
METODI STATISTICI E COMPUTAZIONALI

Stefania Spagnolo

Dipartimento di Matematica e Fisica, Univ. del Salento



LEZIONE 12

INTERVALLI DI CONFIDENZA

e limiti inferiori o superiori

[Dispense B. Chiandotto \(Università di Firenze\) Cap 4](#)
[Particle Data Book \(Statistics\)](#)

Finora

Se dispongo di un insieme (campione) di n misure x_i della grandezza fisica μ , quale è la miglior stima ($\hat{\mu}$) di μ ?

METODO DELLA MASSIMA VEROSIMIGLIANZA per stimare i parametri di una popolazione non nota a partire da un campione

Stimati valori
puntuali

INTERVALLI DI CONFIDENZA

- La stima dei parametri di una popolazione non nota a partire da un campione vista in precedenza è una **stima puntuale**. Si cerca, cioè, il miglior valore che mi approssima il parametro incognito.

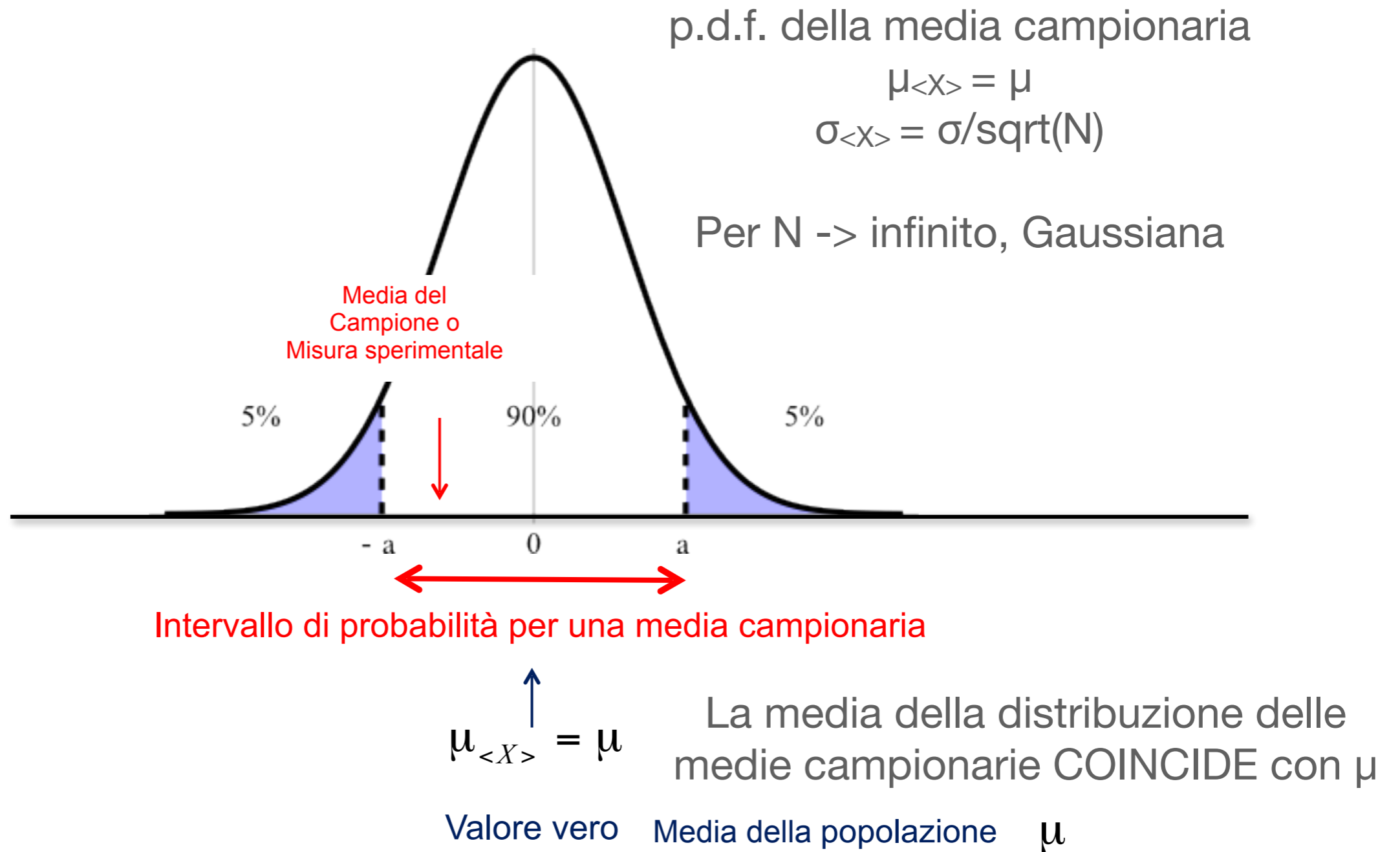


- Oltre alla stima puntuale esiste un altro metodo di stima è la stima per intervallo.
- Scopo di questo metodo di stima è identificare un **intervallo** [denominato **di confidenza**] all'interno del quale con una certa probabilità sia presente il valore vero della popolazione.
- Normalmente si dispone di un solo campione di dati estratto da una popolazione e non si ha la possibilità di estrarne altri. Come faccio ad individuare una regione che con una certa confidenza (o fiducia) contenga il valore vero del parametro della popolazione?

INTERVALLI DI CONFIDENZA

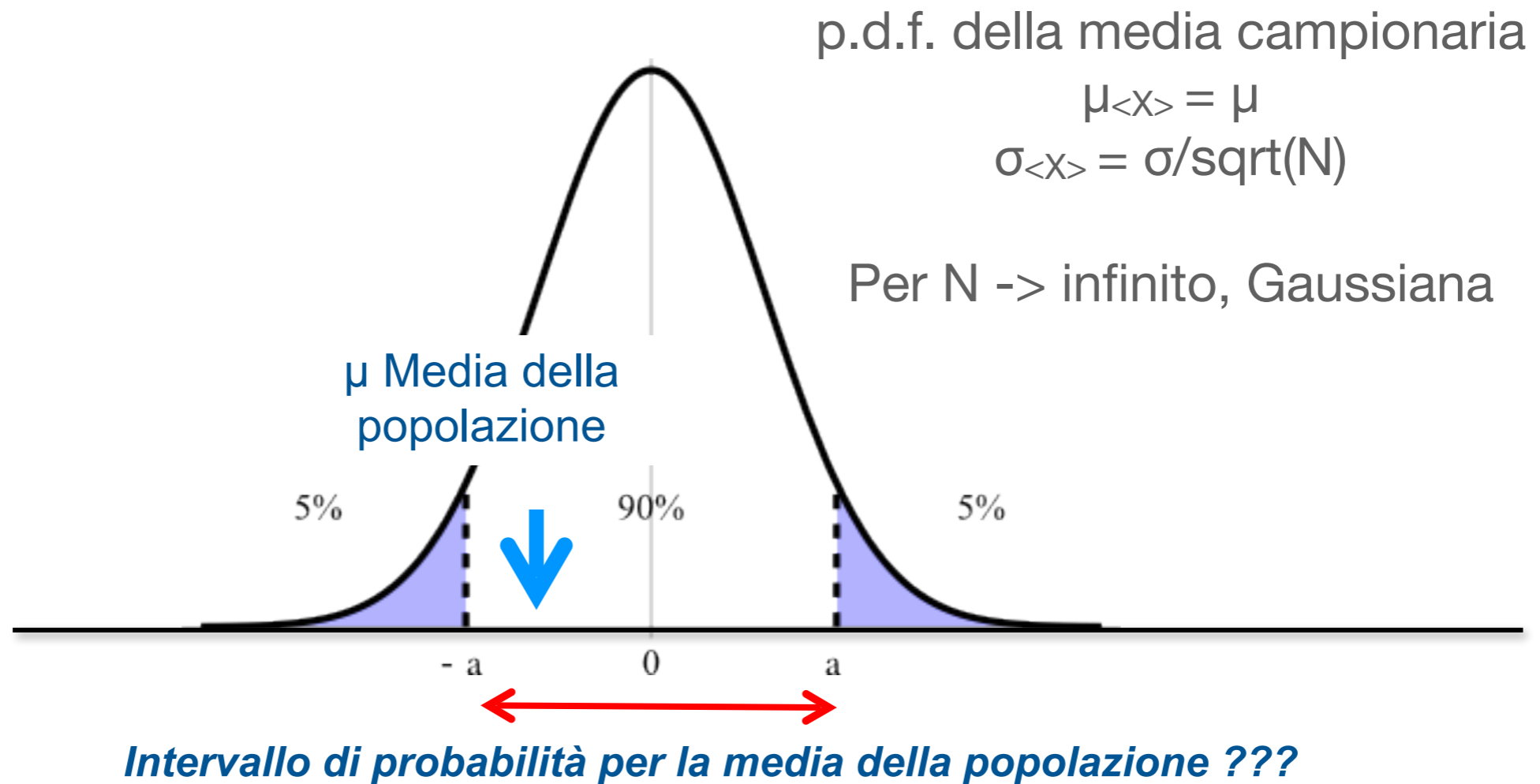
- Utilizzo ancora la teoria dei campioni e risultati già ottenuti:
 - se si estraggono campioni casuali di ampiezza n da una popolazione con media μ e varianza σ^2 , la media campionaria così ottenuta avrà media pari a:
 - $\mu_{\langle X \rangle} = \mu$
 - In base al teorema del limite centrale possiamo però affermare che per n grandi la distribuzione della variabile aleatoria media campionaria tende ad una distribuzione gaussiana con media proprio uguale alla media della popolazione e standard deviation pari all'errore standard definito come:
 - $\sigma_{\langle X \rangle} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

INTERVALLI DI CONFIDENZA



INTERVALLI DI CONFIDENZA

Invertiamo il problema



$\langle X \rangle =$ miglior stima di $\mu_{\langle X \rangle}$

Media del campione o misura sperimentale

INTERVALLI DI CONFIDENZA

- Dalla teoria dei campioni (stimatori e loro distribuzioni di probabilità)
 - Supponiamo di avere un campione estratto da una popolazione che segue una legge di distribuzione normale e di calcolarne la media $\langle X \rangle$ e supponiamo di conoscere la varianza σ^2 della popolazione da cui il campione è estratto
 - la variabile standardizzata

$$Z = \frac{\langle X \rangle - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

- e' una variabile aleatoria che segue una distribuzione normale con varianza 1
- ***Posso ricorrere alla variabile standardizzata per stimare l'intervallo di confidenza entro il quale mi aspetto di trovare il valore vero ????***

INTERVALLI DI CONFIDENZA

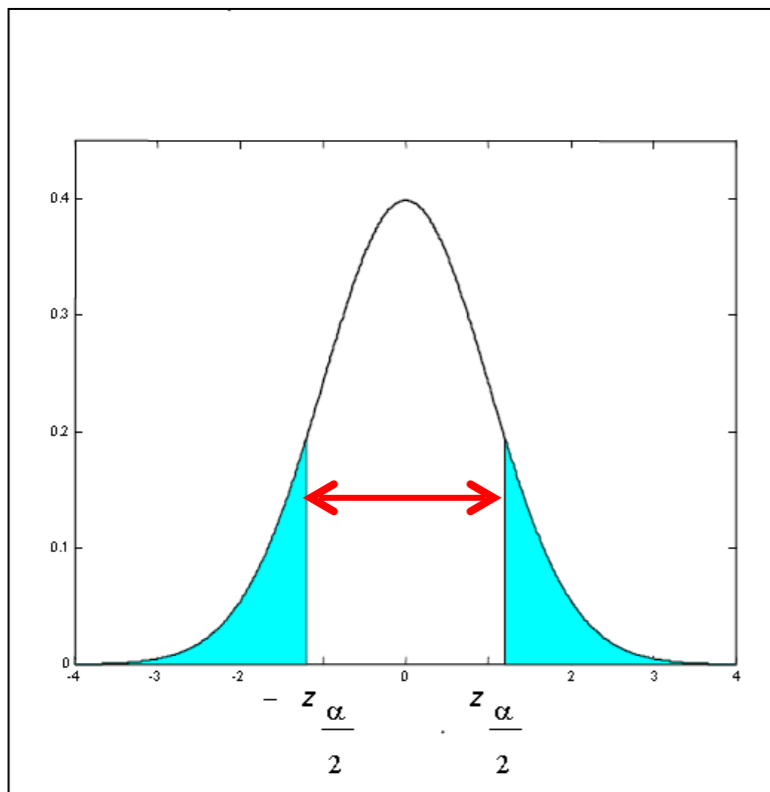
Dire che voglio che il mio valore vero μ sia contenuto con una certa **confidenza** $(1-\alpha)$ in prossimità del mio valore misurato $\langle X \rangle$ equivale a dire che la variabile Z sia prossima allo zero con la stessa confidenza (probabilità). Cioè

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

$1-\alpha$ mi rappresenta il livello di confidenza richiesto

Quindi i valori

$$\left(-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$



Intervallo di confidenza

identificano una regione entro la quale Z si trova con probabilità $1-\alpha$

$$-z_{\frac{\alpha}{2}} < \frac{\langle X \rangle - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\langle X \rangle - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \langle X \rangle + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

INTERVALLI DI CONFIDENZA

■ Esempio:

- Ipotizziamo che la variabile aleatoria X rappresenti una certa popolazione con varianza $\sigma^2 = 25$. Supponendo di estrarre un campione di 100 elementi di calcolarne la media e di ottenere 5.4.
- Costruiamo l'intervallo di confidenza al 90% per la media μ della popolazione, ossia:
 - identifico la regione che contiene il 90% della distribuzione per una distribuzione normale unitaria \Rightarrow 90% $\rightarrow z(\alpha/2) = 1.65$

$$P\left(-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \int_{-z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x)^2}{2}} = 0.9 \quad z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.65$$

- Affermo che la variabile standardizzata (Z) appartiene a quella regione
 - $Z = (5.4 - \mu) / \sigma / \text{sqrt}(100) = (5.4 - \mu) / (5/10)$ appartiene a $[-1.65, 1.65]$ al 90% di C.L.
- Ricavo gli estremi dell'intervallo di confidenza per μ

$$5.4 - 1.65 \cdot 0.5 < \mu < 5.4 + 1.65 \cdot 0.5$$

$$4.575 < \mu < 6.225$$

Al 90% di C.L.

INTERVALLI DI CONFIDENZA

Esempio.

Le misure del peso in Kg di 10 studenti maschi del primo anno di università sono:

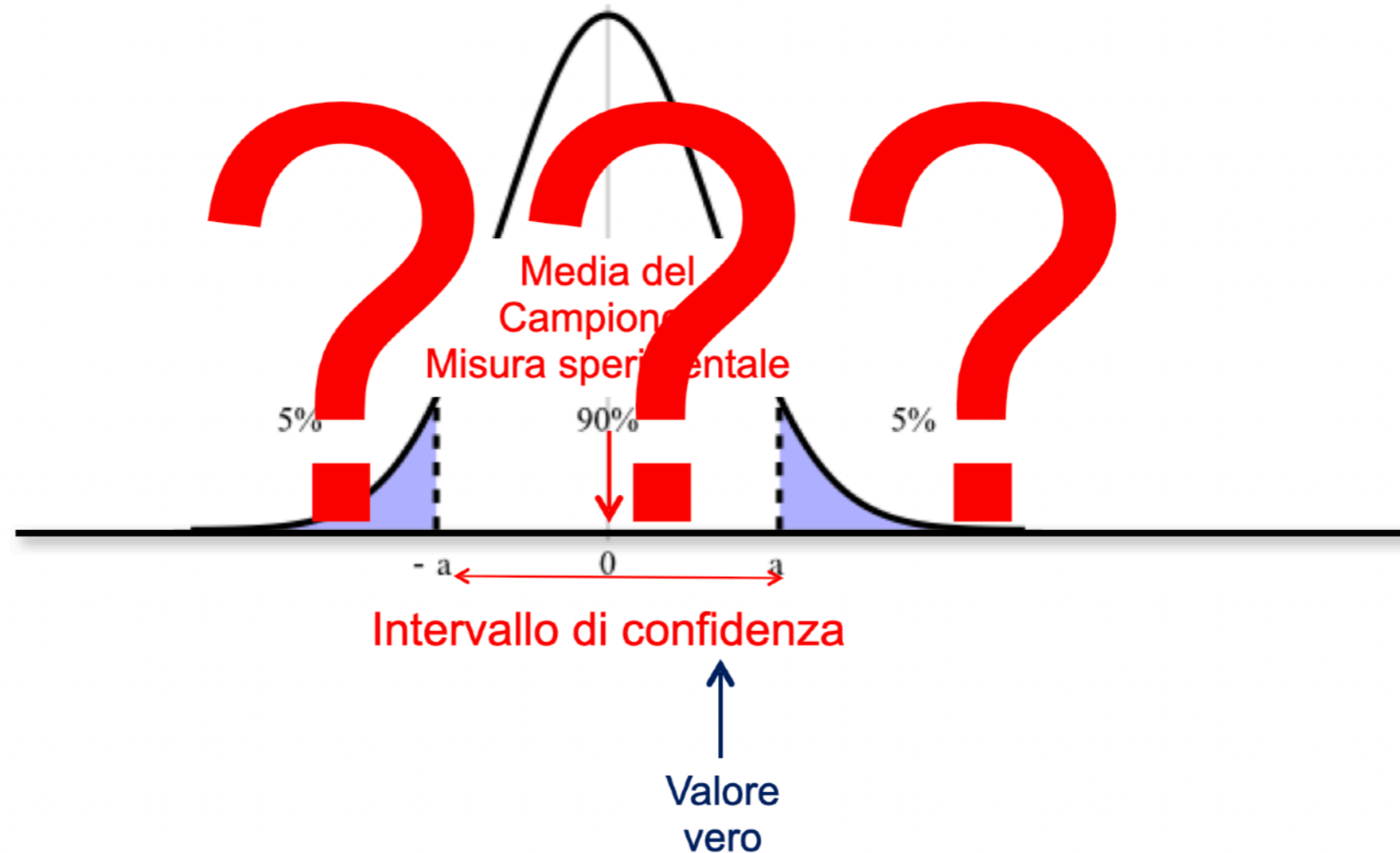
60, 63, 60, 68, 70, 72, 65, 61, 69, 67.

Trovare l'intervallo di confidenza con grado di fiducia pari al 90% della peso della popolazione studentesca maschile del primo anno.

In questo caso non conosco la varianza della popolazione e il mio campione è limitato. Per la stima è più corretta una distribuzione t di Student

$$T = \frac{\langle X \rangle - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

INTERVALLI DI CONFIDENZA



Notate che la distribuzione di probabilità è centrata intorno al valore sperimentale o stima del campione e non nel valore vero.
IL PASSAGGIO CONCETTUALE E' LEGITTIMO ?

E' utile introdurre la variabile aleatoria **media campionaria standardizzata**

$$Z = \frac{\langle X \rangle - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

La densità di probabilità della variabile Z sarà normale (media 0, varianza 1) se la popolazione di partenza segue una distribuzione di probabilità normale.

Nel caso in cui la popolazione iniziale non segua una distribuzione normale la Z per n grandi tenderà a una distribuzione normale.

Questo è una conseguenza del teorema del Limite Centrale.

Z mi permette di rispondere alla domanda

Come faccio a valutare con che probabilità, dato un campione di dimensione nota n , la sua media si possa discostare dalla media della popolazione?

Come faccio a valutare con che probabilità, dato un campione di dimensione nota n , la sua media si possa discostare dalla media della popolazione?

Si dimostra che se la popolazione segue una distribuzione normale allora la variabile

$$T = \frac{\langle X \rangle - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

È una variabile aleatoria che segue la distribuzione di probabilità detta: t di Student.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}$$

Dove la funzioni gamma sono definite come

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx$$

E ν (unico parametro) è detto numero di gradi di libertà e vale (nel nostro caso)

$$\nu = n - 1$$

INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN

Introduciamo ora una definizione più generale di intervallo di fiducia

Limitiamoci al caso di un parametro incognito (μ) e una sola grandezza misurata (x). Data la grandezza misurata vogliamo stimare (inferire) il parametro incognito.

La p.d.f. del processo sarà una $f(x, \mu)$.
Facciamo l'esempio gaussiano in cui assumiamo di conoscere con esattezza la varianza della p.d.f. e che questa sia uguale a 1.

Dato un certo valore vero μ scriverei che:

$$f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$


Jerzy Neyman (16 aprile 1894 – 5 agosto 1981)
statistico polacco.

INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN

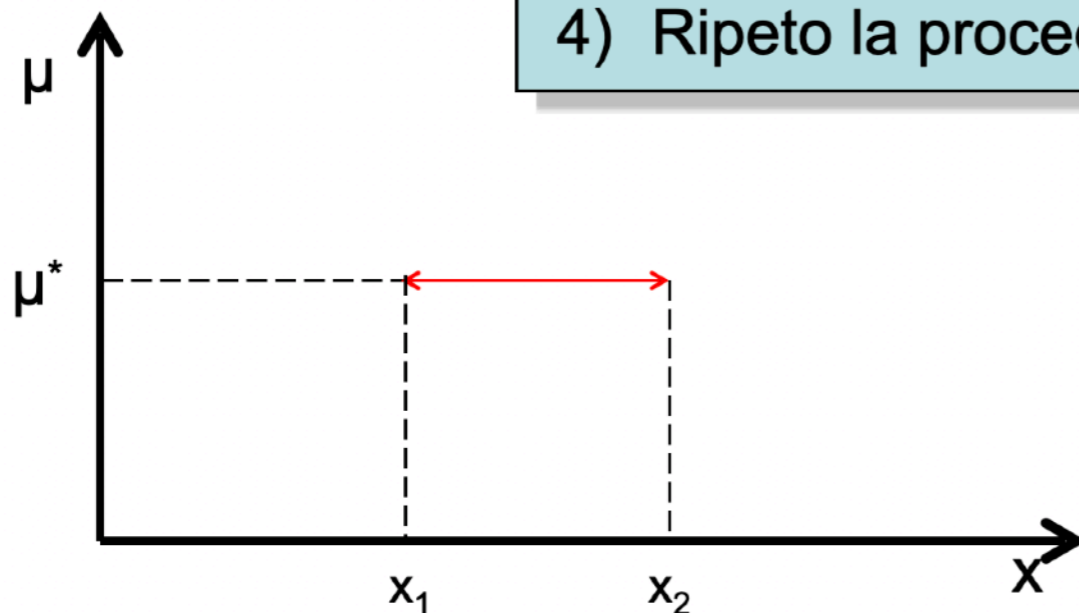
La tecnica di Neyman consiste nell'individuare nel piano μ, x la regione che identifica per ogni μ i valori che la x può assumere affinché si trovi intorno a μ con probabilità $1-\alpha$

Operativamente:

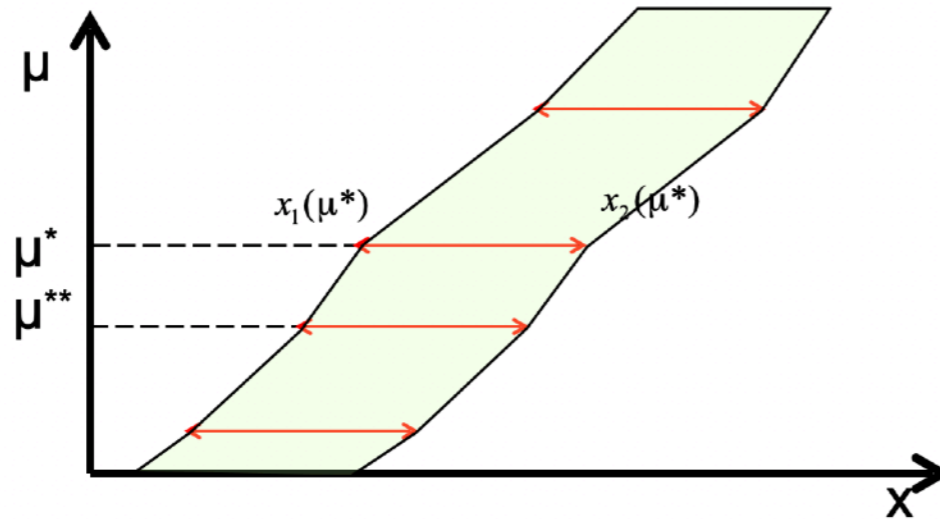
- 1) Prendo un valore di $\mu = \mu^*$
- 2) Determino gli estremi x_1 e x_2 tali che:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, \mu^*) dx = 1-\alpha$$

- 3) Traccio una "linea" nel mio piano da (x_1, μ^*) a (x_2, μ^*)
- 4) Ripeto la procedura per ogni μ .



INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN

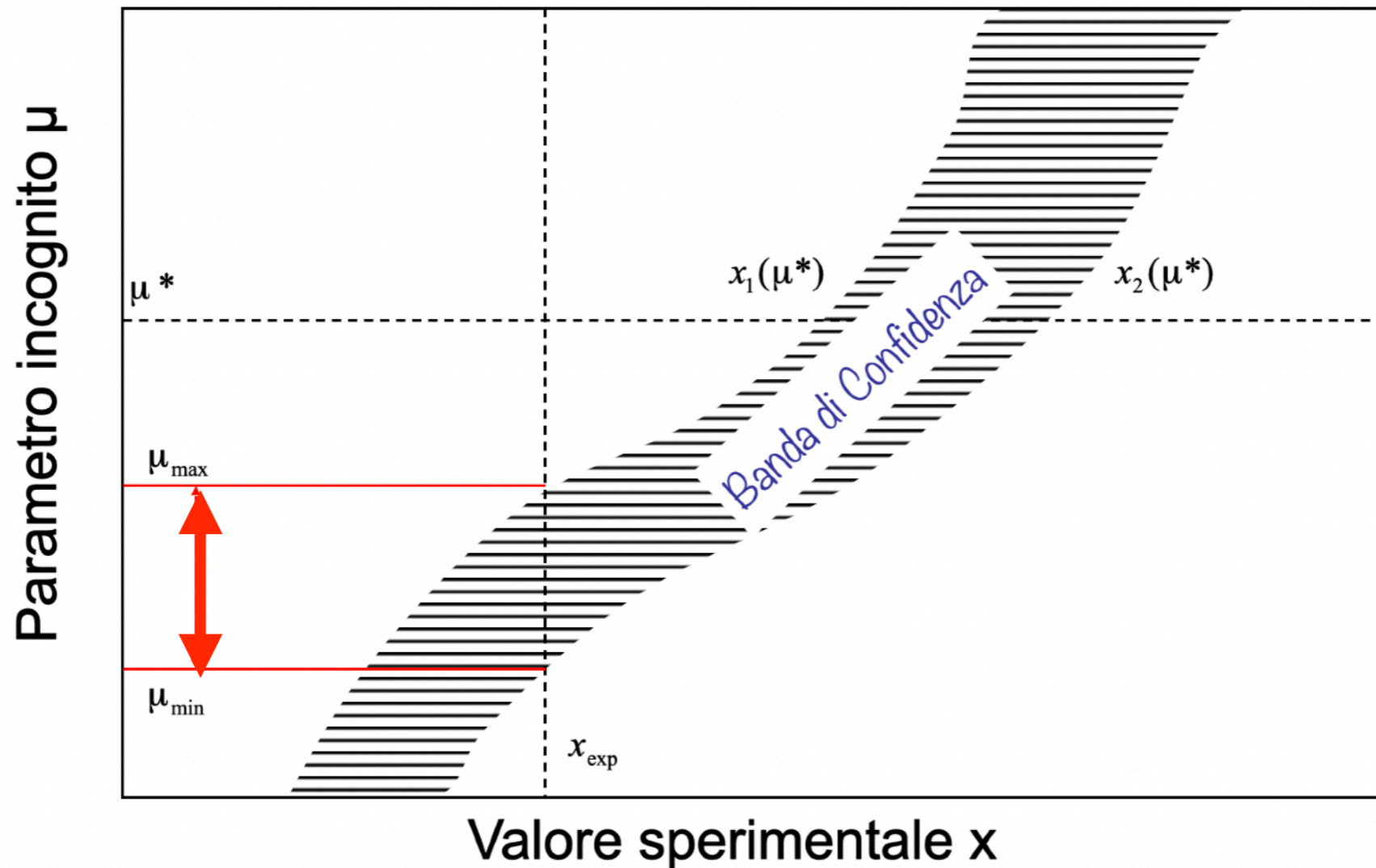


In questo modo costruisco nel piano μ, x una "banda di confidenza" costituita dalla ricopertura del piano con tutte le "linee" tracciate nella procedura. Gli estremi della banda sono dati dai quantili:

$$\int_{-\infty}^{x_1(\mu)} f(x, \mu) dx = \frac{\alpha}{2}$$

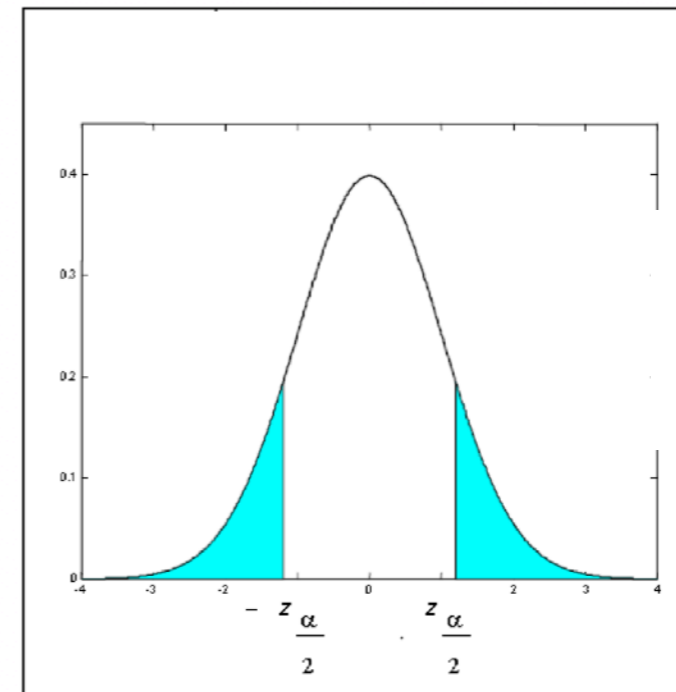
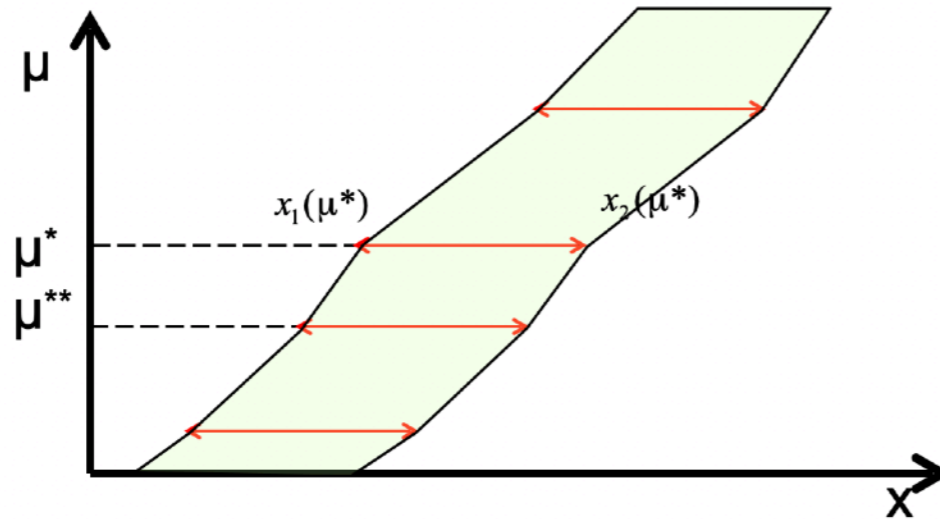
$$\int_{x_2(\mu)}^{+\infty} f(x, \mu) dx = 1 - \int_{-\infty}^{x_2(\mu)} f(x, \mu) dx = \frac{\alpha}{2}; \quad \int_{-\infty}^{x_2(\mu)} f(x, \mu) dx = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Dove $1-\alpha$ è il livello di fiducia voluto.



5) Dato un valore sperimentale misurato x_{exp} si traccia la linea verticale passante per questo valore e si identificano i due estremi della banda di confidenza che identificano l'intervallo di confidenza con fiducia $1-\alpha$

INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN



Nel caso di pdf gaussiana

In questo modo costruisco nel piano μ, x una "banda di confidenza" costituita dalla ricopertura del piano con tutte le "linee" tracciate nella procedura. Gli estremi della banda sono dati dai quantili:

$$\int_{-\infty}^{x_1(\mu)} f(x, \mu) dx = \frac{\alpha}{2}$$

$$\int_{x_2(\mu)}^{+\infty} f(x, \mu) dx = 1 - \int_{-\infty}^{x_2(\mu)} f(x, \mu) dx = \frac{\alpha}{2}; \quad \int_{-\infty}^{x_2(\mu)} f(x, \mu) dx = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

Dove $1-\alpha$ è il livello di fiducia voluto.

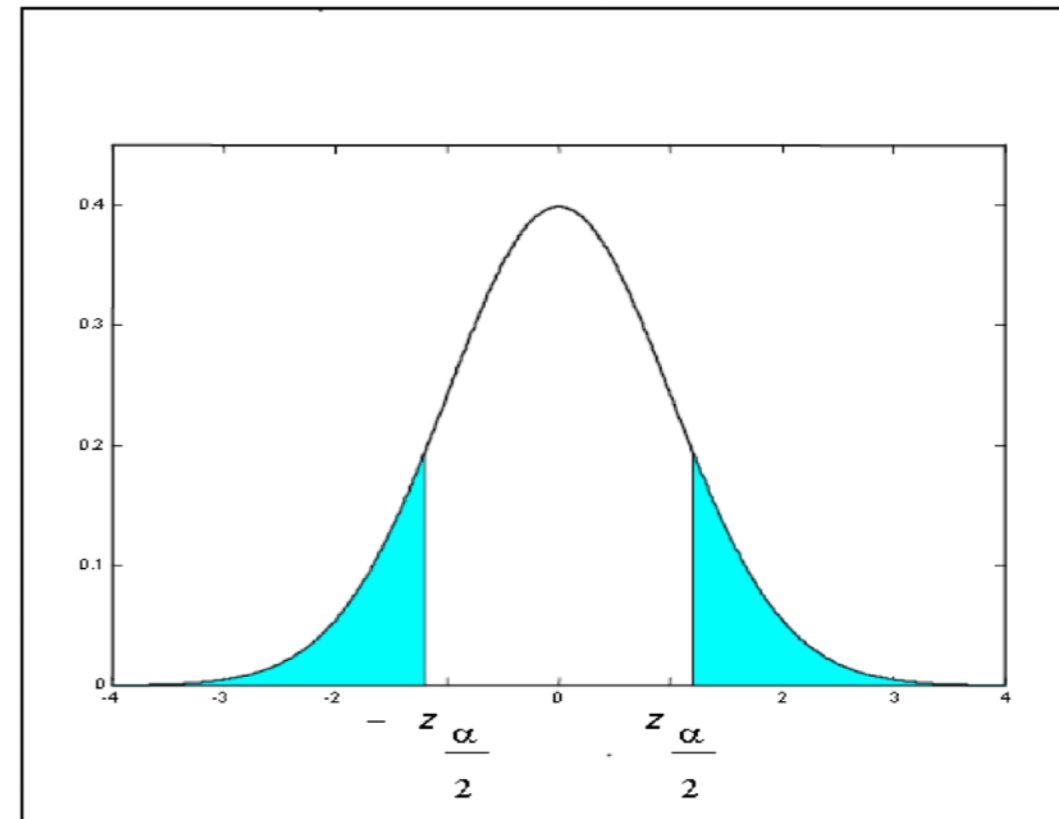
INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN

Esempio:

consideriamo una popolazione con p.d.f. gaussiana
In questo caso i quantili x_1 e x_2 che identificano gli estremi della banda di confidenza sono facilmente calcolabili.

$$\int_{-\infty}^{x_1(\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow x_1(\mu) = \mu - N(\alpha)\sigma$$

$$\int_{-\infty}^{x_2(\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow x_2(\mu) = \mu + N(\alpha)\sigma$$



Dove il “numero di sigma” ($N(\alpha)$) dipende dalla scelta di α .

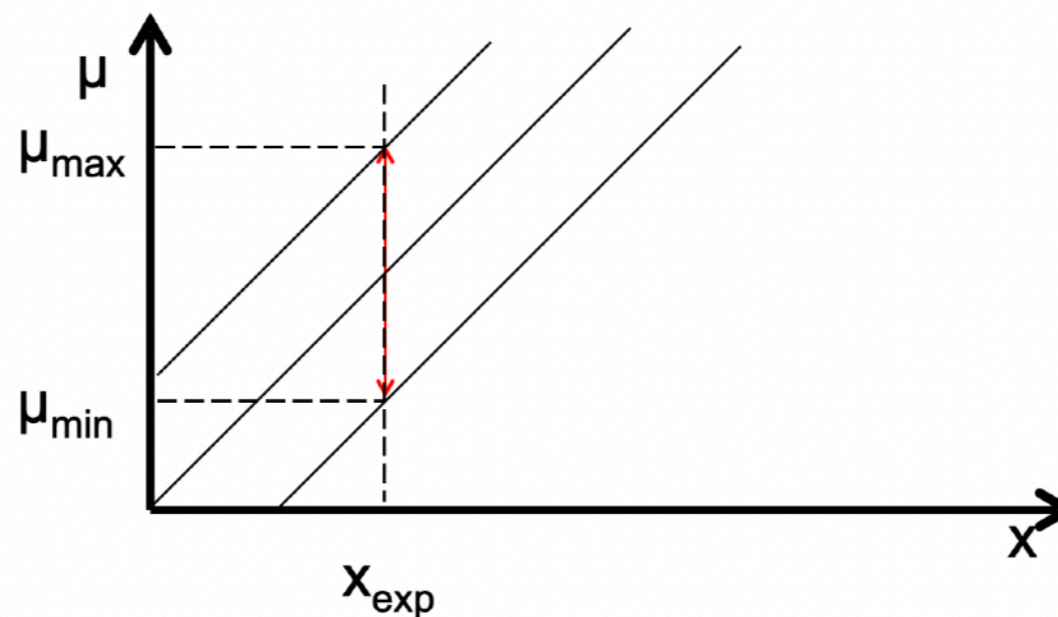
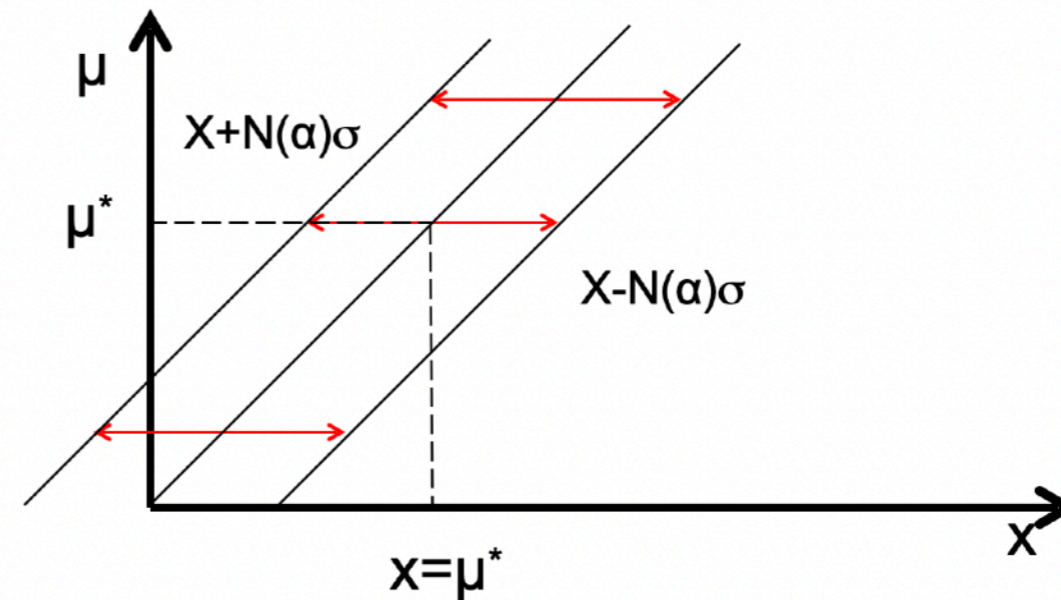
INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN

La banda di confidenza consiste in due rette parallele equidistanti dalla retta bisettrice $\mu=x$ e l'intervallo di confidenza si calcola facilmente

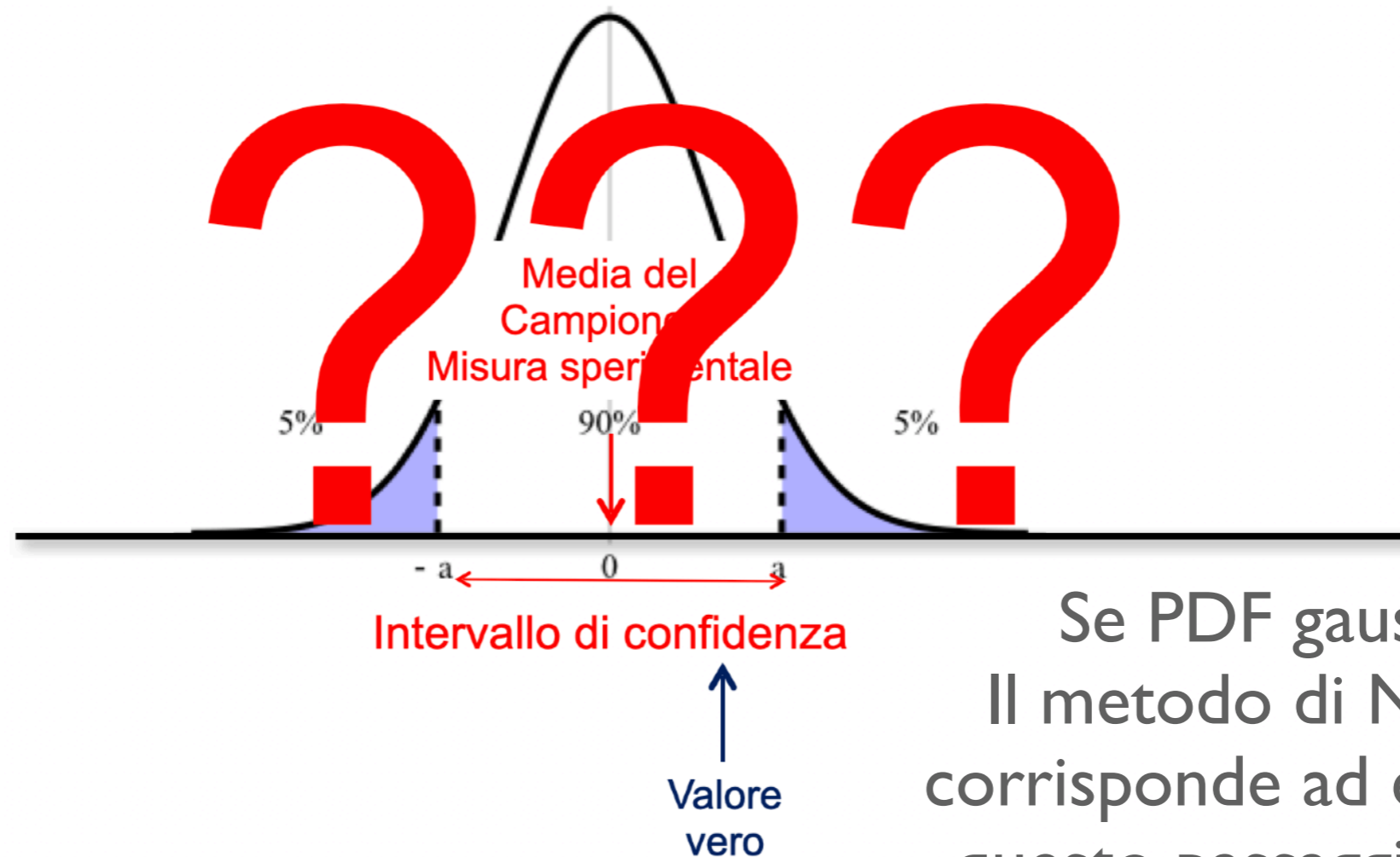
$$x_1 = \mu - N(\alpha)\sigma$$

$$x_2 = \mu + N(\alpha)\sigma$$

$$\begin{cases} \mu_{\max} = x_{\text{exp}} - N(\alpha)\sigma \\ \mu_{\min} = x_{\text{exp}} + N(\alpha)\sigma \end{cases} \Rightarrow x_{\text{exp}} - N(\alpha)\sigma < \mu < x_{\text{exp}} + N(\alpha)\sigma$$



INTERVALLI DI CONFIDENZA



Se PDF gaussian,
Il metodo di Neyman
corrisponde ad effettuare
questo passaggio logico

Notate che la distribuzione di probabilità è centrata intorno al
valore sperimentale o stima del campione e non nel valore vero.
IL PASSAGGIO CONCETTUALE E' LEGITTIMO ?

INTERVALLI DI CONFIDENZA

- Nel caso in cui non si conosce la varianza della distribuzione gaussiana si procede nello stesso modo usando una t di Student. Anche in questo caso si ottiene una banda di confidenza delimitata da due rette e il calcolo dell'intervallo di confidenza segue la stessa logica.

PROBABILITA' GAUSSIANA NORMALE

<https://www.math.arizona.edu/~jwatkins/normal-table.pdf>

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

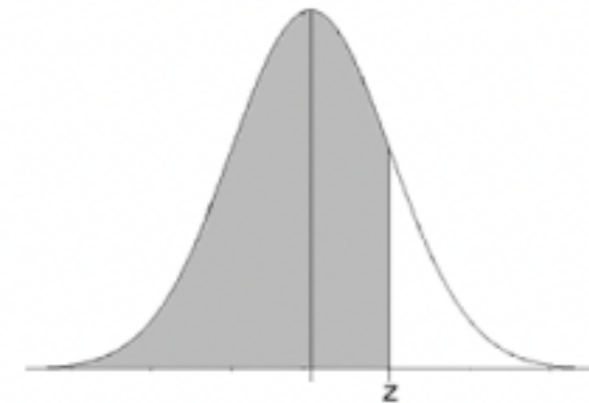




PROBABILITA' GAUSSIANA NORMALE

<https://www.math.arizona.edu/~jwatkins/normal-table.pdf>

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998



INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN

Oltre il paradigma gaussiano

Esempio: supponiamo che la $f(x, \mu)$ sia una distribuzione esponenziale di cui μ sia il parametro.

$$f(x, \mu) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} \quad \text{definita } [0, \infty)$$

Supponiamo di avere un'unica misura sperimentale x_{exp} e da questa vogliamo identificare un intervallo di confidenza all'interno del quale cada μ al 68%.

Nella distribuzione esponenziale la varianza è pari a μ^2

Avendo una sola misura la miglior stima di μ che possiamo fare è $\mu = x_{\text{exp}}$ dato che μ coincide con la media (o valore di aspettazione) dell'esponenziale. In questo esempio la media delle misure coincide con il valore dell'unica misura.

Utilizzando l'approccio che non tenga conto della costruzione dell'intervallo di confidenza della tecnica di Neyman avrei concluso che al 68%

$$x_{\text{exp}} - x_{\text{exp}} < \mu < x_{\text{exp}} + x_{\text{exp}}$$

(valore +/- una sigma)

INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN

Oltre il paradigma gaussiano

Calcoliamo, invece, l'intervallo di confidenza con la tecnica di Neyman.

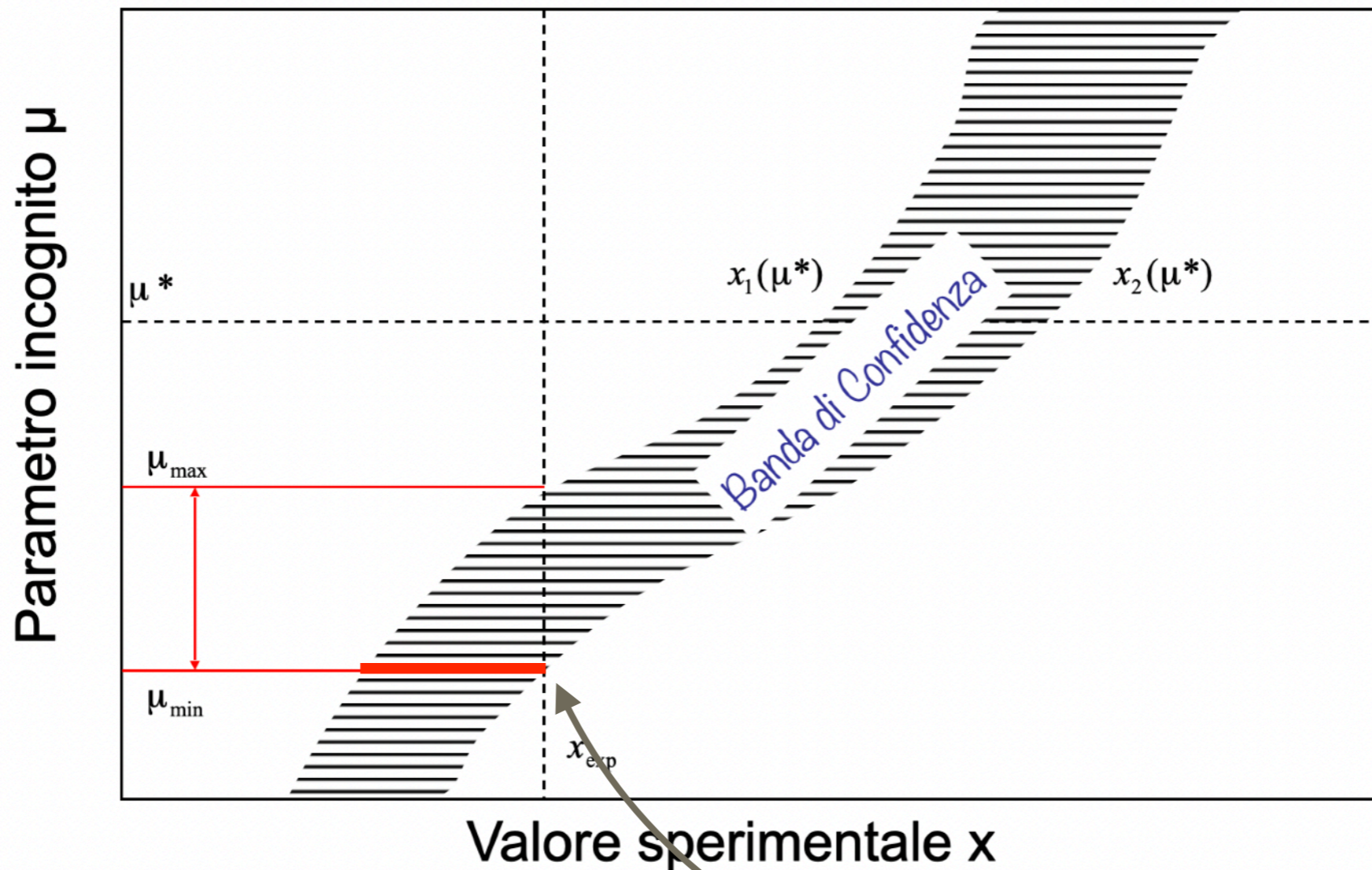
Per un
certo
valore di μ

$$\int_0^{x_1(\mu)} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} dx = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 1 - e^{-\frac{x_1(\mu)}{\mu}} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow x_1(\mu) = -\mu \ln\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)$$

$$\int_0^{x_2(\mu)} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} dx = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 1 - e^{-\frac{x_2(\mu)}{\mu}} = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow x_2(\mu) = -\mu \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Individuo gli estremi
dell'intervallo di
confidenza per x

INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN

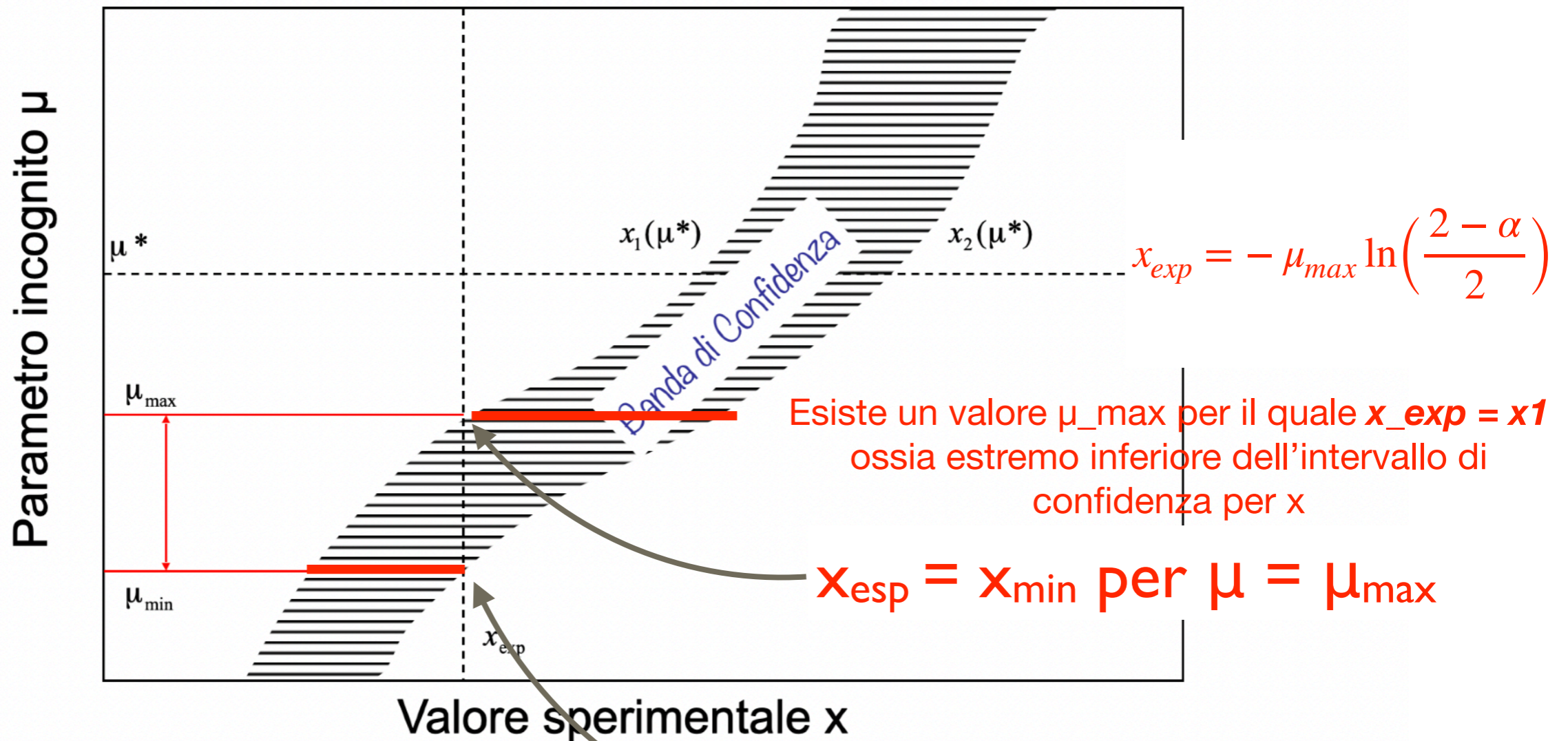


Esiste un valore μ_{\min} per il quale $x_{\exp} = x_2$
ossia estremo superiore dell'intervallo di
confidenza per x

$$x_{\exp} = x_{\max} \text{ per } \mu = \mu_{\min}$$

$$x_{\exp} = -\mu_{\min} \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN



Esiste un valore μ_{max} per il quale $x_{exp} = x_1$ ossia estremo inferiore dell'intervallo di confidenza per x

$x_{exp} = x_{min}$ per $\mu = \mu_{max}$

Esiste un valore μ_{min} per il quale $x_{exp} = x_2$ ossia estremo superiore dell'intervallo di confidenza per x

$x_{exp} = x_{max}$ per $\mu = \mu_{min}$

$$x_{exp} = -\mu_{min} \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN

Oltre il paradigma gaussiano

Calcoliamo, invece, l'intervallo di confidenza con la tecnica di Neyman.

$$\int_0^{x_1(\mu)} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} dx = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 1 - e^{-\frac{x_1(\mu)}{\mu}} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow x_1(\mu) = -\mu \ln\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)$$

$$\int_0^{x_2(\mu)} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} dx = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow 1 - e^{-\frac{x_2(\mu)}{\mu}} = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow x_2(\mu) = -\mu \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Esiste un valore μ_{max} per il quale $x_{exp} = x_1$ ossia estremo inferiore dell'intervallo di confidenza per x

Esiste un valore μ_{min} per il quale $x_{exp} = x_2$ ossia estremo superiore dell'intervallo di confidenza per x

$$x_{exp} = -\mu_{max} \ln\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)$$

$$x_{exp} = -\mu_{min} \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Quindi

$$-\frac{x_{exp}}{\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)} < \mu < -\frac{x_{exp}}{\ln\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)} \Rightarrow -\frac{x_{exp}}{\ln(0.16)} < \mu < -\frac{x_{exp}}{\ln(0.84)} \implies 0.55 x_{exp} < \mu < 5.75 x_{exp}$$

Dove si è posto $\alpha=1-0.68$. Si noti che l'intervallo ottenuto NON è simmetrico intorno a x_{exp} che continua ad essere il valore di aspettazione di μ

INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN

Oltre il paradigma gaussiano

- Calcoliamo l'intervallo di confidenza con la tecnica di Neyman

$$\int_0^{x_1(\mu)} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} dx = \frac{\alpha}{2} \rightarrow -e^{-\frac{x_1(\mu)}{\mu}} + 1 = \frac{\alpha}{2} \rightarrow x_1(\mu) = -\mu \ln\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)$$

$$\int_0^{x_2(\mu)} \frac{1}{\mu} e^{-\frac{x}{\mu}} dx = 1 - \frac{\alpha}{2} \rightarrow -e^{-\frac{x_2(\mu)}{\mu}} + 1 = 1 - \frac{\alpha}{2} \rightarrow x_2(\mu) = -\mu \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

- Assumendo che il mio risultato sperimentale sia x_{exp} determino l'intervallo su μ ponendo

$$x_{exp} = -\mu_2 \ln\left(\frac{2-\alpha}{2}\right) \qquad x_{exp} = -\mu_1 \ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\mu_1 = -\frac{x_{exp}}{\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)} < \mu < \mu_2 = -\frac{x_{exp}}{\ln\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)}$$

- Ponendo $\alpha = 1-0.68$ si ha

$$-\frac{x_{exp}}{\ln(0.16)} < \mu < = -\frac{x_{exp}}{\ln(0.84)}$$

NOTA: intervallo non simmetrico attorno a x_{exp} che e' sempre il valore di aspettazione per μ

INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN

Oltre il paradigma gaussiano

$$-\frac{x_{\text{exp}}}{\ln(0.16)} < \mu < -\frac{x_{\text{exp}}}{\ln(0.84)}$$
$$x_{\text{exp}} - x_{\text{exp}} < \mu < x_{\text{exp}} + x_{\text{exp}}$$

Come valutare quale delle due scelte è più corretta?

Il significato frequentista di intervallo di confidenza è il seguente:

“Se ripetessi un numero N grande di volte l’esperimento allora nell’ $\alpha\%$ (68%) dei casi dovrei trovare un valore del parametro μ all’interno dell’intervallo indicato”

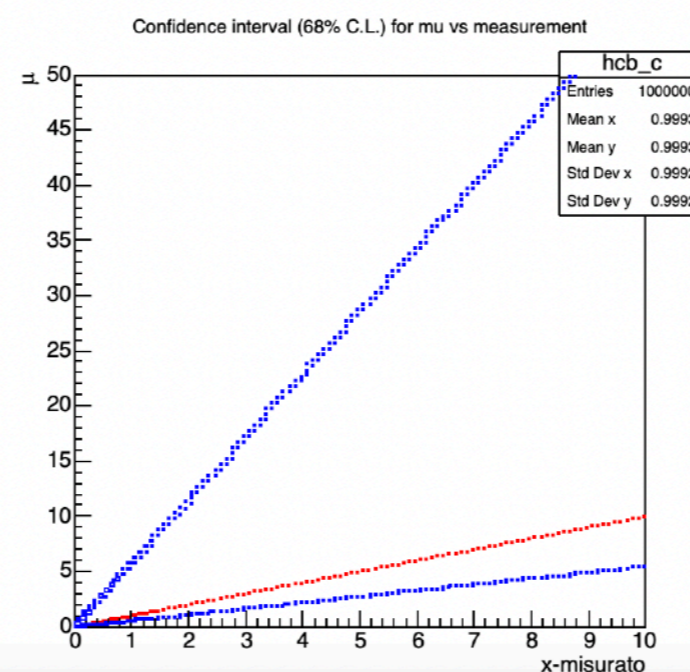
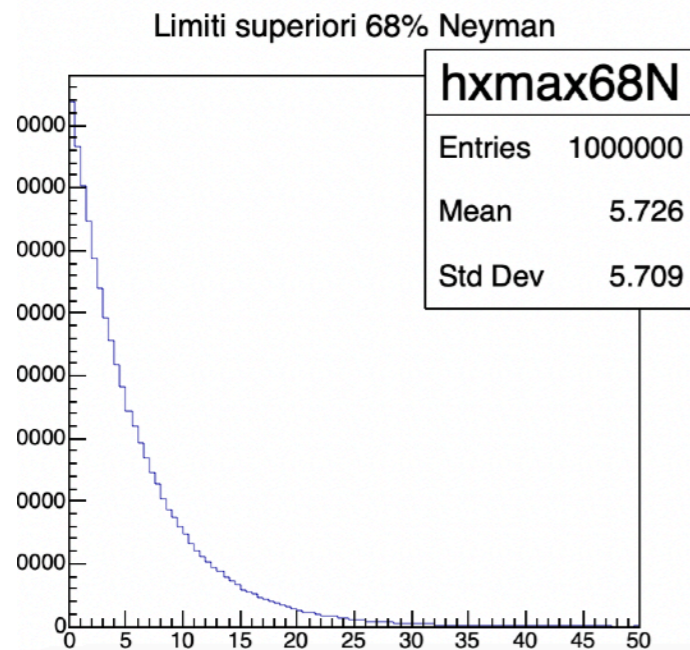
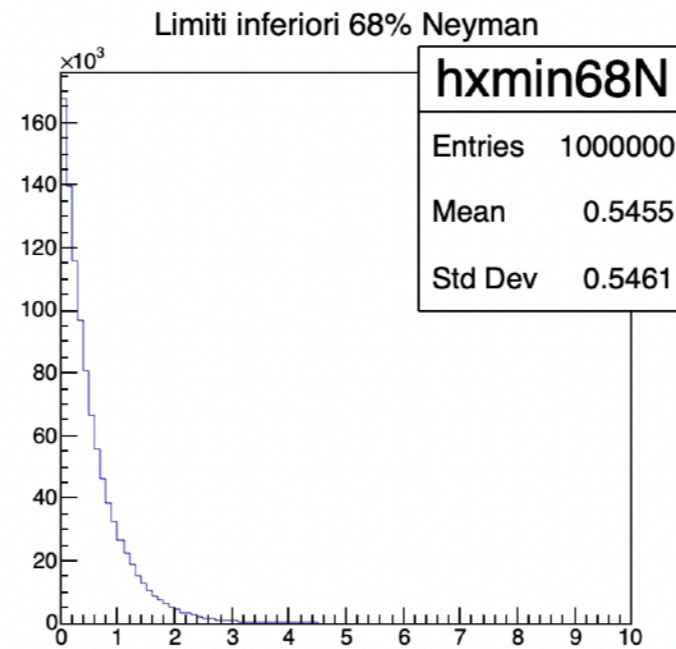
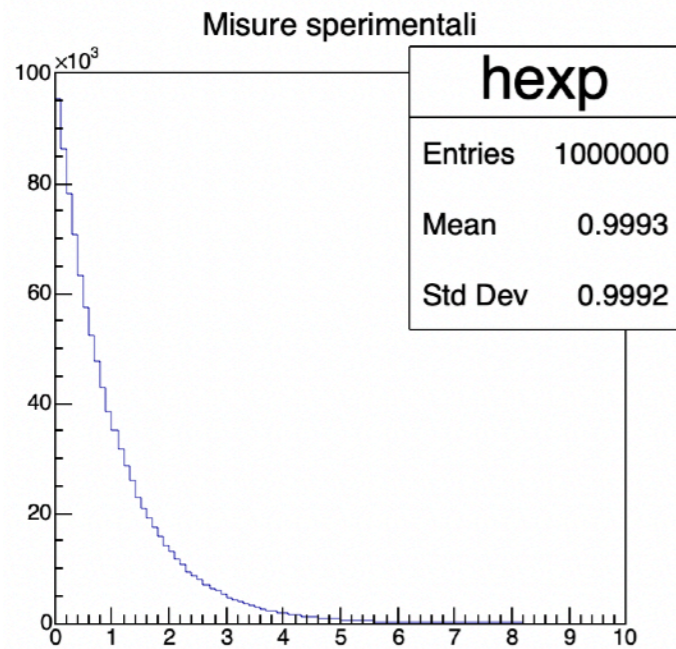
Possiamo verificare quale dei due intervalli rispetta la definizione di intervallo di confidenza.

... codice...

INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN

Oltre il paradigma gaussiano

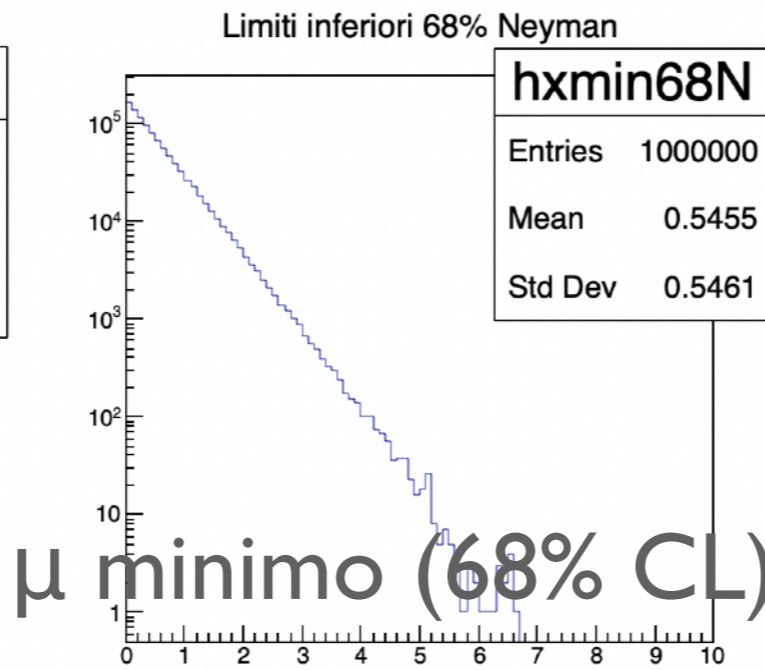
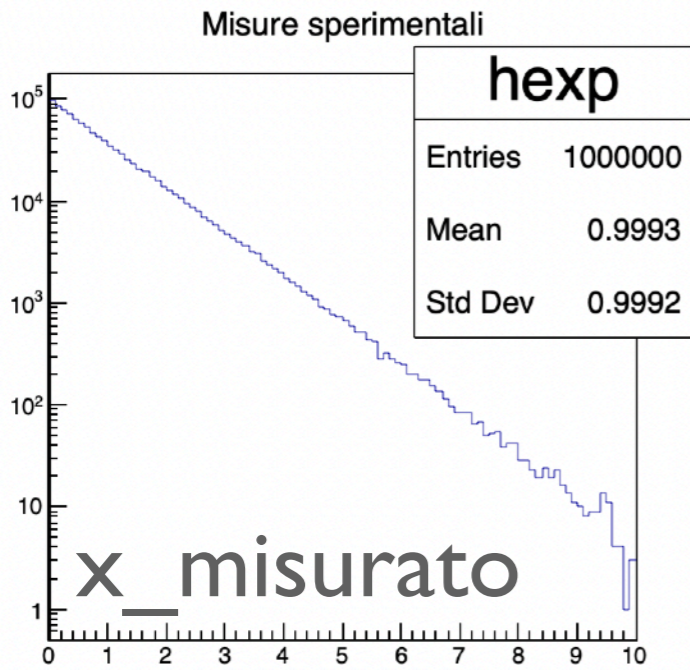
Neyman.C



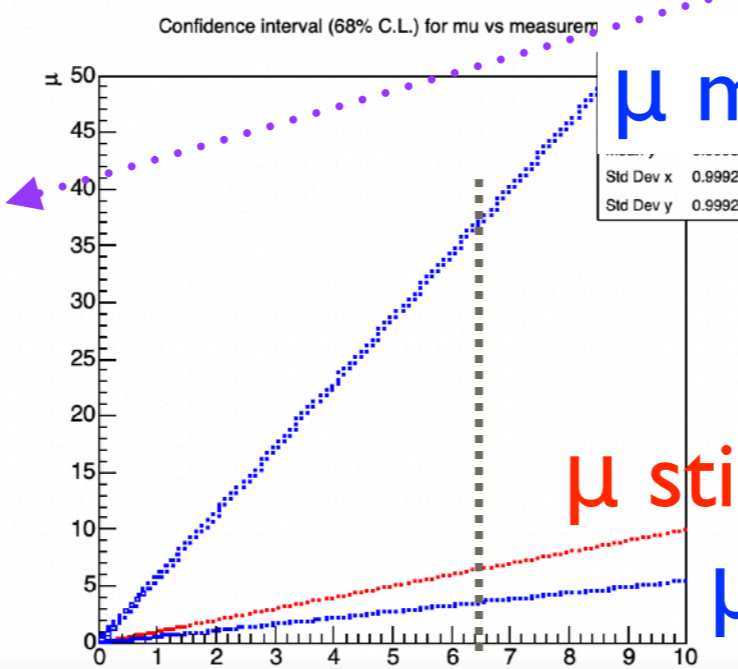
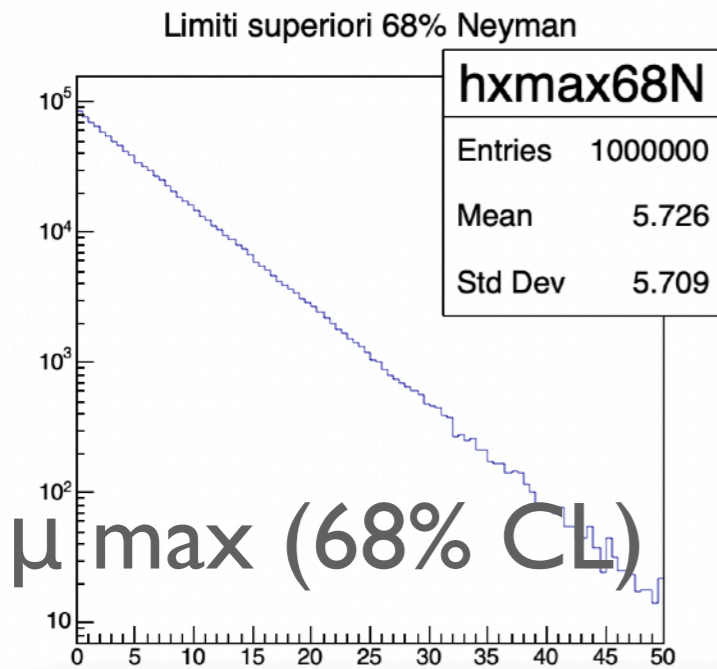
INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN

Oltre il paradigma gaussiano

In log scale



If $x_{exp} = \mu = 1$, 68% CL (Neyman) = **0.545678 5.73548**



μ max (68% CL)

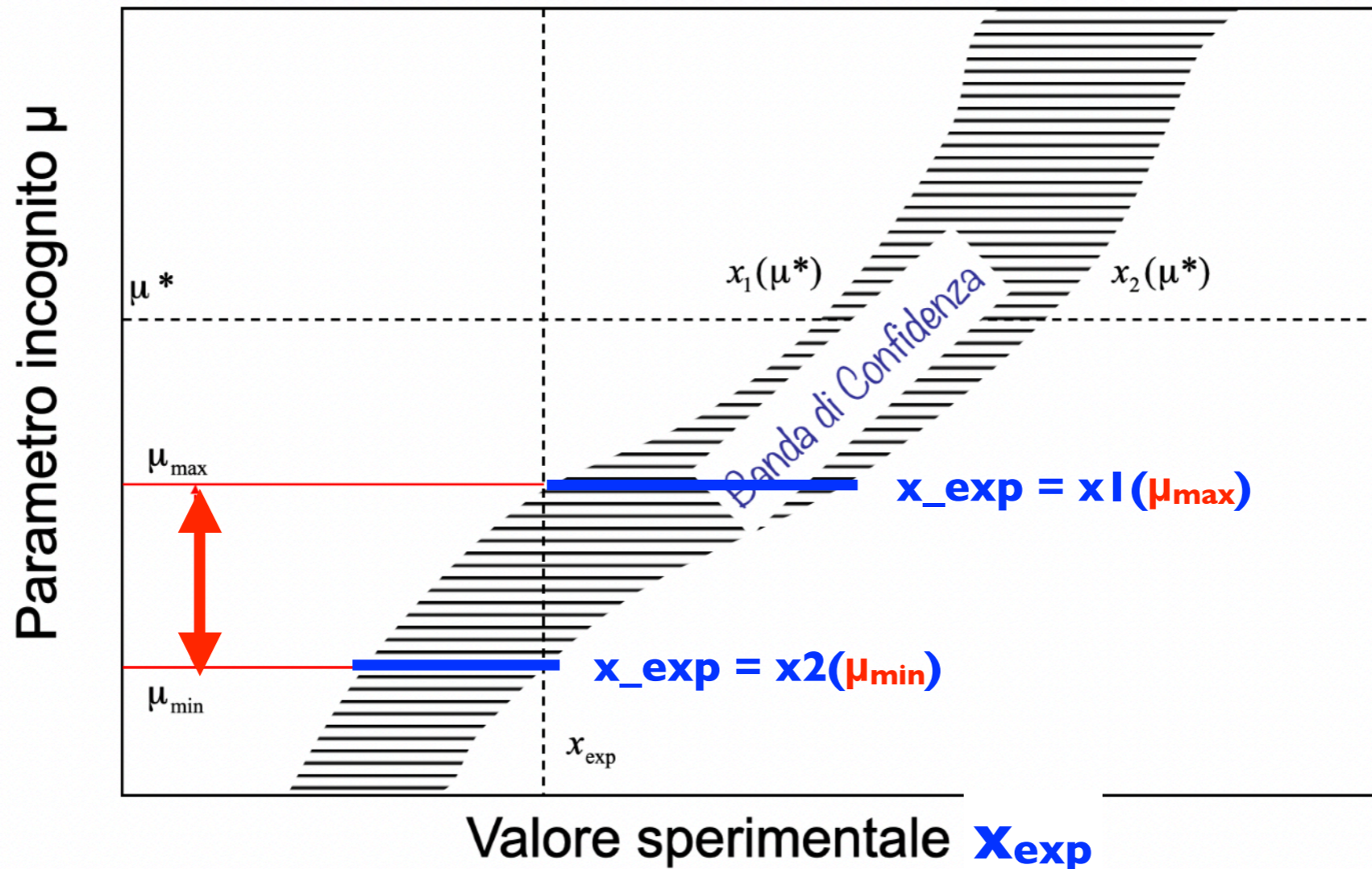
μ stimato = x_{mis}

μ minimo (68% CL)

NOTA:
intervallo
fortemente
asimmetrico

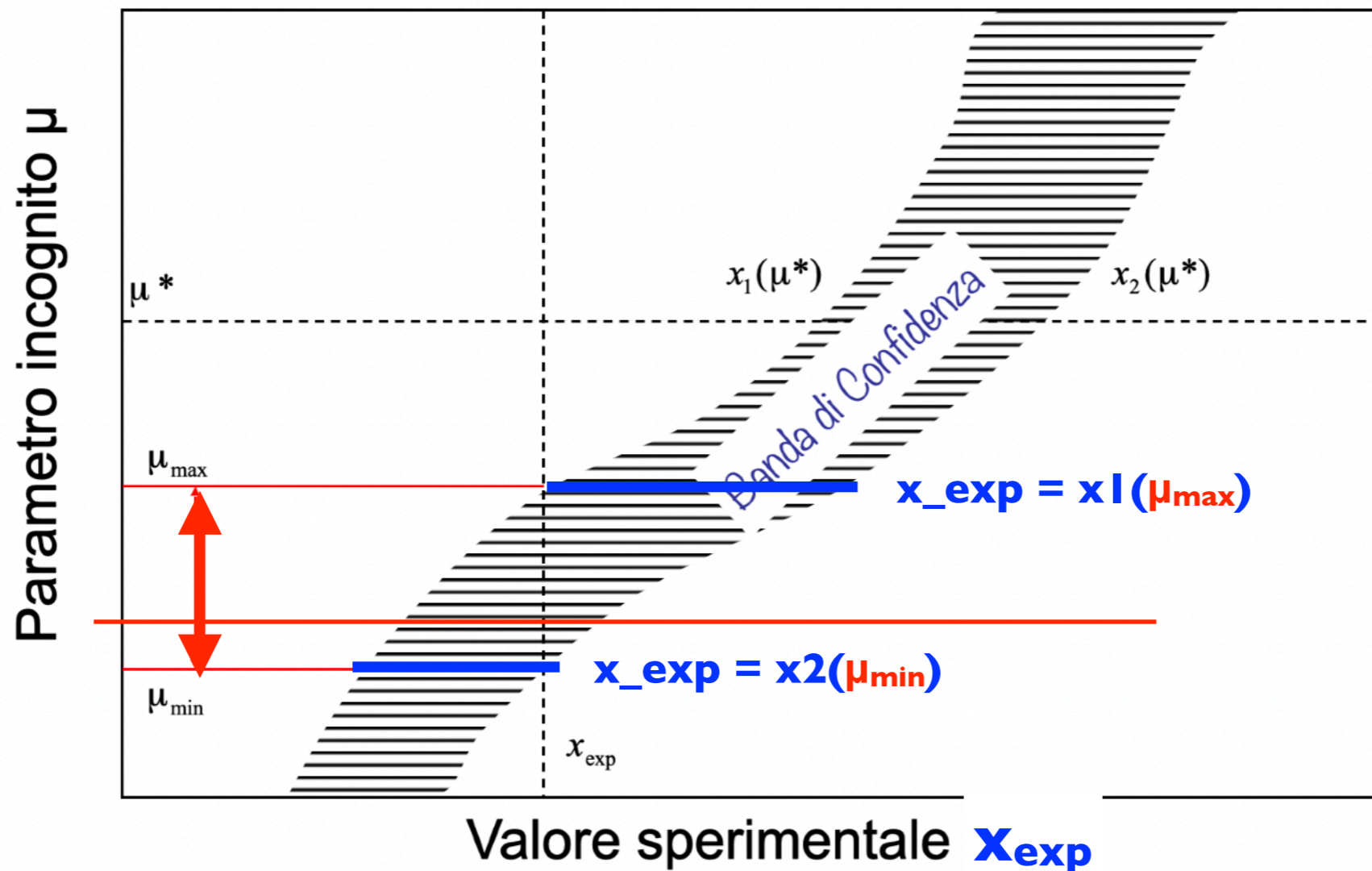
$x_{misurato}$

INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN



- 5) Dato un valore sperimentale misurato x_{\exp} si traccia la linea verticale passante per questo valore e si identificano i due estremi della banda di confidenza che identificano l'intervallo di confidenza con fiducia $1-\alpha$

INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN



NOTA:

Per μ_{vero} ho ottenuto x_{exp} che con 90% di C.L. si trova tra x_1 e x_2 -

Se ripeto la misura otterrò con il 90% di C.L. x'_{exp} con cui definirò intervalli di confidenza in cui

μ_{vero} sarà contenuto

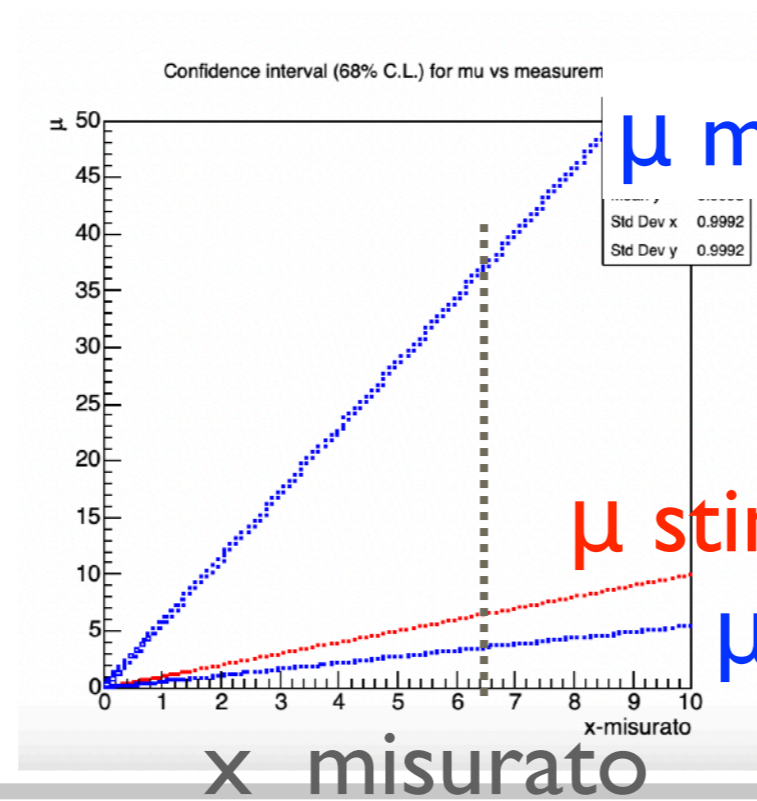
5) Dato un valore sperimentale misurato x_{exp} si traccia la linea verticale passante per questo valore e si identificano i due estremi della banda di confidenza che identificano l'intervallo di confidenza con fiducia $1-\alpha$ **per esempio 90%**

Approccio frequentista

INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN

Nel nostro caso

- C.L. 0.68 def. Standard: frequenza di μ_{vero} in intervallo 0.606061
- C.L. 0.68 def. Neyman: frequenza di μ_{vero} in intervallo **0.679564**
- C.L. 0.9544 def. Standard: frequenza di μ_{vero} in intervallo 0.715712
- C.L. 0.9544 def. Neyman: frequenza di μ_{vero} in intervallo **0.954477**



μ max (68% CL)

μ stimato = x_{mis}

μ minimo (68% CL)

NOTA:
intervallo
fortemente
asimmetrico

INTERVALLO DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN

Introduciamo ora una definizione più generale di intervallo di fiducia

Limitiamoci al caso di un parametro incognito (μ) e una sola grandezza misurata (x). Data la grandezza misurata vogliamo stimare (inferire) il parametro incognito.

La p.d.f. del processo sarà una $f(x, \mu)$.

Facciamo l'esempio gaussiano in cui assumiamo di conoscere con esattezza la varianza della p.d.f. e che questa sia uguale a 1.

Dato un certo valore vero μ scriverei che:

Ho scritto espressamente $f(x, \mu)$ poiché non conosco μ !
Sarebbe quindi più corretto dire che la $f(x, \mu)$ scritta sopra è una $f(x | \mu)$, cioè la p.d.f. che segue la variabile aleatoria x data μ (probabilità condizionata).

Se μ cambia, cambia anche la f .



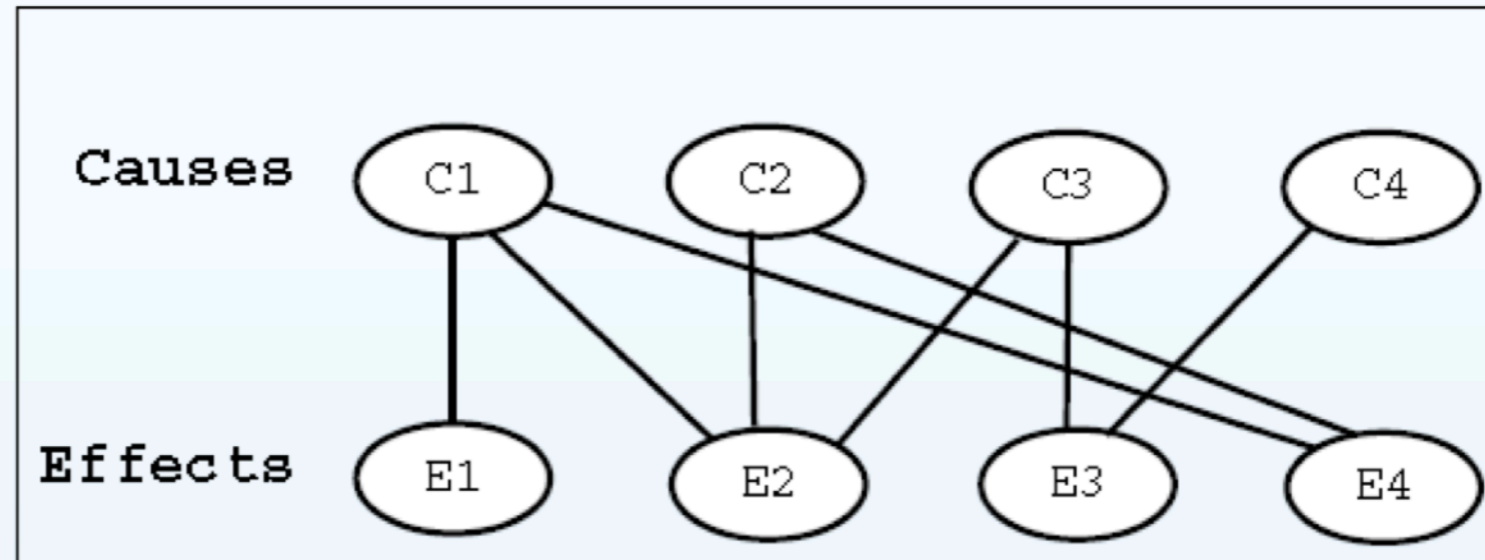
Jerzy Neyman (16 aprile 1894 – 5 agosto 1981)
statistico polacco.

$$f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

TEOREMA DI BAYES

Analizziamo la nostra misura in termini di causa ed effetto

Our original problem:



Our conditional view of probabilistic causation

$$P(E_i | C_j)$$

Our conditional view of probabilistic inference

$$P(C_j | E_i)$$

TEOREMA DI BAYES

$$P(B_k | A) = \frac{P(A | B_k)P(B_k)}{\sum_{k=1}^n P(A | B_k)P(B_k)}$$

Vediamo come riformulare il teorema di Bayes nel caso di p.d.f. di variabili continue. Consideriamo come primo caso la situazione in cui ho una misura x e devo inferire un parametro μ entrambi variabili reali definite in $(-\infty, +\infty)$.

Non ho più le n famiglie di eventi B_k . Il mio spazio campione è diviso in maniera continua dal valore del parametro μ che svolge il ruolo di B_k .

La sommatoria va quindi sostituita da un integrale.

$$p(\mu | x) = \frac{p(x | \mu)\pi(\mu)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x | \mu^*)\pi(\mu^*)d\mu^*}$$

Dove con $p(\mu|x)$ identifico la p.d.f. che segue la "causa" μ una volta osservato "l'effetto" x . Mentre le $p(x| \mu)$ sono le p.d.f. che segue la variabile x una volta noto μ . La funzione $\pi(\mu)$ è la p.d.f. *a priori* che seguirebbe il parametro incognito μ . In molti casi questa $\pi(\mu)$ viene assunta uniforme, io a priori non so qual'è il possibile valore di μ per cui assumo tutti i valori equiprobabili.

TEOREMA DI BAYES E INTERVALLI DI CONFIDENZA

Cosa succede se invece di una singola misura x ho più misure $\{x_i\}$ tutte dipendenti dallo stesso parametro μ ?

In questo caso la p.d.f. da stimare diventa una $p(\mu | \mathbf{x})$, dove \mathbf{x} è il vettore delle misure. La $p(\mathbf{x} | \mu)$, se ho motivo di ritenere che le x_i sono indipendenti e tutte estratte dalla stessa distribuzione con parametro μ , è pari al prodotto delle probabilità e quindi alla Likelihood.

$$p(\vec{x} | \mu) = \prod_{i=1}^n p(x_i | \mu) = L(\vec{x} | \mu)$$

Quindi posso riscrivere in termini più generali

$$p(\mu | \vec{x}) = \frac{L(\vec{x} | \mu)\pi(\mu)}{\int_{-\infty}^{\infty} L(\vec{x} | \mu')\pi(\mu') d\mu'}$$

TEOREMA DI BAYES E INTERVALLI DI CONFIDENZA

In base al teorema di Bayes la definizione di intervallo di *credibilità* di un risultato sperimentale segue facilmente dalla definizione di probabilità a posteriori. L'intervallo di credibilità della misura del parametro μ dato un insieme di misure \mathbf{x} è dato dall'integrale della probabilità a posteriori

$$1 - \alpha = \int_{\mu_1}^{\mu_2} p(\mu' | \vec{x}) d\mu'$$

Dove α indica il grado di credibilità voluto e μ_1, μ_2 identificano gli estremi dell'intervallo.

TEOREMA DI BAYES E INTERVALLI DI CONFIDENZA DI BAYES

Identificare un intervallo di credibilità con il metodo Bayessiano equivale quindi a risolvere rispetto a μ_1 e μ_2 l'equazione

$$1 - \alpha = \int_{\mu_1}^{\mu_2} p(\mu' | \vec{x}) d\mu = \frac{\int_{\mu_1}^{\mu_2} L(\vec{x} | \mu') \pi(\mu') d\mu}{\int_{-\infty}^{\infty} L(\vec{x} | \mu') \pi(\mu') d\mu'}$$

Si noti come il risultato dipende dalla scelta della probabilità a priori che segue il parametro μ . Diverse scelte di questa p.d.f. possono portare a risultati diversi. La p.d.f. della μ gioca il ruolo di "qual'è la mia conoscenza del problema".

Come detto spesso si assumono distribuzioni uniformi o quasi uniformi (questo per problemi di normalizzazione del calcolo)

TEOREMA DI BAYES E INTERVALLI DI CONFIDENZA

Proviamo a valutare che p.d.f. a posteriori ha la stima della media di una gaussiana a partire da una misura sperimentale.

So che i miei dati si distribuiscono in maniera Gaussiana ma non conosco la media della distribuzione. Ipotizzo nota la sigma = 1.

Assumo di fare una sola misura e di voler stimare un intervallo di confidenza per la media.

$$p(x | \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

$$p(\mu | x) = \frac{p(x | \mu)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x | \mu) \pi(\mu) d\mu} \pi(\mu)$$

Chi è nel nostro caso $\pi(\mu)$? L'ipotesi meno informativa che posso avanzare è che possa assumere un qualsiasi valore tra meno e più infinito (distribuzione uniforme). Per cui in questo caso la distribuzione di probabilità a posteriori diventa:

$$p(\mu | x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu')^2}{2}} d\mu'} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

TEOREMA DI BAYES E INTERVALLI DI CONFIDENZA

$$p(\mu | x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

Si noti che qui la variabile aleatoria è μ e non x che è il dato noto!

Dato che la distribuzione della probabilità a posteriori che si ottiene è sempre una Gaussiana l'intervallo di credibilità che si ottiene è quello tradizionale.

Quindi al $\alpha\%$ l'intervallo di credibilità è definito da

$$1-\alpha = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} d\mu = x - N(\alpha) < \mu < x + N(\alpha)$$

Qualsiasi approccio statistico quando la distribuzione della popolazione segue un andamento gaussiano porta alla stessa definizione di intervallo di credibilità/confidenza/fiducia.

BAYESIAN VS FREQUENTIST

Discussione sulle criticità dell'approccio Bayessiano

- 1) La probabilità a priori non è definita univocamente
- 2) Non è sempre invariante per trasformazione dei parametri
- 3) È spesso estremamente complesso anche numericamente ottenere il risultato
- 4) Intuitivamente può essere complesso da accettare il concetto di soggettività nella definizione della probabilità intrinseca nella necessità di definire una probabilità a priori.

Lo scontro tra l'approccio frequentista e l'approccio Bayessiano è in alcuni casi molto acceso e tutt'ora in corso.

Vedi per esempio: G. D'Agostini "*Probably a discovery: Bad mathematics means rough scientific communication*" (2011) (<http://arxiv.org/abs/1112.3620>)

Uno suggerimento può essere quello di pubblicare un risultato utilizzando entrambe le tecniche in modo da permettere al lettore di considerare la soluzione che a lui sembra più corretta (... troppo Bayessiano?)

ESEMPIO

Neyman_esperimento.C

- Supponiamo di avere una legge fisica che mi predice che alcuni processi si verificano con una abbondanza nel tempo descritta da:
 - $N(t) \sim \exp(-t/\tau)$
 - Vogliamo determinare τ sulla base della misura della frazione degli eventi F_{exp} osservati nell'intervallo Δt tra $t_1=10\text{ns}$ e $t_2=60\text{ns}$
 - Immaginiamo che $\tau=220$ ns (valore vero)
 - $\Rightarrow F(\Delta t) = \frac{\int_{t_1}^{t_2} e^{-t/\tau} dt}{\int_0^{\infty} e^{-t/\tau} dt} = \frac{-\tau e^{-t_2/\tau} + \tau e^{-t_1/\tau}}{\tau} = -e^{-60/220} + e^{-10/220} = -0.7613 + 0.9556 = 0.1942$
- Esperimento: Osserviamo 1850 (valore vero 1942) eventi tra t_1 e t_2 dei 10000 complessivamente prodotti
 - Determiniamo l'intervallo di confidenza al 90% per τ , ossia per $N(\Delta t)$

ESEMPIO

Neyman_esperimento.C

- Consideriamo tau [tra 50 e 500 ns]
- Per ogni valore calcoliamo $F(\Delta t) = -e^{-60/\tau} + e^{-10/\tau}$
 - $N(\Delta t) = 10000 * F(\Delta t)$; x fluttuera' come una poissoniana con media $N(\Delta t)$
 - Calcoliamo x1 e x2 che delimitano l'intervallo di confidenza al 90 % se la media di una poissoniana e' $N(\Delta t)$
 - Costruiamo la banda di confidenza
- Per il risultato del nostro esperimento, 1850, cerchiamo gli estremi τ_1 e τ_2 che corrispondono agli estremi della banda
- Verifichiamo che ripetendo la procedura n volte (estraiamo N_{exp} da una poissoniana con media = valore vero 1942) il valore vero tau =220 ns, ossia $N(\Delta t) = 1942$, si trova nell'intervallo il 90% delle volte.

ESEMPIO

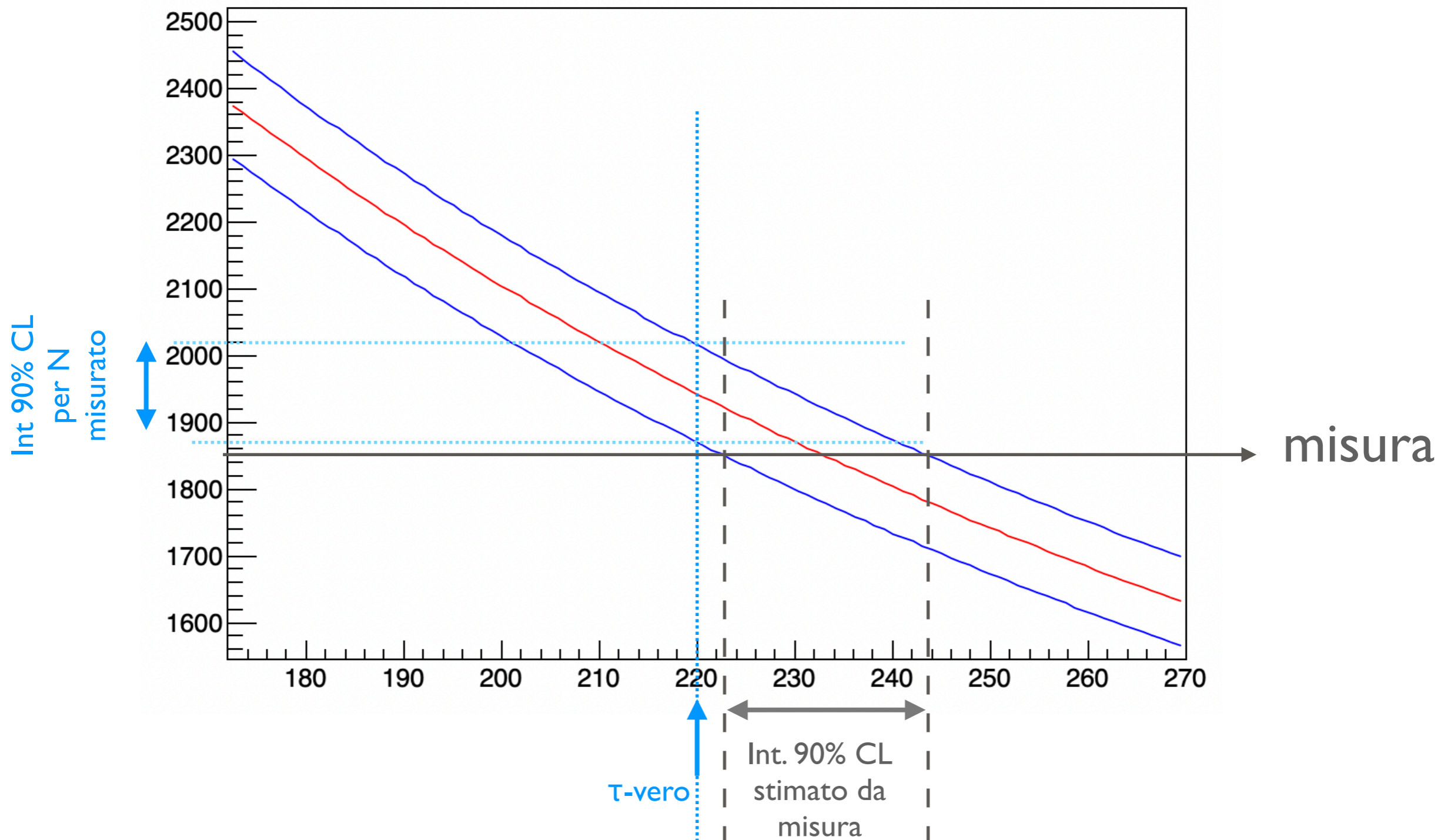
Neyman_esperimento.C



$\tau = 220$ Frazioni di eventi tra $t_1=10$ e $t_2=60$ $\rightarrow \rightarrow 0.194263$

Eventi attesi tra 10 e 60 s (per τ vero = 220 s) = 1942.63

min, max (90% CL) \rightarrow 1870.12 2015.13



ESEMPIO

Neyman_esperimento.C



$\tau = 220$ Frazioni di eventi tra $t_1=10$ e $t_2=60$ $\rightarrow \rightarrow 0.194263$

Eventi attesi tra 10 e 60 s (per τ vero = 220 s) = 1942.63

min, max (90% CL) \rightarrow 1870.12 2015.13

