intervallo $[x_0, x_n]$

Quindi se f(x) gode di opportune proprietà di regolarità allora

$$|r(x)| \leq |\pi(x)|\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

dove $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|$ in $[x_0,x_n]$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- ***Qual è l'errore*** quando i nodi sono equidistanti ?

$$r(x) = f(x) - g(x)$$

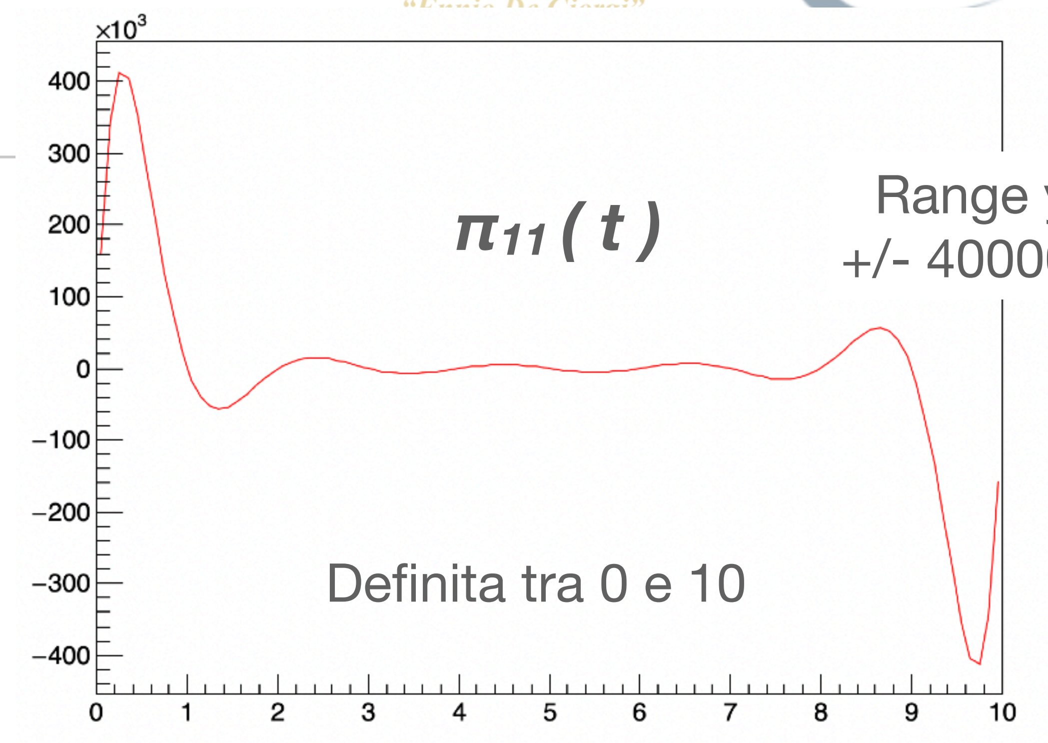
$$r(x_0 + ht) = \pi_{n+1}(t)h^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$$

- Per cui l'andamento della funzione errore dipende dai polinomi π(t) che sono sempre gli stessi per qualsiasi problema a n+1 nodi

- Studiamo le caratteristiche funzioni $\boldsymbol{\pi_{n+1}(t)}$

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- Studiamo le caratteristiche funzioni $\pi_{n+1}(t)$
  - Esempio $\pi_{11}(t)$
  - Definita tra 0 e 10
  - 5 = 10/2 = n/2 e' un punto di simmetria
  - se t non è intero e t<n/2 allora
    - $|\pi_{n+1}(t-1)| > |\pi_{n+1}(t)|$.
    - per la proprietà di simmetria combinata con la 3 risulta che per t>n/2 non interi $|\pi_{n+1}(t+1)| > |\pi_{n+1}(t)|$



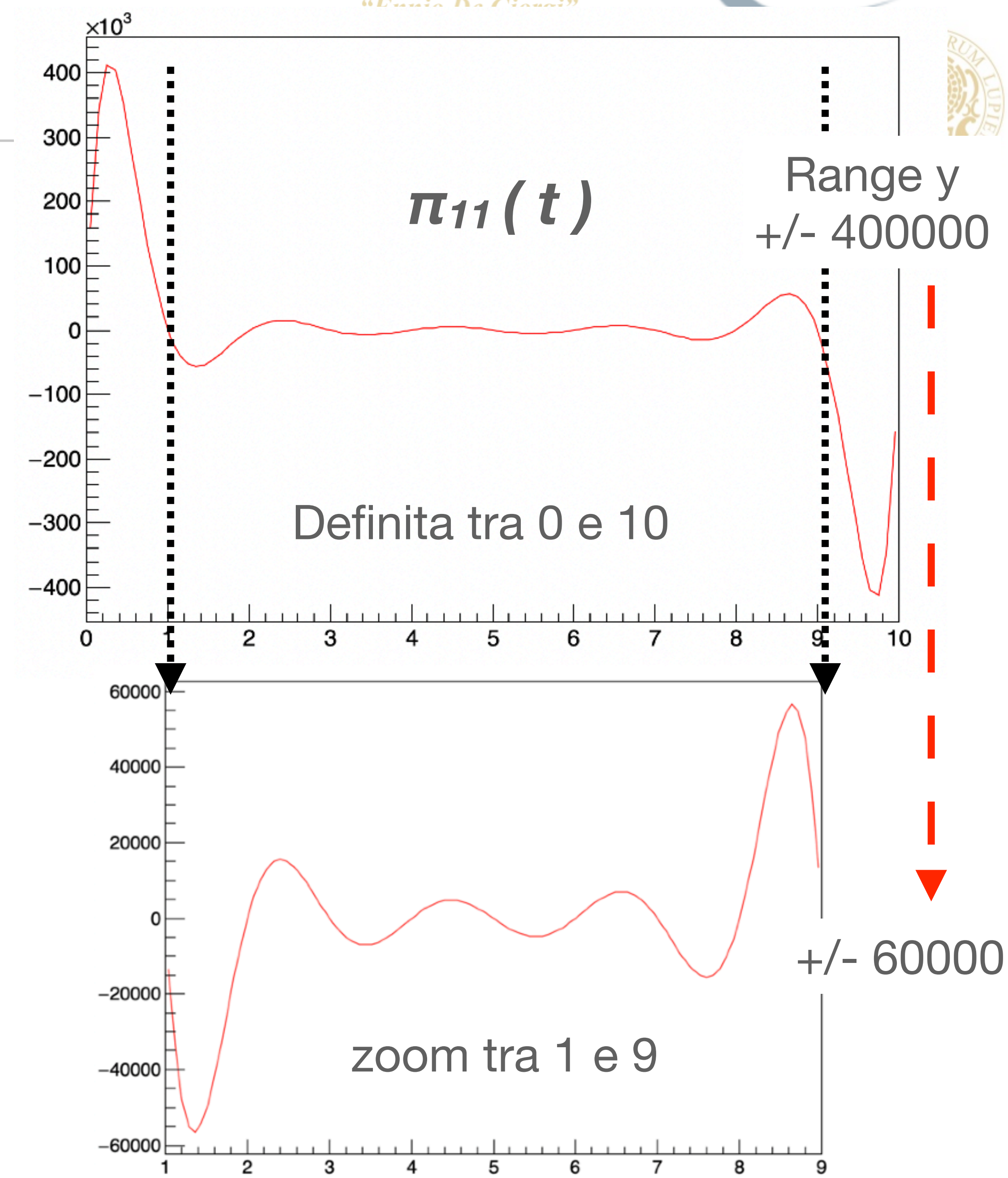
Range y
+/- 400000

zoom tra 1 e 9

zoom tra 2 e 8

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- Studiamo le caratteristiche funzioni $\pi_{n+1}(t)$
  - Esempio $\pi_{11}(t)$
  - Definita tra 0 e 10
  - 5 = 10/2 = n/2 e' un punto di simmetria
  - se t non è intero e t<n/2 allora
    - $|\pi_{n+1}(t-1)| > |\pi_{n+1}(t)|$.
    - per la proprietà di simmetria combinata con la 3 risulta che per t>n/2 non interi $|\pi_{n+1}(t+1)| > |\pi_{n+1}(t)|$

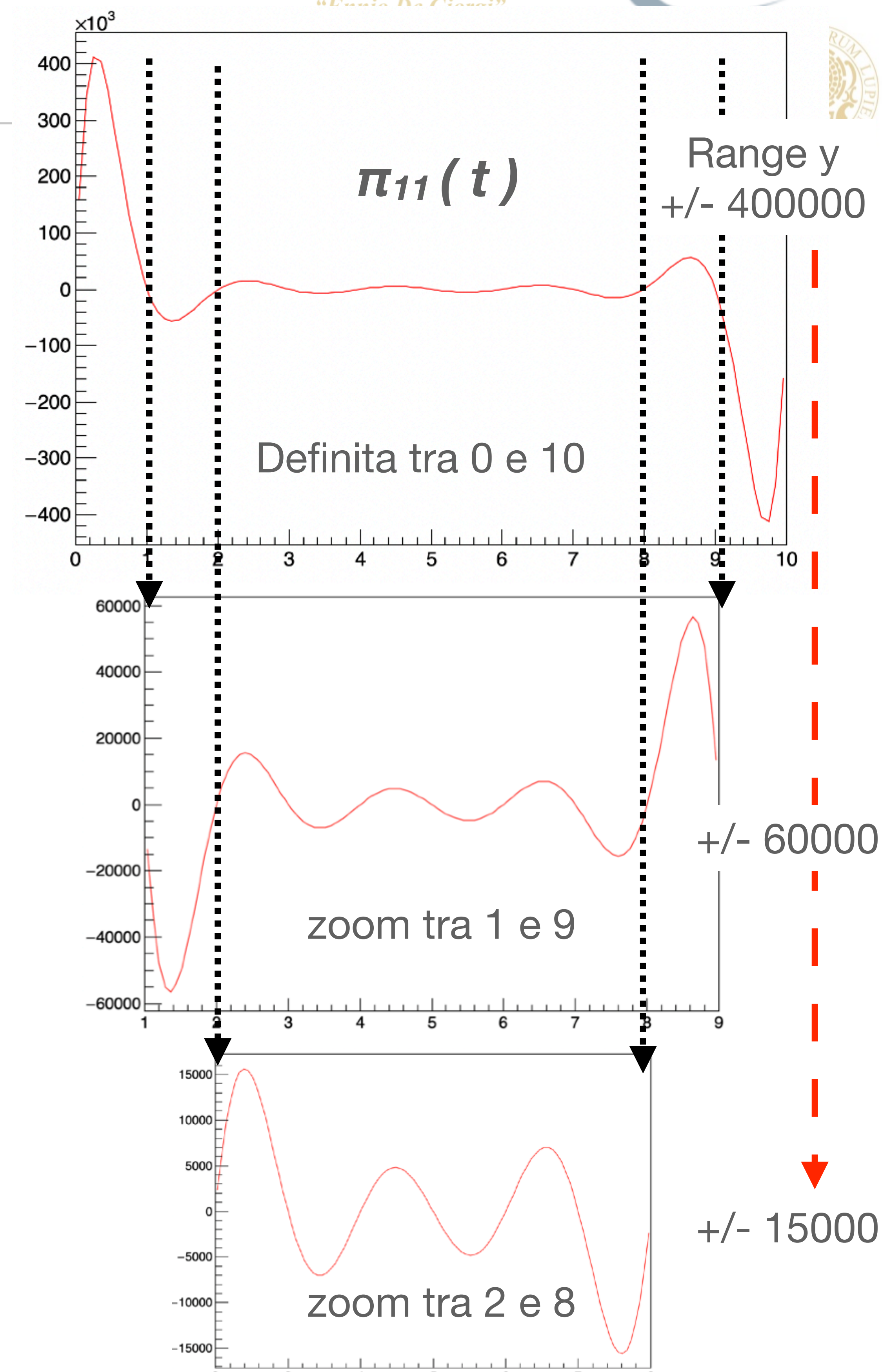


+/- 15000

zoom tra 2 e 8

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

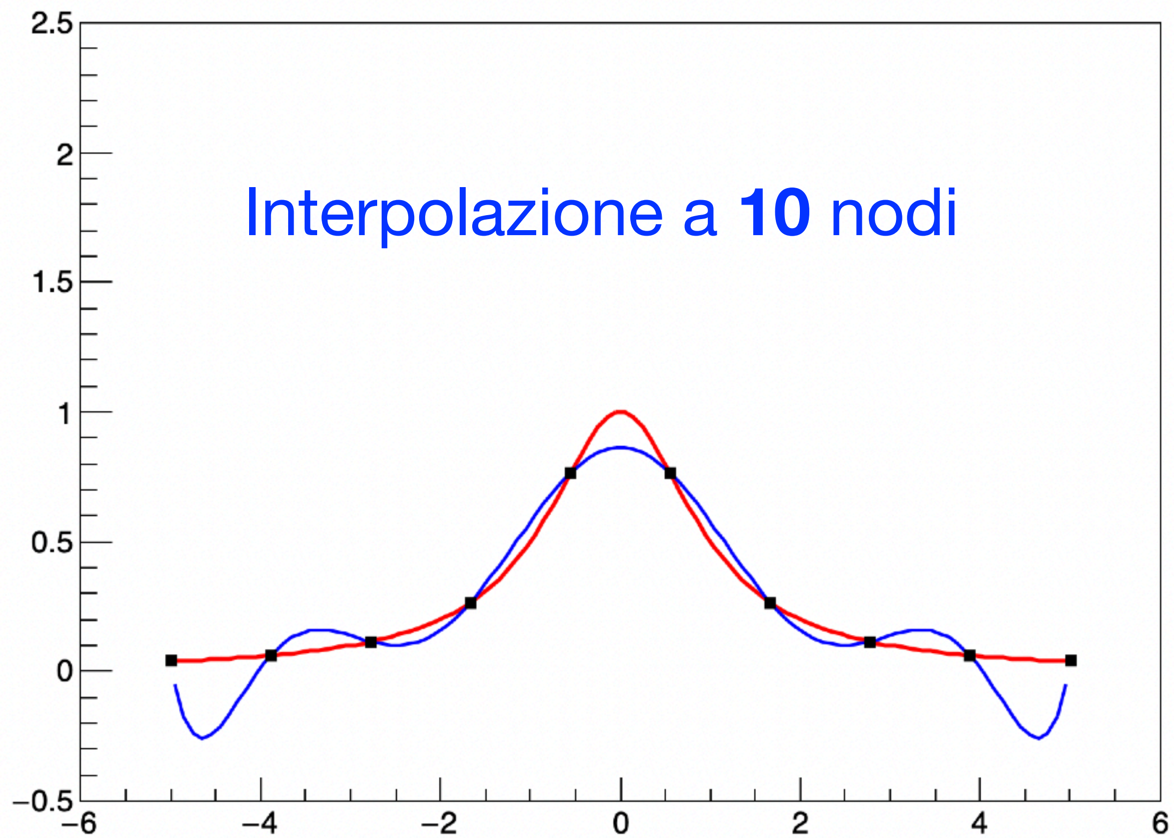
- Studiamo le caratteristiche funzioni $\pi_{n+1}(t)$
  - Esempio $\pi_{11}(t)$
  - Definita tra 0 e 10
  - 5 = 10/2 = n/2 e' un punto di simmetria
  - se t non è intero e t<n/2 allora
    - $|\pi_{n+1}(t-1)| > |\pi_{n+1}(t)|$.
    - per la proprietà di simmetria combinata con la 3 risulta che per t>n/2 non interi $|\pi_{n+1}(t+1)| > |\pi_{n+1}(t)|$
      - =>>> il polinomio assume sempre valori (assoluti) maggiori man mano che ci si sposta verso l'estremo dell'intervallo in cui è definito ed assume valori minimi al centro dell'intervallo.

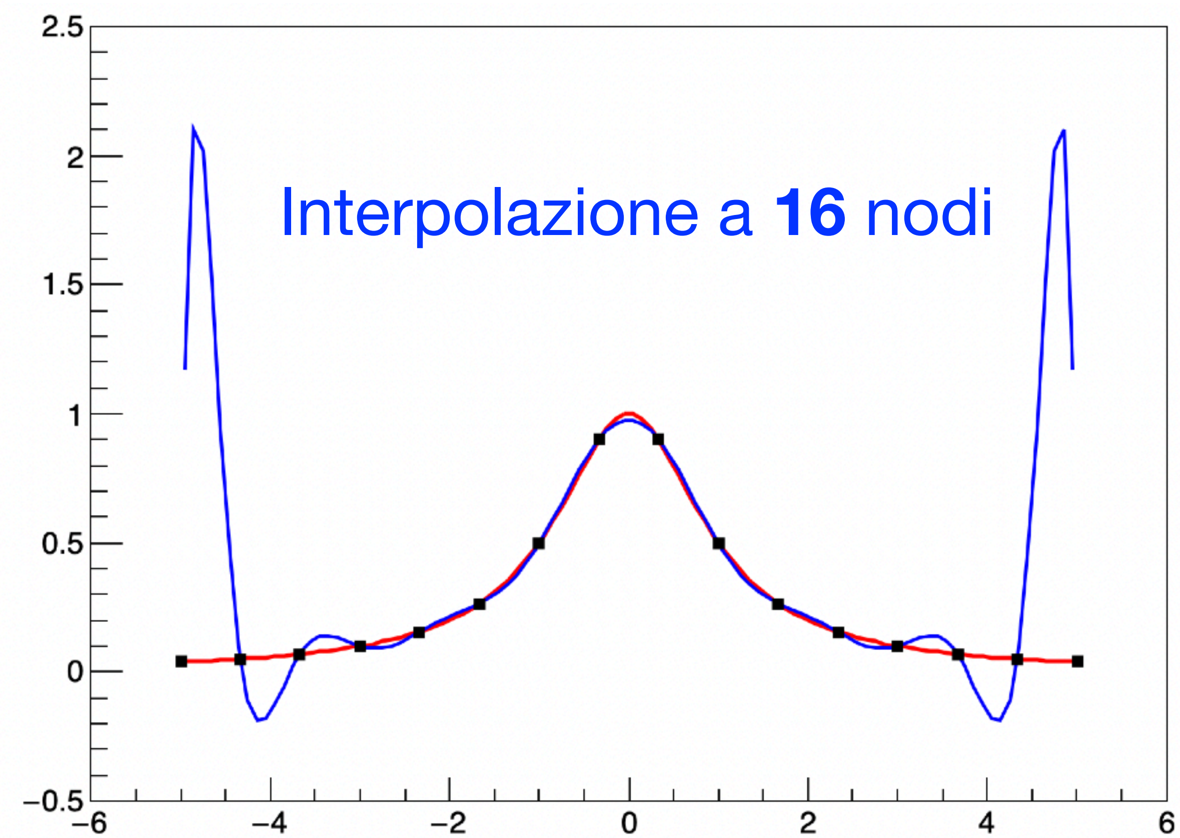


INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- Vediamo le conseguenze:
  - Consideriamo la ***funzione di Runge***





- ***L'errore*** commesso ***ai bordi*** della regione in esame ***cresce con il grado del polinomio interpolante***. La funzione interpolante **non converge** alla funzione da interpolare al tendere di n ad infinito ***in tutto l'intervallo***.

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

- Consideriamo la funzione errore nel caso di nodi equidistanti

$$|r(x_0 + ht)| = |\pi_{n+1}(t)|\, h^{n+1} \frac{|f^{(n+1)}(\zeta)|}{(n+1)!} \leq |\pi_{n+1}(t)|\, h^{n+1} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

- Affinché l'interpolazione converga occorre che l'errore tenda a 0 al tendere ad infinito nel numero di punti. Questo avviene se M_{n+1} tende a zero più rapidamente di

$$\frac{(n+1)!}{|\pi_{n+1}(t)|\, h^{n+1}}$$

- Una condizione verificata solo per alcune funzioni

Interpolazione polinomiale

- Sino ad ora abbiamo ignorato l'effetto degli errori di arrotondamento dovuti alla precisione della macchina.
  - L'errore di arrotondamento dipende dalla complessità del polinomio che occorre utilizzare per l'approssimazione. Polinomi di grado maggiore presentano una complessità computazionale maggiore e quindi sono soggetti a maggior errore di arrotondamento.
- Non sempre, quindi, utilizzare polinomi di grado maggiore è conveniente.
- Si preferisce eseguire un'interpolazione mediante ***polinomi composti***
  - Al singolo polinomio interpolante si sostituisce una serie di polinomi di grado inferiore che approssimano la funzione in un sotto-insieme di punti. La funzione interpolante cosi ottenuta non è necessariamente continua, ma l'errore che si commette è più uniforme in tutto l'intervallo di interpolazione.

LEZIONE 16
INTERPOLAZIONE

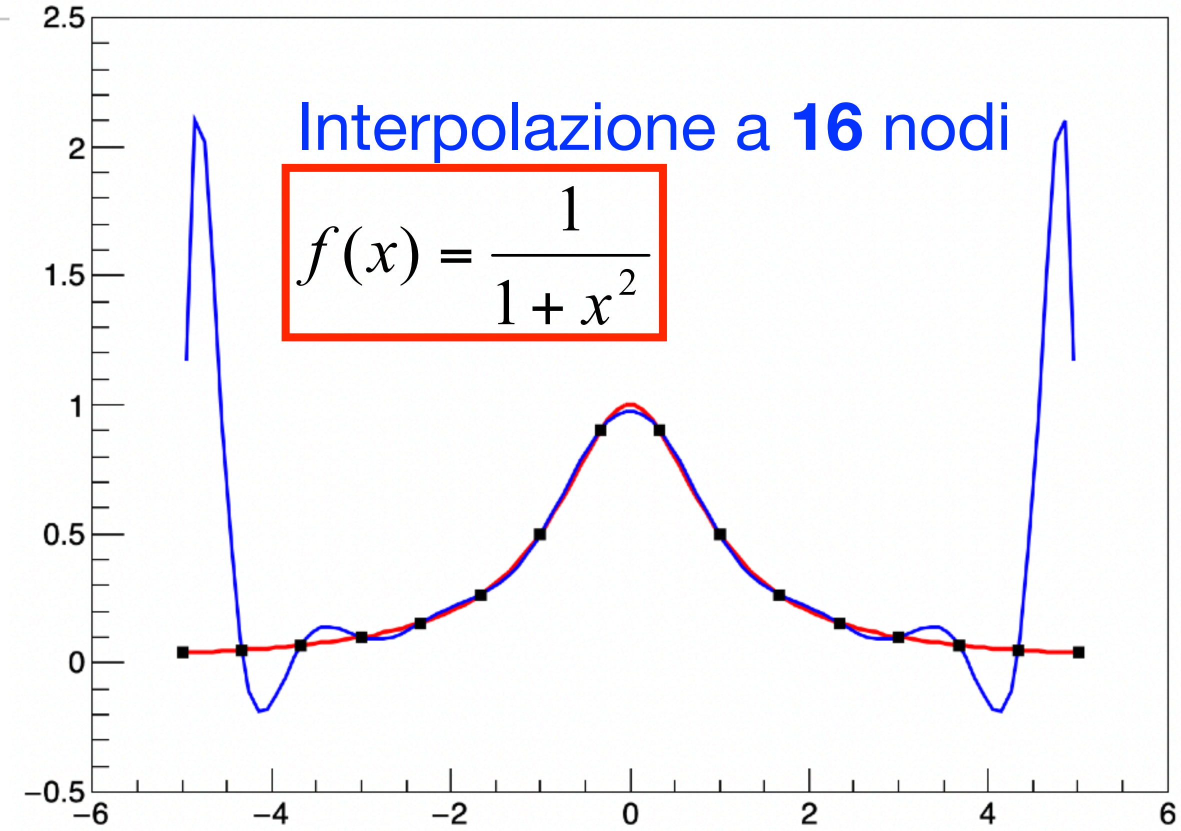
Polinomi composti

INTERPOLAZIONE MEDIANTE POLINOMI COMPOSTI

L'errore commesso ***ai bordi*** della regione in esame ***cresce con il grado del polinomio interpolante***.

La funzione interpolante **non converge** alla funzione da interpolare al tendere di n ad infinito ***in tutto l'intervallo***.

Interpolazione2.C



- L'errore di arrotondamento dipende dalla complessità del polinomio che occorre utilizzare per l'approssimazione. Polinomi di grado maggiore presentano una complessità computazionale maggiore e quindi sono soggetti a maggior errore di arrotondamento.

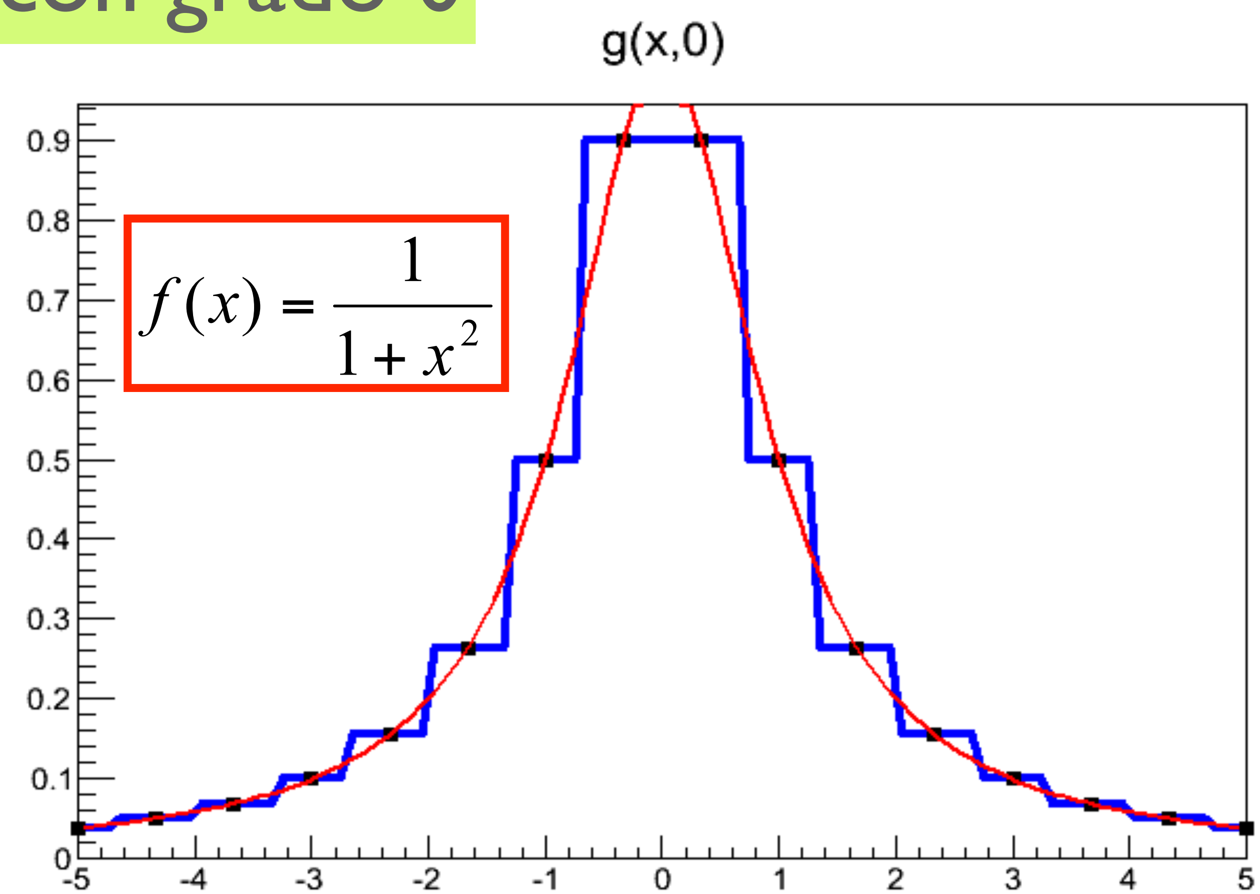
- Si preferisce eseguire un'interpolazione mediante ***polinomi composti***
  - Al singolo polinomio interpolante si sostituisce una ***serie di polinomi di grado inferiore che approssimano la funzione in un sotto-insieme di punti***. La funzione interpolante cosi ottenuta non è necessariamente continua, ma l'errore che si commette è più uniforme in tutto l'intervallo di interpolazione.

INTERPOLAZIONE MEDIANTE POLINOMI COMPOSTI

- Una tecnica spesso usata consiste nel partire da un'approssimazione con polinomi composti (o a tratti) di grado basso e "correggere" progressivamente l'approssimazione passando a polinomi di grado superiore.
- In questo modo possibile tenere sotto controllo il potenziale errore introdotto dall'algoritmo

Interpolazione3.C con grado 0

- Consideriamo come prima approssimazione un'i***nterpolazione di grado zero***. Questa consiste nell'identificare per ogni x il punto della griglia più vicino e attribuire come valore interpolante proprio quel valore.
- Si ottiene una funzione a gradini. Questa funzione, tuttavia, agli estremi dell'intervallo commette sicuramente un errore minore che non l'interpolazione con un polinomio di grado 15 in tutto l'intervallo.



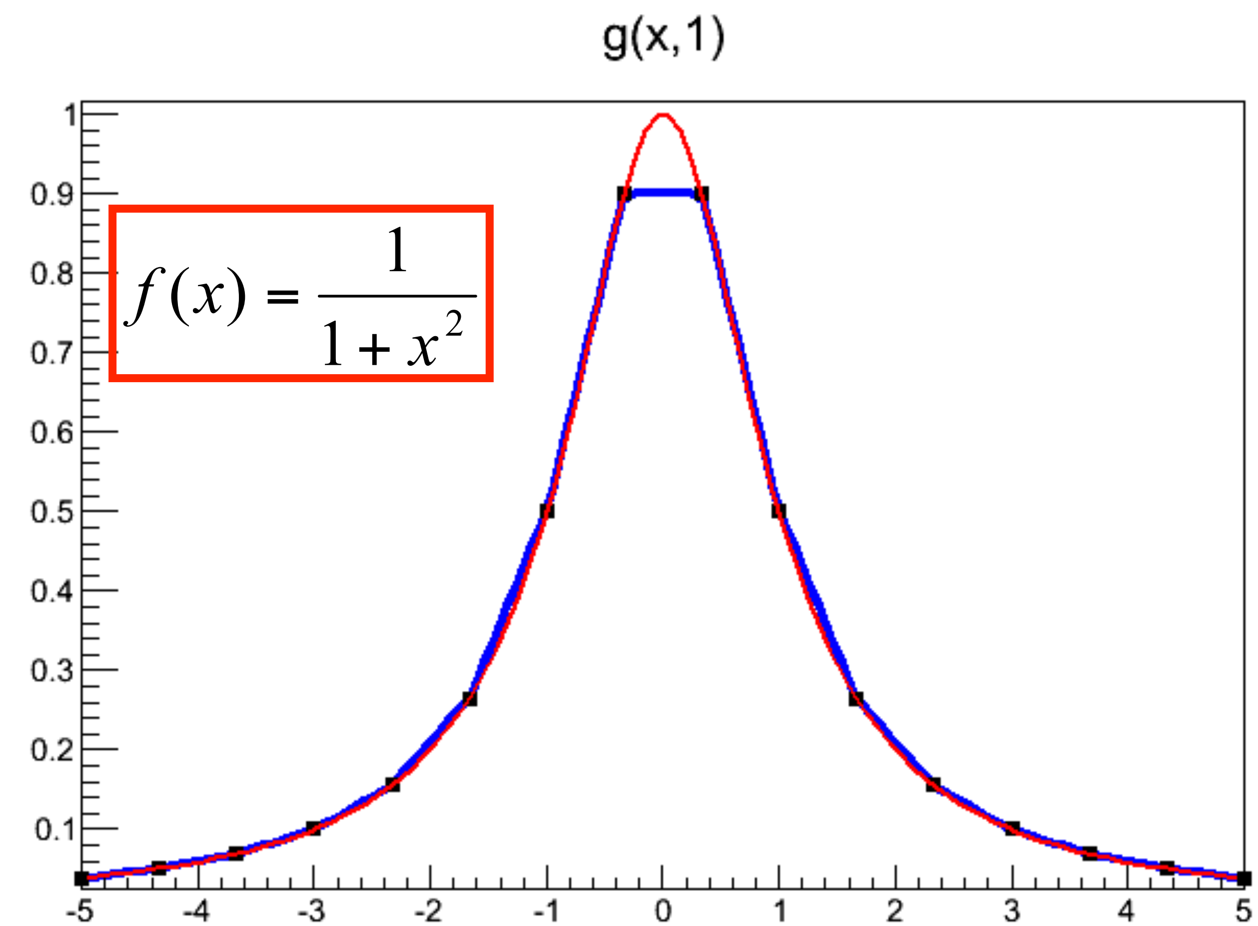
INTERPOLAZIONE MEDIANTE POLINOMI COMPOSTI

Interpolazione3.C con grado 1

- Passiamo ora ad un'interpolazione con un ***polinomio a tratti di grado 1*** (una spezzata)

$$\frac{g - y_i}{x - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad \Rightarrow \quad g = y_i + (x - x_i)\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right)$$

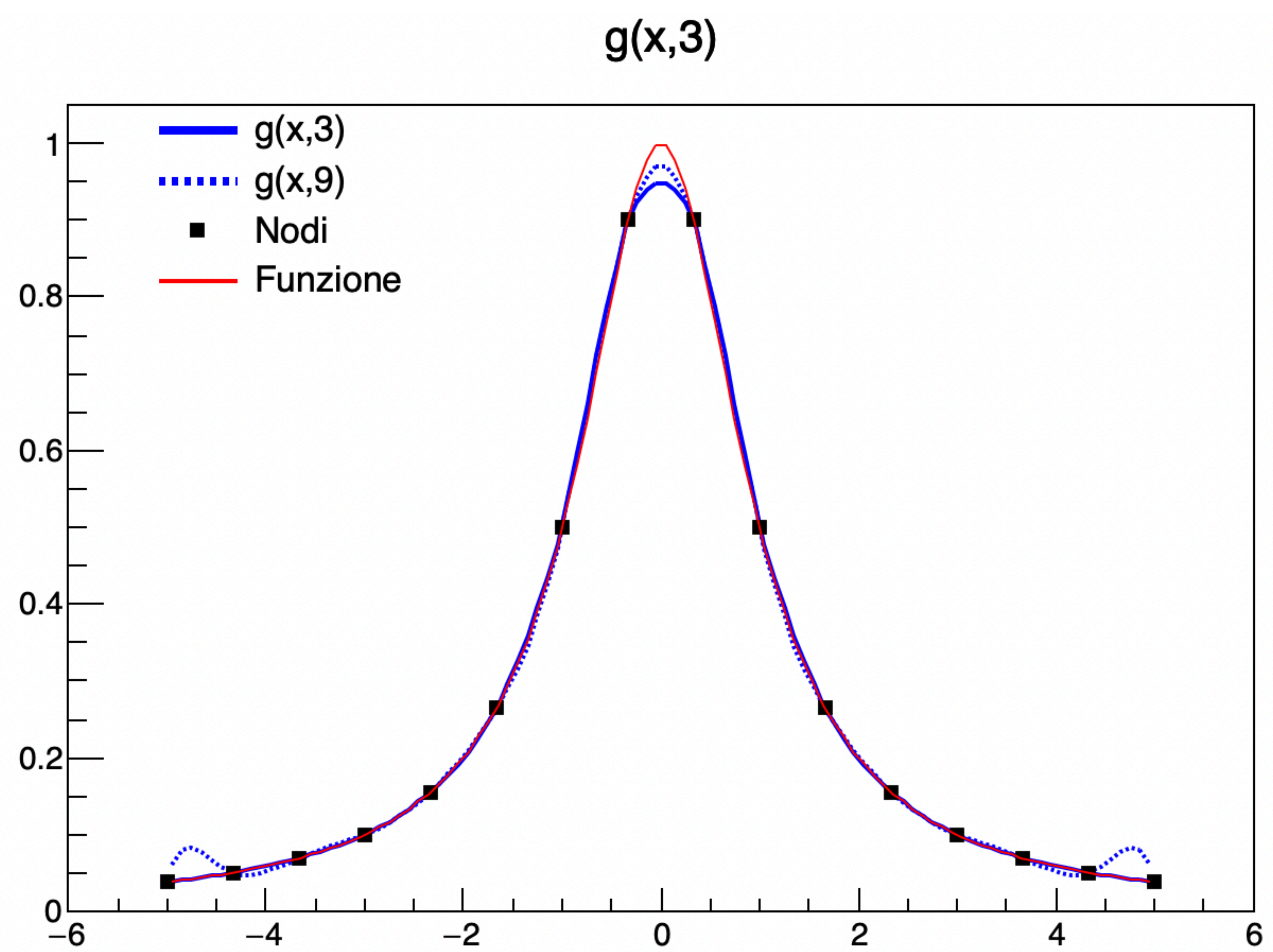
- **NOTA**: La nuova interpolazione può essere scritta come la vecchia (ordine 0) più un termine correttivo proporzionale alla distanza tra il punto x e il punto x_i che si era usato per la precedente interpolazione
- **GENERALIZZANDO**:
  - si puo' mettere a punto una procedura che consiste nella progressiva successione di correzioni alla prima interpolazione di ordine via via crescente.
  - Al passo 2 il termine correttivo rispetto al passo 1 sarà proporzionale a $(x-x_i)^2$
  - Non si tratta, però, di un reale sviluppo in serie



INTERPOLAZIONE MEDIANTE POLINOMI COMPOSTI

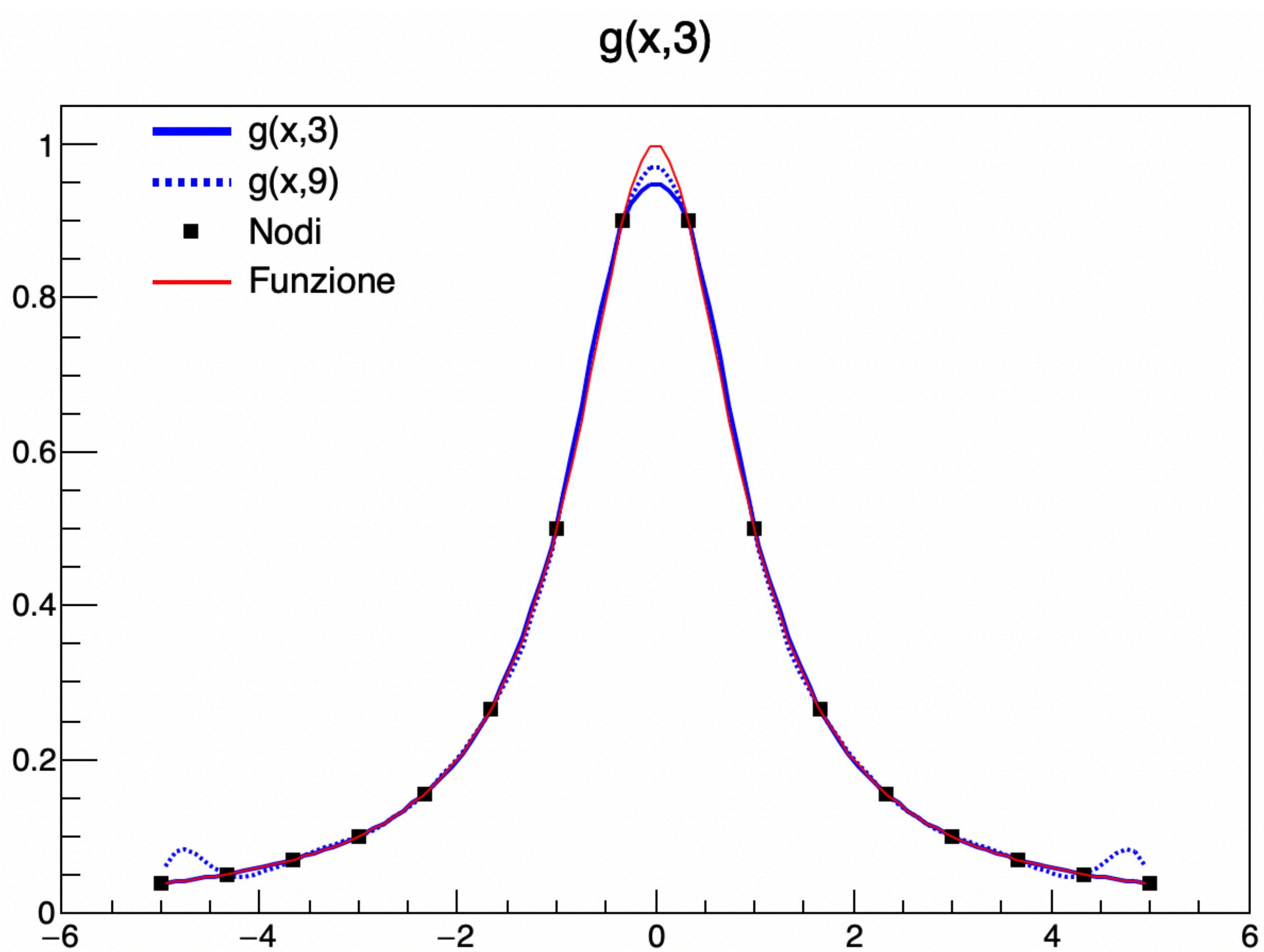
Interpolazione3.C con grado 3, 9

- Interpolazione a tratti con polinomio di grado 3 e 9



INTERPOLAZIONE MEDIANTE POLINOMI COMPOSTI

- Convergenza dell'interpolazione



Interpolazione4.C

```
root [0] .x Interpolazione4.c
-5.000000 0.038462
-4.333333 0.050562
-3.666667 0.069231
-3.000000 0.100000
-2.333333 0.155172
-1.666667 0.264706
-1.000000 0.500000
-0.333333 0.900000
0.333333 0.900000
1.000000 0.500000
1.666667 0.264706
2.333333 0.155172
3.000000 0.100000
3.666667 0.069231
4.333333 0.050562
5.000000 0.038462
Info in <TCanvas::MakeDefCanvas>:  created default TCanvas with name c1
------------ x = 4.66667
grado=0 g(x)=0.038462 diff w.r.t previous iteration = 999.038462
grado=1 g(x)=0.044512 diff w.r.t previous iteration = 0.006050
grado=2 g(x)=0.043691 diff w.r.t previous iteration = -0.000821
grado=3 g(x)=0.044036 diff w.r.t previous iteration = 0.000346
grado=4 g(x)=0.043772 diff w.r.t previous iteration = -0.000265
grado=5 g(x)=0.044069 diff w.r.t previous iteration = 0.000298
grado=6 g(x)=0.043805 diff w.r.t previous iteration = -0.000265
grado=7 g(x)=0.042023 diff w.r.t previous iteration = -0.001782
grado=8 g(x)=0.045807 diff w.r.t previous iteration = 0.003784
grado=9 g(x)=0.077724 diff w.r.t previous iteration = 0.031917
grado=10 g(x)=0.177014 diff w.r.t previous iteration = 0.099289
grado=11 g(x)=0.389576 diff w.r.t previous iteration = 0.212563
grado=12 g(x)=0.742962 diff w.r.t previous iteration = 0.353386
grado=13 g(x)=1.203652 diff w.r.t previous iteration = 0.460689
grado=14 g(x)=1.614981 diff w.r.t previous iteration = 0.411330
```

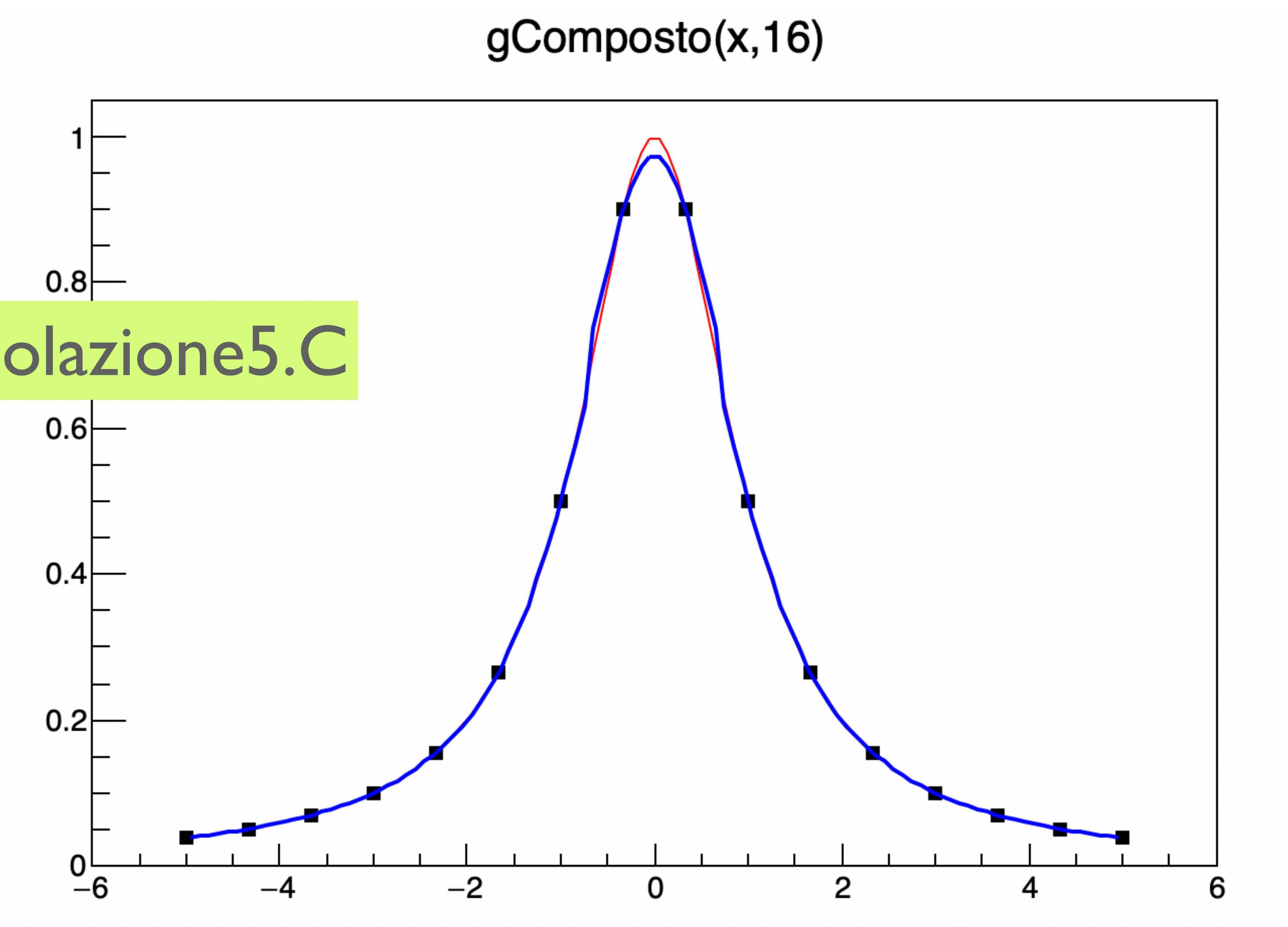
Decresce

Stabile

Cresce

INTERPOLAZIONE MEDIANTE POLINOMI COMPOSTI

- Interpolazione a tratti con polinomio di grado variabile a seconda della regione



Interpolazione5.C

LEZIONE 17-18

INTEGRAZIONE NUMERICA

METODI NUMERICI DI INTEGRAZIONE

- ***Metodi numerici di integrazione***
  - Basati su interpolazione polinomiale

UN CASO IN CUI SI FA USO DI INTERPOLAZIONE

https://www.dm.unibo.it/~montelau/html/Lezione3_MC.pdf
Prof. Laura Montefusco, Univ. Bologna

- ***Metodi numerici di integrazione***
  - Calcolo dell'integrale di ***f(x)*** [funzione integrabile] sull'intervallo [a,b]
  - Spesso tale calcolo risulta complicato e a maggior ragione se f non è conosciuta analiticamente ma solo per punti. Per questi motivi se ne cerca un'approssimazione. *Si sostituisce a f(x) una funzione che l'approssima o l'interpola e che risulta più semplice da integrare*

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

  - Se $\boldsymbol{P_n(x)}$ e' Il polinomio interpolante per f su una griglia di nodi x_i, i=0, … , n allora

$$I(f) \approx I(P_n) = \int_a^b P_n(x)dx$$

INTEGRAZIONE NUMERICA DI FUNZIONI

Se i punti x_i sono scelti equidistanti in [a,b] cioè

$$x_i = a + i \cdot h \quad \text{con} \quad h = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad i=0,..,n$$

allora le formule interpolatorie sono dette di **Newton-Côtes**.

- Usiamo l'interpolazione polinomiale basata sui polinomi di Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \ell_i(x)$$

ove i polinomi $\ell_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$ i=0,…,n sono i **Polinomi di Lagrange** di grado n sui punti di discretizzazione x_i , i=0,…,n.

INTEGRAZIONE NUMERICA DI FUNZIONI

Se i punti x_i sono scelti equidistanti in [a,b] cioè

$$x_i = a + i \cdot h \quad \text{con} \quad h = \frac{b-a}{n} \quad \text{e} \quad i=0,..,n$$

allora le formule interpolatorie sono dette di **Newton-Côtes**.

- Usiamo l'interpolazione polinomiale basata sui polinomi di Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \ell_i(x)$$

ove i polinomi $\boxed{\ell_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)} \qquad i=0,\dots,n}$ $\Rightarrow$ $L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$

grado n sui punti di discretizzazione x_i , i=0,…,n.

INTEGRAZIONE NUMERICA DI FUNZIONI

$$I(P_n) = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot \ell_i(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b \ell_i(x)dx \qquad (4)$$

Il calcolo dell'integrale (4) dipende dagli estremi di integrazione a e b. Per evitare questa dipendenza si effettua un cambio di variabile di integrazione:

Sia $0 < t < n$, per effettuare il cambio di variabile da x a t, poniamo $x = a + h \cdot t$,

Nella nuova variabile t l'espressione dei Polinomi di Lagrange è:

$$\tilde{\ell}_i(t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{(t-k)}{(i-k)}$$

Poiché $dx = h\, dt$, si ottiene dalla (4)

$$I(P_n) = h\cdot \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_0^n \tilde{\ell}_i(t)dt = h\cdot \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\cdot \alpha_i \qquad (5)$$

con $\alpha_i = \int_0^n \tilde{\ell}_i(t)dt$.

Ora l'integrale (5) dipende solo dal grado n del polinomio.

Le formule di Newton-Côtes più comunemente usate sono quelle ottenute per n=1 (Formula dei Trapezi) e per n=2 (Formula di Simpson).

INTEGRAZIONE NUMERICA DI FUNZIONI

Formula dei Trapezi (n = 1)

Se n=1 si ha $h = b - a$ e si hanno 2 soli punti di interpolazione, $x_0=a$ e $x_1=b$. Il polinomio interpolatore è quindi la retta passante per $(a, f(a))$, $(b, f(b))$.

Dalla (5) si ha

$$I(P_1) = h \cdot \left(\alpha_0 \cdot f(x_0) + \alpha_1 \cdot f(x_1)\right).$$

Essendo

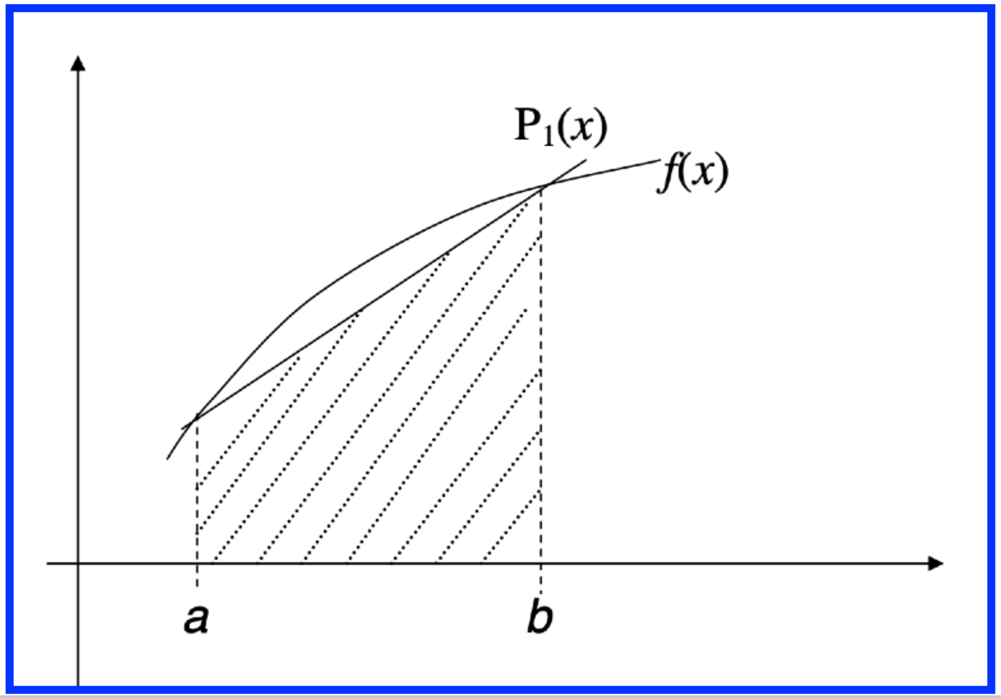
$$\alpha_0 = \int_0^1 \tilde{\ell}_0(t)dt = \int_0^1 \frac{t-1}{0-1}dt = \int_0^1 (1-t)dt = \left[-\frac{t^2}{2} + t\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_1 = \int_0^1 \tilde{\ell}_1(t)dt = \int_0^1 \frac{t-0}{1-0}dt = \int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

si ottiene

$$I(P_1) = \frac{h}{2} \cdot \left(f(x_0) + f(x_1)\right)$$

nota come **Formula dei Trapezi**.



INTEGRAZIONE NUMERICA DI FUNZIONI

Formula di Simpson (n = 2)

Se n=2 si ha $h = \frac{b-a}{2}$ e si hanno 3 punti di interpolazione, $x_0=a$, $x_1=a+h$ e $x_2=b$. Il polinomio interpolatore passante per $(a, f(a))$, $(x_1, f(x_1))$ e $(b, f(b))$ è quindi di secondo grado.

Dalla (5) si ha

$$I(P_1) = h\cdot\left(\alpha_0\cdot f(x_0)+\alpha_1\cdot f(x_1)+\alpha_2\cdot f(x_2)\right).$$

$$\alpha_0 = \int_0^2 \tilde{\ell}_0(t)dt = \int_0^2 \frac{(t-1)(t-2)}{(0-1)(0-2)}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (t^2-3t+2)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+2t\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{8}{3}-\frac{12}{2}+4\right] = \frac{1}{3}$$

$$\alpha_1 = \int_0^2 \tilde{\ell}_1(t)dt = \int_0^2 \frac{t(t-2)}{1(1-2)}dt = -\int_0^2 (t^2-2t)dt = -\left[\frac{t^3}{3}-\frac{2t^2}{2}\right]_0^2 = -\left[\frac{8}{3}-4\right] = \frac{4}{3}$$

si ottiene

$$\alpha_2 = \int_0^2 \tilde{\ell}_2(t)dt = \int_0^2 \frac{t(t-1)}{2(2-1)}dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (t^2-t)dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{8}{3}-\frac{4}{2}\right] = \frac{1}{3}$$

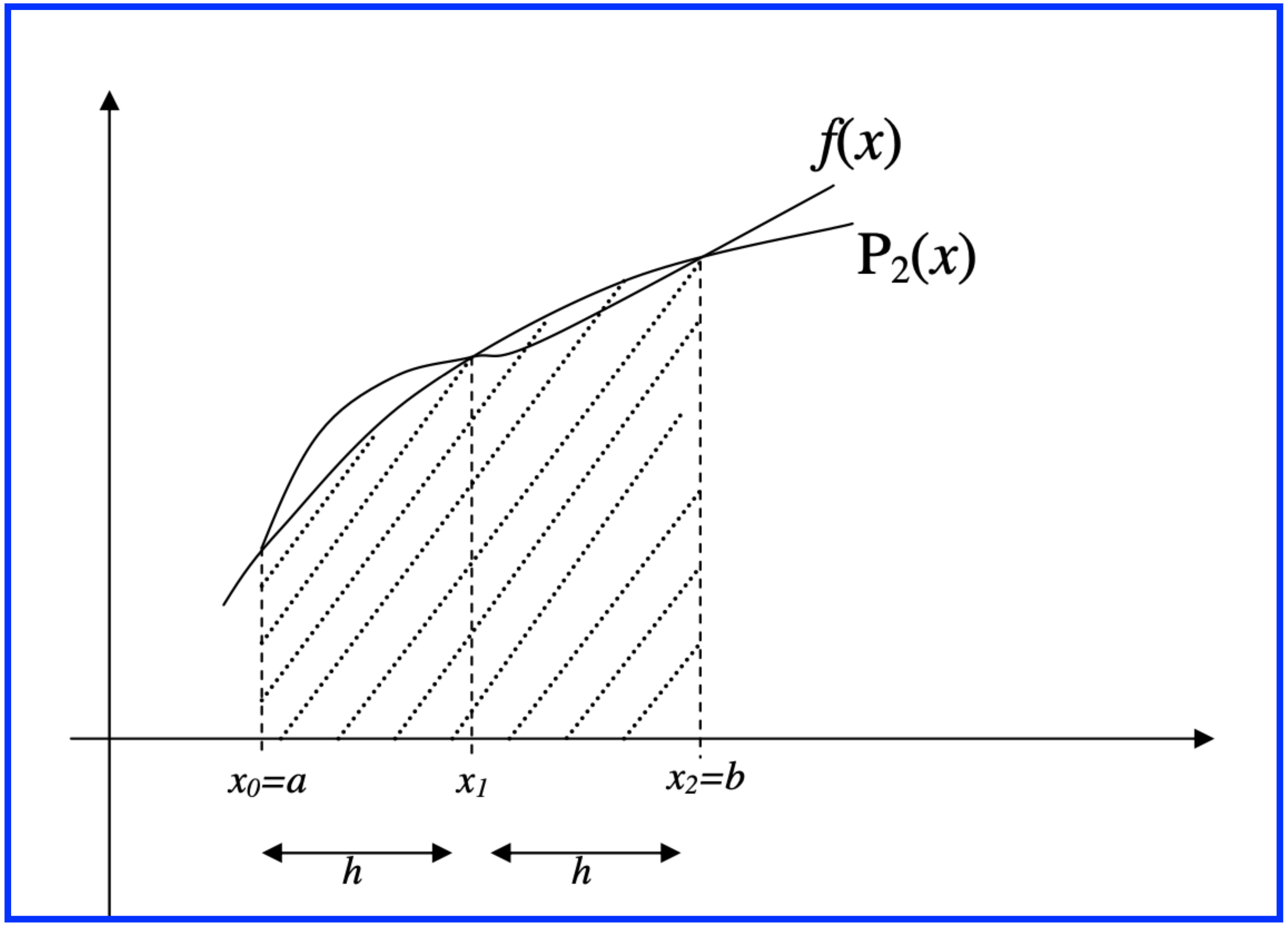
$$I(P_2) = \frac{h}{3}\cdot\left(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right)$$

nota come **Formula di Simpson**.

INTEGRAZIONE NUMERICA DI FUNZIONI

$$I(P_2) = \frac{h}{3}\cdot\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$

Formula di Simpson.



ERRORE DI INTERPOLAZIONE -> INTEGRAZIONE

- In generale

$$r(x) = \pi(x) \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$$

- Caso di passo costante h

$$r(x_0 + ht) = \pi_{n+1}(t) h^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$$

- ***Integrando si ha nel caso di n+1=2 (Trapezi) [nota: b = a+h]***

= -h³/6 (basta calcolare l'integrale, ricordando che b=a+h)

$$\boxed{E_T(f) = \frac{1}{2} f^{(2)}(\eta) \int_a^b (x-a)(x-b)\, dx = -\frac{1}{12} h^3 f^{(2)}(\eta) \quad \eta \in (a,b)}$$

- Nota:
  - E=0 se la derivata seconda e' zero (per funzione lineare);
  - converge come h^3

ERRORE DI INTERPOLAZIONE -> INTEGRAZIONE

- Caso di passo costante h

$$r(x_0 + ht) = \pi_{n+1}(t)h^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}$$

- ***Integrando si ha nel caso di n+1=3 Simpson***

Poiché si ha $\int_a^b \pi(x)dx = \int_a^b (x-a)(x-a-h)(x-a-2h)dx = 0$

La formula dell'errore assume questa forma

$$\boxed{E_S(f) = \frac{1}{4!}f^{(4)}(\eta)\int_a^b \omega_3(x)\,dx = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\eta) \quad \eta \in (a,b)}$$

- NOTA:
  - E=0 se derivata terza o derivata quarta (!) = 0 -> l'approssimazione e' precisa per polinomi di secondo ma anche di terzo grado
  - Converge con h^5

FORMULE DI INTEGRAZIONE COMPOSITE

- gli errori di interpolazione diminuiscono se si ha un numero di nodi elevato e si utilizza un grado del polinomio interpolante basso interpolando a tratti

Tenendo in considerazione che l'errore d'integrazione dipende anche dall'ampiezza dell'intervallo su cui vengono applicate, sono state introdotte le formule di Integrazione Composite. Esse consistono nel suddividere l'intervallo [a,b] in sottointervalli, in generale di uguale ampiezza, $[x_i\ ,\ x_{i+1}]$ con i=0,…,m-1, e su ciascuno di essi applicare una formula di quadratura di grado basso.

Sia $T_i = [x_i\ , x_{i+1}]$ l' i-mo sottointervallo tale che

$$x_i = a + i \cdot H \quad \text{con} \quad H = \frac{b-a}{m} \quad \text{per } i = 0,\dots,m-1$$

Si indichi con I_{n,T_i} l'integrale calcolato sull'intervallo T_i applicando la formula di Newton-Côtes di grado n.

Formule di integrazione composite

La formula di quadratura composita è data dalla somma degli integrali calcolati su tutti gli intervalli T_i.

$$I_{n,m}(f) \approx \sum_{i=0}^{m-1} I_{n,T_i} \; .$$

Al variare di n abbiamo le varie formule composite.

Formula dei Trapezi Composita (n = 1)

Applicando la formula dei trapezi sul sottointervallo T_i si ottiene

$$I_{1,T_i} = \frac{H}{2} \cdot \left(f(x_i) + f(x_{i+1}) \right)$$

Errore sul singolo intervallo

da cui

$$I_{1,m}(f) = \sum_{i=0}^{m-1} I_{1,T_i}(f) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{H}{2} \cdot \left(f(x_i) + f(x_{i+1}) \right) =$$

$$= H\left(\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{m-1}) + \frac{1}{2} f(x_m)\right)$$

Errore sull'integrale

FORMULE DI INTEGRAZIONE COMPOSITE

Formula di Simpson Composita (n = 2)

Si considera l'intervallo [a,b] suddiviso in un numero pari di sottointervalli, cioè m=2k. Sia $T_i = [x_{2i}, x_{2i+2}]$ per i=0,…,m/2-1 l' i-mo sottointervallo; allora la formula di Simpson su tale intervallo è

$$I_{2,T_i} = \frac{H}{3} \cdot \left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \right)$$

Errore sul singolo intervallo

$$I_{2,m}(f) = \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1} I_{2,T_i}(f) = \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1} \frac{H}{3} \cdot \left(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \right) =$$

$$= \frac{H}{3} \left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 4f(x_{m-1}) + f(x_m) \right)$$

Errore sull'integrale

ERRORE NELL'INTEGRAZIONE COMPOSITA

- Formula dei Trapezi composita

$$\boxed{E_1^c(f) = -\frac{1}{12}(b-a)H^2 f^{(2)}(\xi)}$$

- Formula di Simpson composita

$$\boxed{E_2^c(f) = -\frac{1}{180}(b-a)H^4 f^{(4)}(\xi)}$$

- In generale

$$E_n^c(f) = O(H^{n+p})$$

con p=1 se n è dispari e p=2 se n è pari.

ERRORE NELL'INTEGRAZIONE COMPOSITA

- Dimostrazione della formula dell'errore nell'integrazione con la regola dei trapezi composita: in generale

$$E_{n,m} = \sum_{i=0}^{m-1} E_n(T_i)$$

Per n=1 si ha l'errore della formula dei trapezi composita

$$E_1^c(f) = \sum_{i=0}^{m-1} -\frac{1}{12} H^3 f^{(2)}(\xi_i) = -\frac{1}{12} H^3 \sum_{i=0}^{m-1} f^{(2)}(\xi_i) \quad con \quad \xi_i \in T_i$$

Considerando che

$$\min_i f^{(2)}(\xi_i) \leq \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f^{(2)}(\xi_i) \leq \max_i f^{(2)}(\xi_i)$$

ed essendo $f^{(2)}$ continua, allora

$$\exists \quad \xi \in [\min_i \xi_i, \max_i \xi_i] \subset [a,b]$$

tale che $f^{(2)}(\xi) = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f^{(2)}(\xi_i)$.

Ricordando che $H = \frac{b-a}{m}$ si ottiene

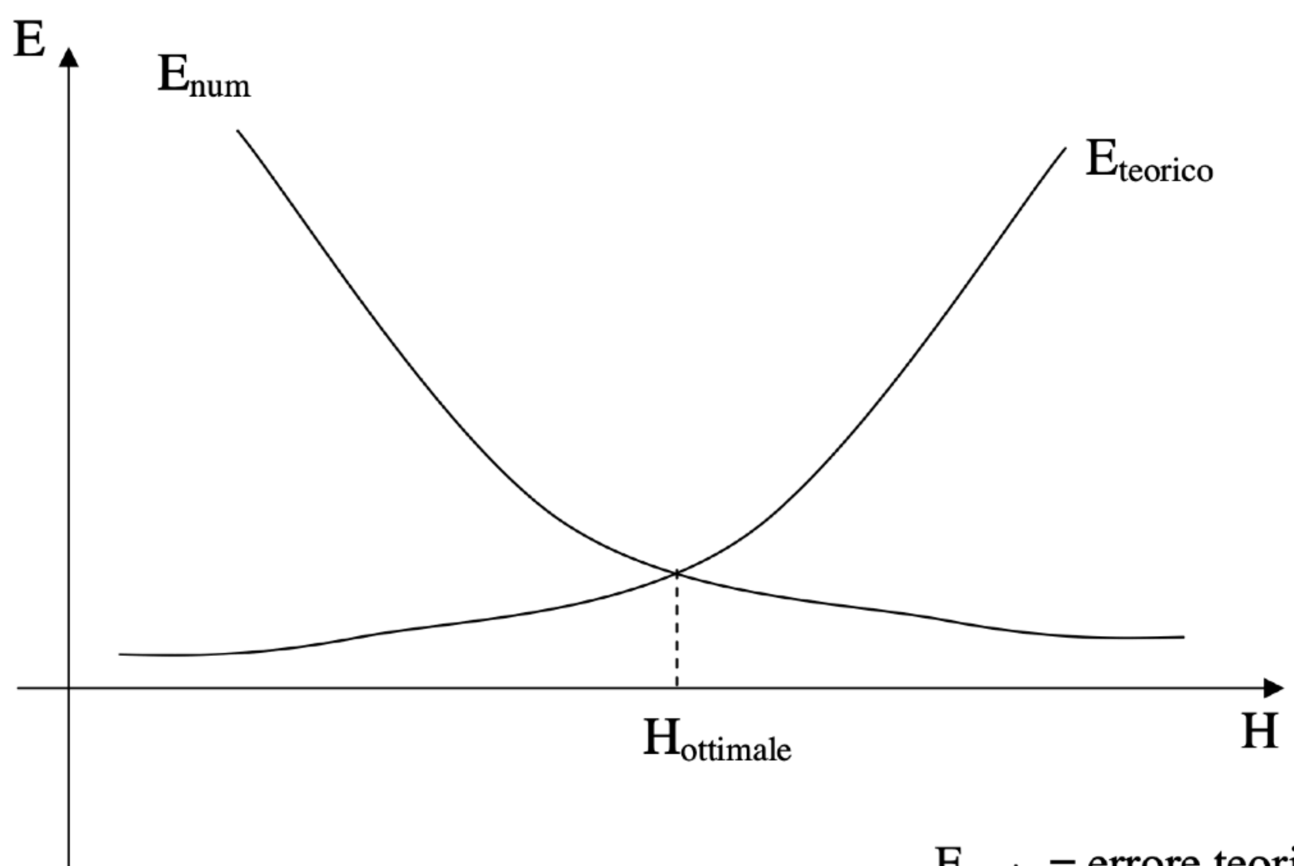
$$\boxed{E_1^c(f) = -\frac{1}{12}(b-a)H^2 f^{(2)}(\xi)}$$

Si procede allo stesso modo per dimostrare la formula dell'errore relativo alla regola di integrazione di Simpson

ERRORE NELL'INTEGRAZIONE COMPOSTA

Più H è piccolo più l'errore teorico diviene insignificante e ci si avvicina all'integrazione esatta. Purtroppo occorre anche considerare gli errori numerici che derivano dal fatto che operiamo con i numeri finiti. Questi errori crescono al crescere del numero delle operazioni e quindi dipendono da H in modo inverso.

Perciò più H è piccolo più il metodo è teoricamente corretto ma i risultati numerici diventano poco attendibili.



$E_{teorico}$= errore teorico del metodo
E_{num} = errore numerico

ARRESTO OTTIMALE NELL'ORDINE DI APPROSSIMAZIONE

Metodo basato sul criterio di Richardson

Diamo qui di seguito un algoritmo di integrazione con arresto automatico quando si raggiunge una precisione prefissata.

Il metodo consiste nell'applicare le formule di Newton-Côtes composite suddividendo l'intervallo [a,b] iterativamente a metà fino ad ottenere l'H ottimo.

Al passo k si ha

$$H_k = \frac{b-a}{2^k}$$

e, al passo k+1, si pone, $H_{k+1} = \dfrac{H_k}{2}$.

Al generico passo k si valuta l'integrale utilizzando l'intervallo H_k e una formula di Newton-Côtes composita di grado n.

Si avrà

$$I_k(P_n) = I(f) - O(H_k^{n+p})$$

dove p=1 se n è dispari, p=2 se n è pari.

ARRESTO OTTIMALE NELL'ORDINE DI APPROSSIMAZIONE

Al passo *k+1* si utilizza l'intervallo H_{k+1} e si ottiene

Perche' $H_{k+1} = H_k/2$ quindi $H_{k+1}^{n+p} = H_k/2^{n+p}$

$$I_{k+1}(P_n) = I(f) - O(H_{k+1}^{n+p}) = I(f) - \frac{1}{2^{n+p}} O(H_k^{n+p})$$

Sottraendo da questa eq. quella per $I_k(P_n)$

$$I_{k+1}(P_n) - I_k(P_n) = \frac{2^{n+p} - 1}{2^{n+p}} O(H_k^{n+p})$$

Essendo $O(H_k^{n+p}) \cong E_{n,k}$ si ha

$$E_{n,k} \cong \frac{2^{n+p}}{2^{n+p} - 1} \left(I_{k+1}(P_n) - I_k(P_n) \right)$$

Se $E_{n,k}$ è dell'ordine della tolleranza prefissata allora si è trovato il passo ideale ed è quindi possibile arrestare il procedimento iterativo, altrimenti si deve continuare a dividere H a metà e riapplicare il procedimento.

```
double cintRett(float a, float b, int N) {
        double h, integ, x;
        h = (b-a)/N;
        //metodo dei rettangoli
        integ=0;
        for(x=a; x<b-h/4.; x+=h)
        {
        integ+=funz(x);
        }
        integ*=h;
        return integ;
}
double cintRettPM(float a, float b, int N) {
        double h, integ, x;
        h = (b-a)/N;
        //metodo dei punti medi
        integ=0;
        for(x=a+h/2; x<b-h/4.; x+=h)
        {
        integ+=funz(x);
        }
        integ*=h;
        return integ;
}
double cintTrap(float a, float b, int N) {
        double h, integ, x;
        h = (b-a)/N;
        //metodo dei trapezi
        integ=(funz(a)+funz(b))/2 ;
        for(x=a+h; x<b-h/4.; x+=h)
        {
        integ+=funz(x);
        }
        integ*=h;
        return integ;
}
```

- **confrontaInt.C**

$$f(x) = 100 - 4x^2 + x\,e^x$$

```
double cintSim(float a, float b, int N) {
        double h, integ, x;
        h = (b-a)/N;
        //metodo di Cavalieri-Simpson
        float y[10000];
        int i=0;
        //for(x=a; !(x>b); x+=h)
        for(x=a; x<b+h/4.; x+=h)
        {
                y[i]=funz(x);
                i++;
        }
        integ=0;
        for(int j=1; j<i-1; j+=2)
        {
          if (j+1 > i-1)
            {
              std::cout<<" a problem here ..... "<<std::endl;
            }
          integ+=y[j-1]+4*y[j]+y[j+1];
        }
        integ*=h/3;
        return integ;
}
```

confrontaInt.C

- Esempio

$$f(x) = 100 - 4x^2 + x\,e^x$$