METODI STATISTICI E COMPUTAZIONALI

Stefania Spagnolo

Dipartimento di Matematica e Fisica, Univ. del Salento

LEZIONE 13

INTERVALLI DI CONFIDENZA

limiti inferiori o superiori

Dispenze B. Chiandotto (Università di Firenze) Cap 4
Particle Data Book (Statistics)

LIMITI INFERIORI / SUPERIORI

- Esaminiamo ora una situazione frequente nella ricerca in Fisica:
  - Supponiamo di essere alla ricerca dell'evidenza di un fenomeno ma di non sapere se effettivamente il fenomeno esiste o no.

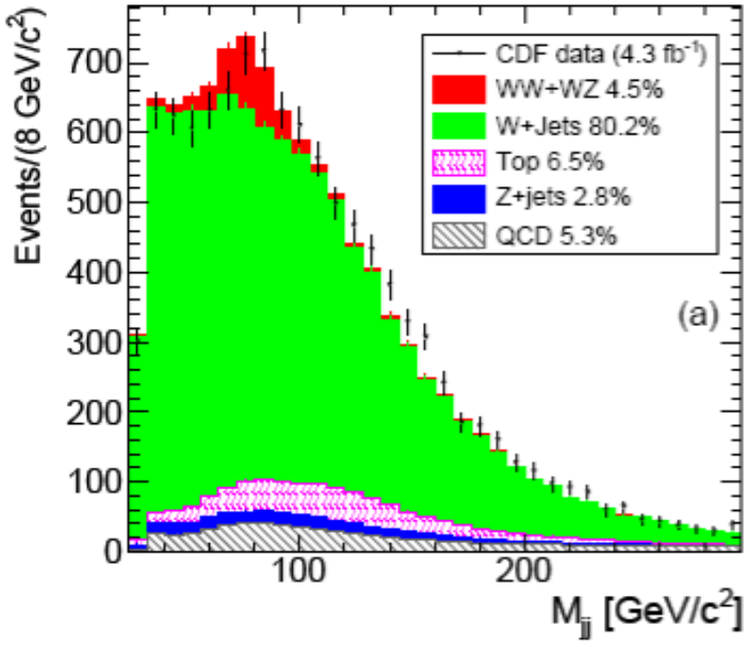
- Se il risultato della misura sperimentale non presenta evidenza del fenomeno cosa possiamo dire?
  - In questi casi quello che si stima è un ***upper (lower) limit***
    - si identifica, cioè, per il parametro in studio *un valore sotto (sopra) il quale il nostro esperimento non è sensibile e si esclude con un certo livello di fiducia la possibilità che il parametro assuma valori maggiori (minori) del limite proposto*.

- Facciamo alcuni esempi

LIMITI INFERIORI / SUPERIORI

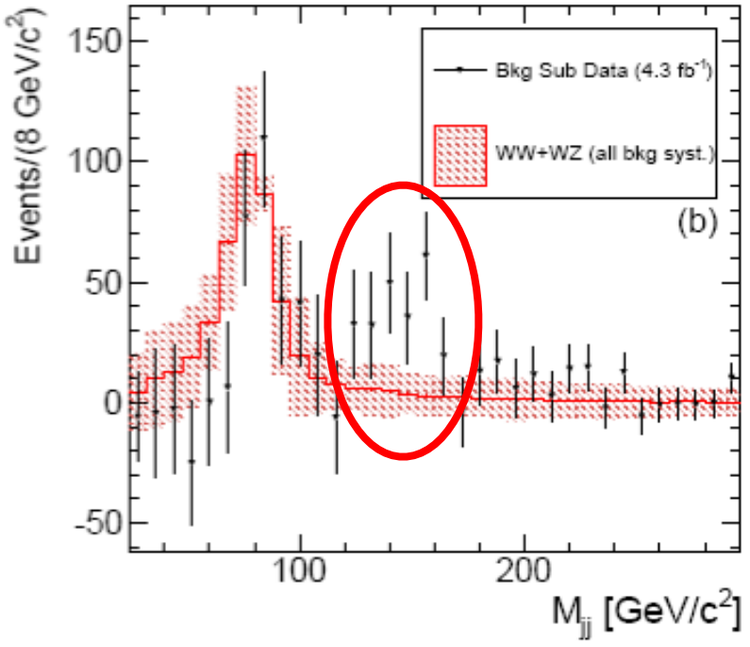
- Situazione molto comune nella ricerca in fisica subnucleare

L'esperimento CDF al Fermilab di Chicago riscontra un eccesso di eventi in una regione della distribuzione della ***massa invariante*** di due ***jet*** in cui in base alle teorie comunemente accettate (finora verificate negli esperimenti) [**il Modello Standard delle particelle elementari]** non dovrebbe esserci nulla.
Può affermare di aver scoperto una nuova particella?



CDF, Fermilab, April 2011

Distribuzione osservata (punti) sovrapposta alle predizioni per tutti i processi previsti nel Modello Standard indicati nei diversi colori



Distribuzione osservata dopo la sottrazione degli eventi attesi secondo il Modello Standard per tutti i processi tranne la produzione di WW e WZ

LIMITI INFERIORI / SUPERIORI

- Situazione molto comune nella ricerca in fisica astroparticellare

  Alcuni modelli di Dark Matter prevedono che al centro della nostra galassia ci sia un accumulo di tale tipo di materia la quale sotto certe ipotesi potrebbe produrre un eccesso di raggi cosmici in direzione del centro galattico.
  L'esperimento AUGER osserva sotto certe condizioni 3179 eventi nella regione rilevante quando a causa del fondo uniforme ne aspetterebbe 3159.
  Cosa può dire?

- … ma anche in ambiti applicativi

  Un rivelatore di micro-particolato in atmosfera posto in una certa area urbana misura 5 particelle di particolato per cm^3. Dato che quando è stato calibrato in laboratorio facendolo funzionare in atmosfera "pulita" misurava in media 4 particelle per cm^3.
  Cosa possiamo dire sulla presenza di particolato nella zona urbana in esame?

LIMITI INFERIORI / SUPERIORI

- Negli esempi precedenti la situazione sperimentale e' di questo tipo:
  - ho una misura
  - un (processo di) fondo atteso
    - che contribuisce alla mia misura senza essere l'oggetto della mia ricerca
  - devo valutare se l'eccesso rispetto al fondo è significativo o no.

- Si tratta di processi rari, ossia al limite della sensibilità del mio strumento.
  - In nessun caso sono certo dell'esistenza del fenomeno e *non avendo evidenza dello stesso dai miei dati* posso assumere che il fenomeno è inferiore a un certo valore (upper limit, limite superiore) e quotare una fiducia con la quale sono confidente che il valore vero del processo (se esiste) è sicuramente inferiore al mio limite.
- Osserviamo che interviene una certa soggettività nell'affrontare il problema:
  - *Per quale valore misurato posso affermare che "ho visto" il fenomeno e per quale valore devo invece dire che "non ho visto nulla" e quindi proporre un limite ?*
  - I venti raggi cosmici di troppo visti da AUGER sono conferma della teoria dell'annichilazione della DM o sono una fluttuazione statistica del fondo atteso?

COME CALCOLARE UN LIMITE ?

- IPOTESI:
  - Assumo di essere certo che il valore osservato NON sia indicativo della presenza del fenomeno;
    - Quindi voglio stabilire qual è il valore massimo che il parametro che descrive l'intensita' del fenomeno ricercato può assumere dato che io NON vedo il fenomeno, in base alla sensibilità del mio esperimento

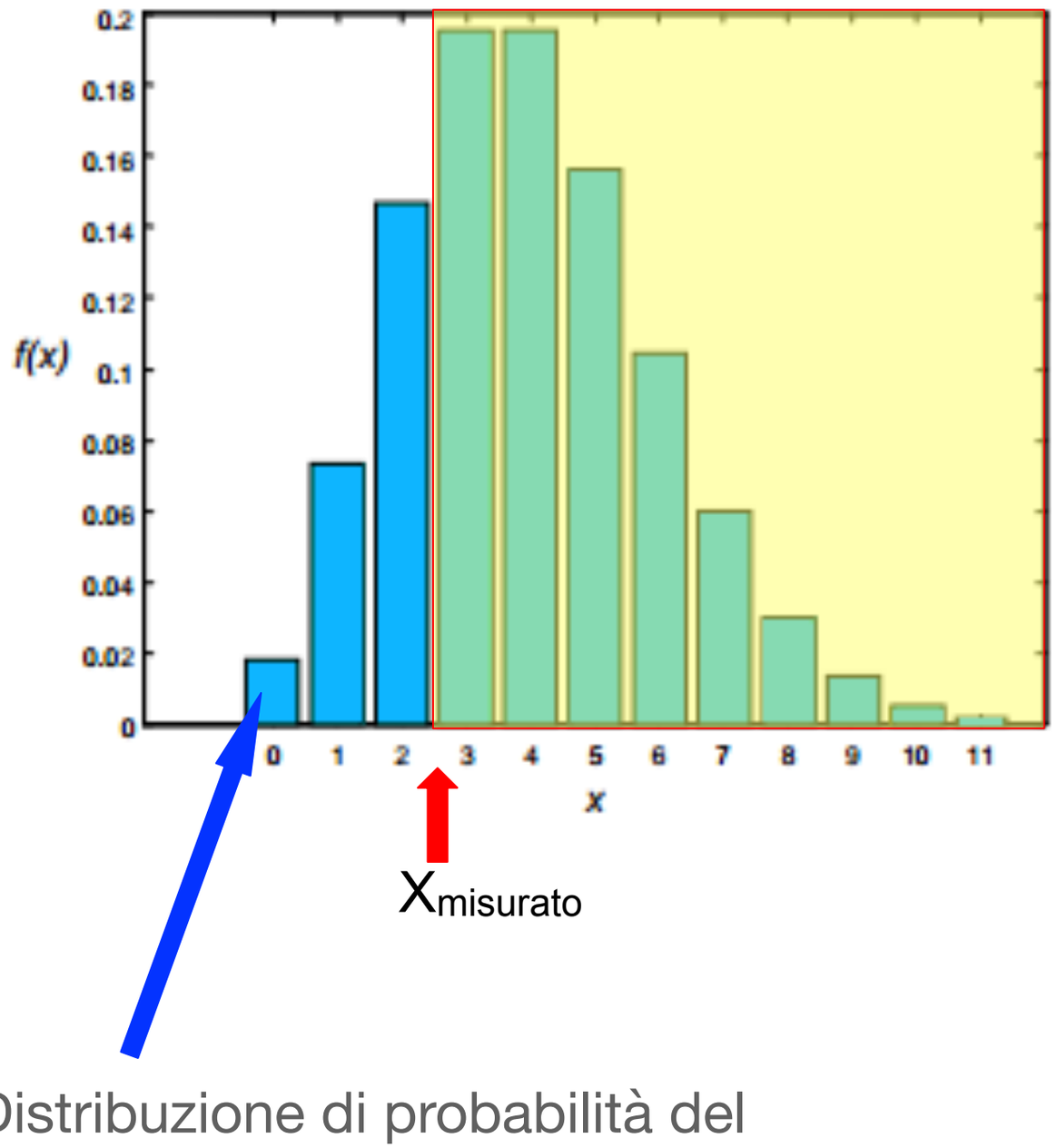
COME CALCOLARE UN LIMITE ?

- Come tecnicamente definisco un limite superiore (inferiore) per il valore di un parametro incognito sulla base di una misura ?

- **CASO di un Processo Poissoniano**
  - Supponiamo di misurare ***n*** che interpreto come $n = n_s + n_b$ dove:
    - n_b = numero atteso di eventi di fondo dovuti ad un ***processo noto (B)***
    - n_s = numero di eventi dovuti ad un potenziale nuovo ***processo incognito (S)***
      - *Indichiamo i valori di aspettazione per i due processi con b (noto) e s (incognito).*

- Potremmo, per esempio, trovarci nella situazione dell'esempio sul particolato misurato da uno strumento: n=5 e b=4.
  - In questo caso dichiariamo (soggettivamente) di non vedere il processo S e conseguentemente vogliamo fissare un limite superiore per il valore atteso s del processo S. Vogliamo cioè affermare che al ***livello di fiducia α %*** s sarà minore di un s_{up}.
  - ***Vogliamo quindi identificare s_{up} in base alla nostra misura e in base al livello di fiducia α che abbiamo fissato.***

COME CALCOLARE UN LIMITE ?



Distribuzione di probabilità del numeri di osservazioni, per un certo valore del parametro S

Porre un limite superiore con una certa fiducia α consiste nell'escludere con una certa fiducia che il valore vero sia maggiore o uguale al valore limite.

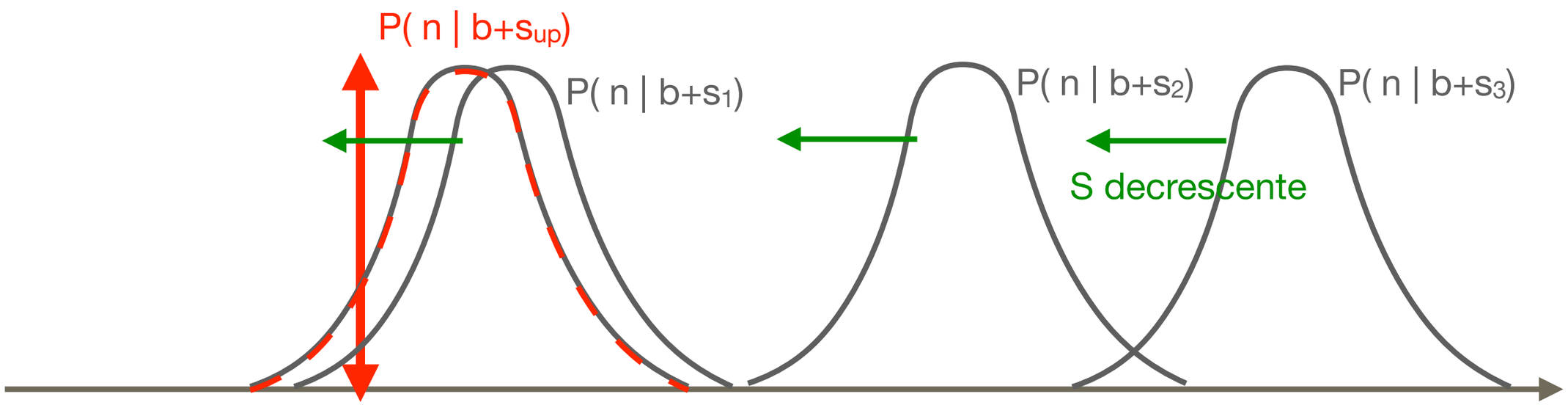
Si dice che S_{up} è un limite superiore in quanto rappresenta il più alto valore atteso possibile che il processo incognito può avere compatibilmente con la misura effettuata.

s_{up} cercato è il massimo valore che s puo' assumere se effettivamente il nuovo processo esiste ed io ho osservato un valore cosi basso per puro caso.

Se la regione in giallo contiene la frazione di probabilità richiesta (α), escludo che S possa avere valori superiori al valore di S che compete a questa distribuzione

DEFINIZIONE DI LIMITE SUPERIORE PER UN PARAMETRO

Non sappiamo se ***s*** e' realizzato nei dati, solo fondo => s=0



n_{exp}

Se la nostra misura è n = n_{exp}

n [misura, osservabile]

$$p(n < n_{exp} \mid b + s_3) = \Sigma_0^{n_{exp}} P(n; b + s_3)$$

La probabilita' di misurare un numero di conteggi <= n_{exp} se $s=s_3$ è estremamente piccola

La probabilita' di misurare un numero di conteggi <= n_{exp} se $s=s_2$ è piccola ma maggiore che se $s=s_3$

La probabilita' di misurare un numero di conteggi <= n_{exp} se $s=s_1$ è piccola ma maggiore che se $s=s_2$

La probabilita' di misurare un numero di conteggi <= n_{exp} se $s=s_{up}$ ha raggiunto il 10%

Scegliamo s_{up} tale che $p(n < n_{exp} \mid b + s_{up}) = \Sigma_0^{n_{exp}} P(n; b + s_{up}) = 10\,\%$

COME CALCOLARE UN LIMITE ?

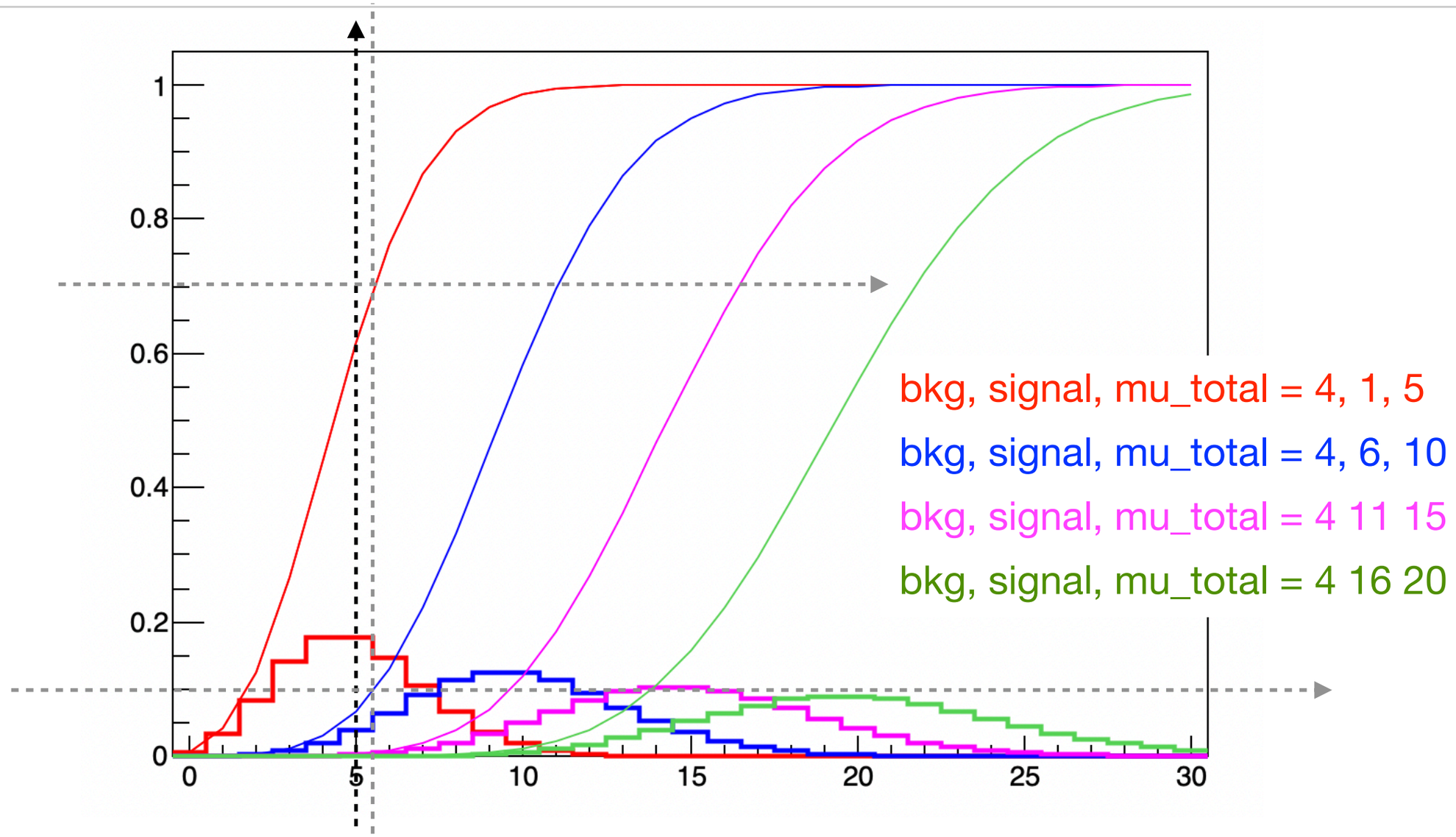
- s_{up} cercato è il massimo valore che s puo' assumere se effettivamente il nuovo processo esiste ed io ho osservato un valore cosi basso di eventi, n, per puro caso.

- **CASO di un Processo Poissoniano**
  - Nel caso Poissoniano questo equivale a identificare s_{up} tale che:

$$1-\alpha = \sum_{i=0}^{n} \frac{(b+s_{up})^i}{i!} e^{-(b+s_{up})}$$

- Dove
  - ***α = livello di confidenza che fisso***
  - b = numero di eventi di fondo attesi
  - la sommatoria rappresenta ***la probabilità di osservare sino ad n eventi assumendo che esistano entrambi i processi (segnale e fondo)***. Vogliamo che tale probabilità sia piccola quanto 1-α
  - Si dice quindi che ***s*** sarà minore di s_{up} al ***α%*** di livello di fiducia.

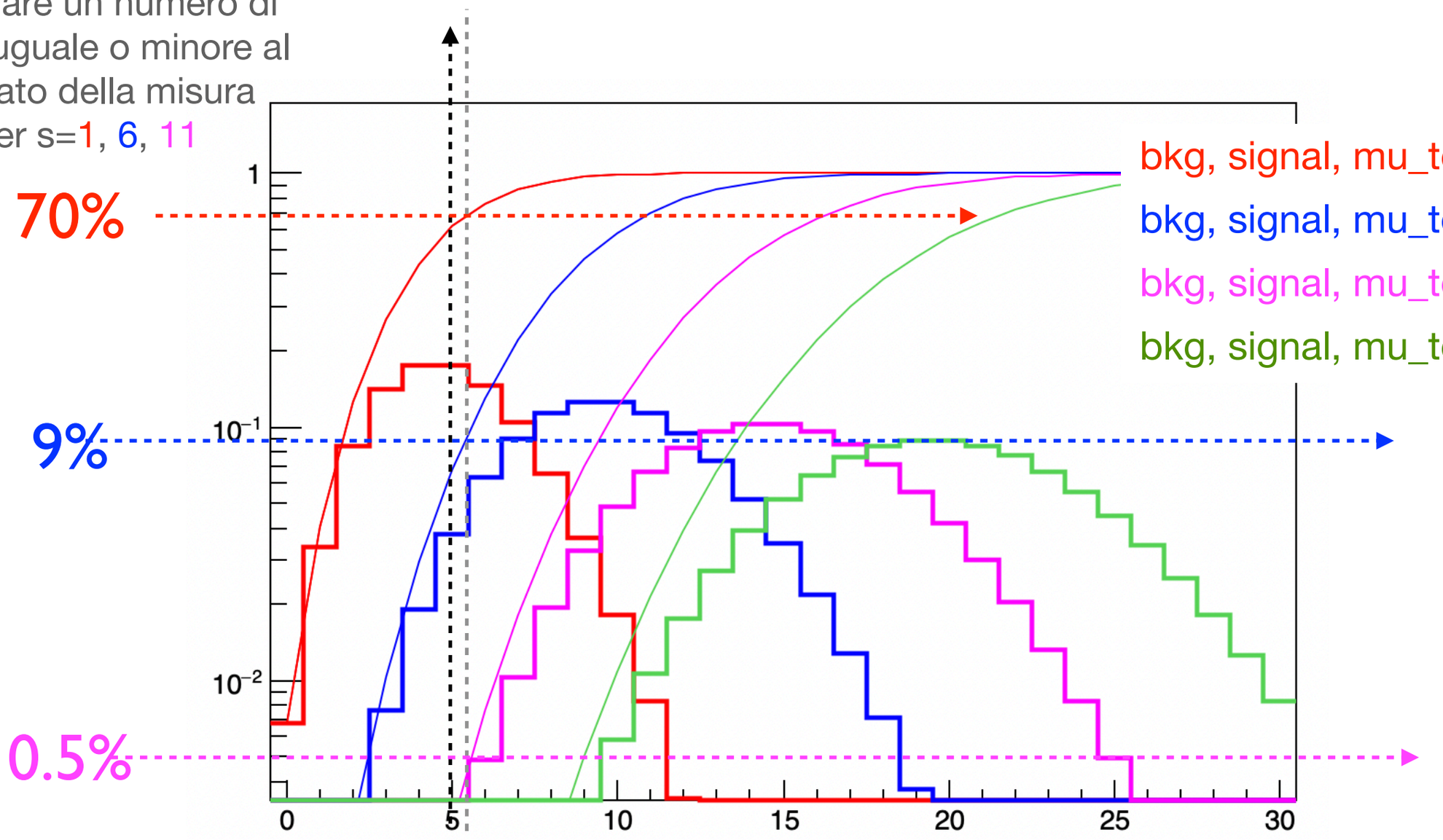
COME CALCOLARE UN LIMITE ?



Distribuzioni di Poisson con media = mu_total
Distribuzioni cumulative della relativa Poissoniana

COME CALCOLARE UN LIMITE ?

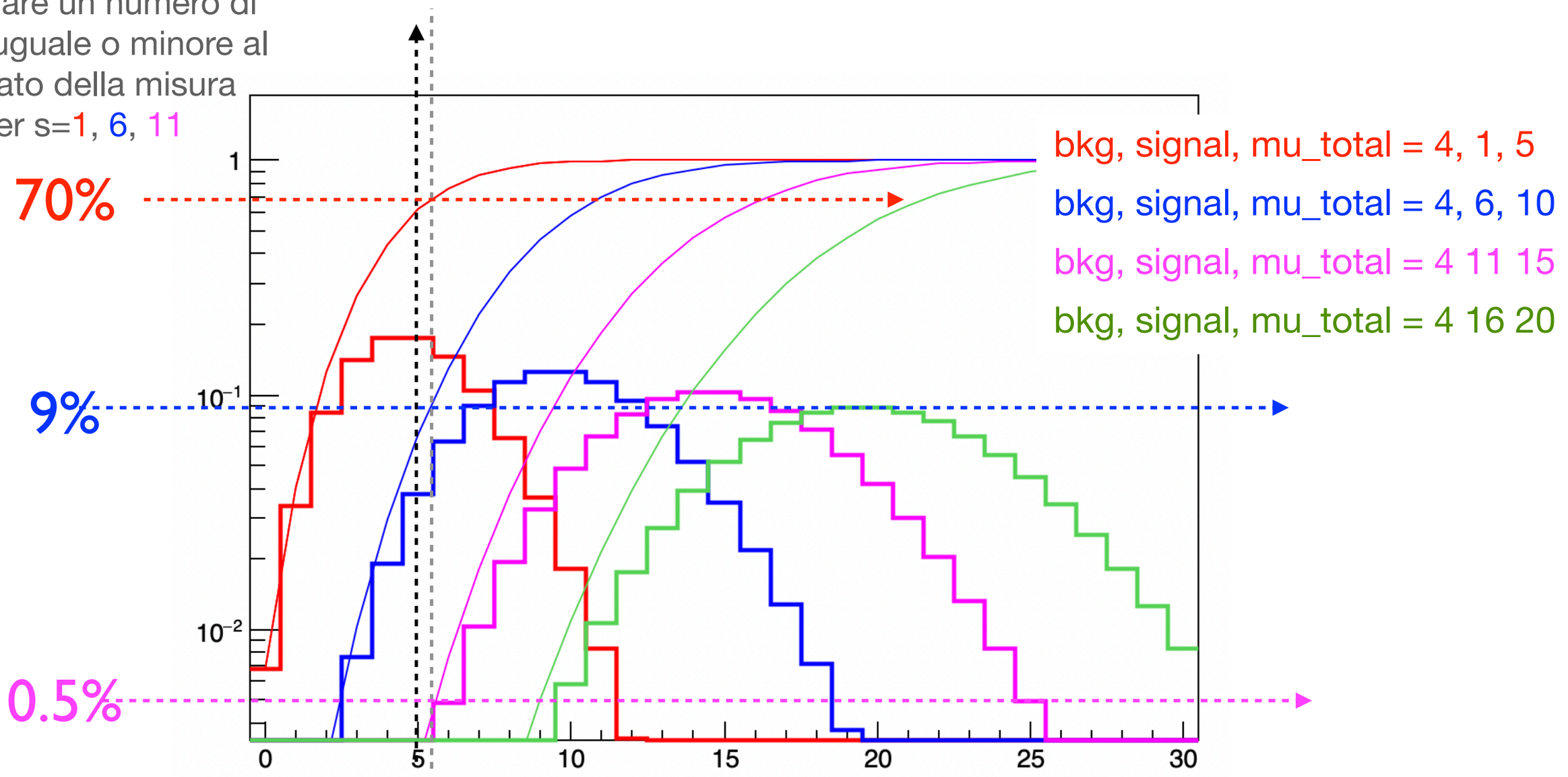
Probabilita' di osservare un numero di eventi uguale o minore al risultato della misura per s=1, 6, 11



Distribuzioni di Poisson con media = mu_total
Distribuzioni cumulative della relativa Poissoniana

COME CALCOLARE UN LIMITE ?

Probabilita' di osservare un numero di eventi uguale o minore al risultato della misura per s=1, 6, 11



Assumendo di misurare 5 con un fondo noto pari a 4. Se ipotizzo un segnale con valore di aspettazione s=6 la probabilità di ottenere per puro caso un numero di eventi minore-uguale a 5 è ≅9%.

Se, invece, il valore di aspettazione del processo è s=1, allora la probabilità di ottenere un valore minore-uguale a 5 è ≅70%. ***Il risultato ottenuto e' molto più improbabile per s=6 che per s=1 !!!***

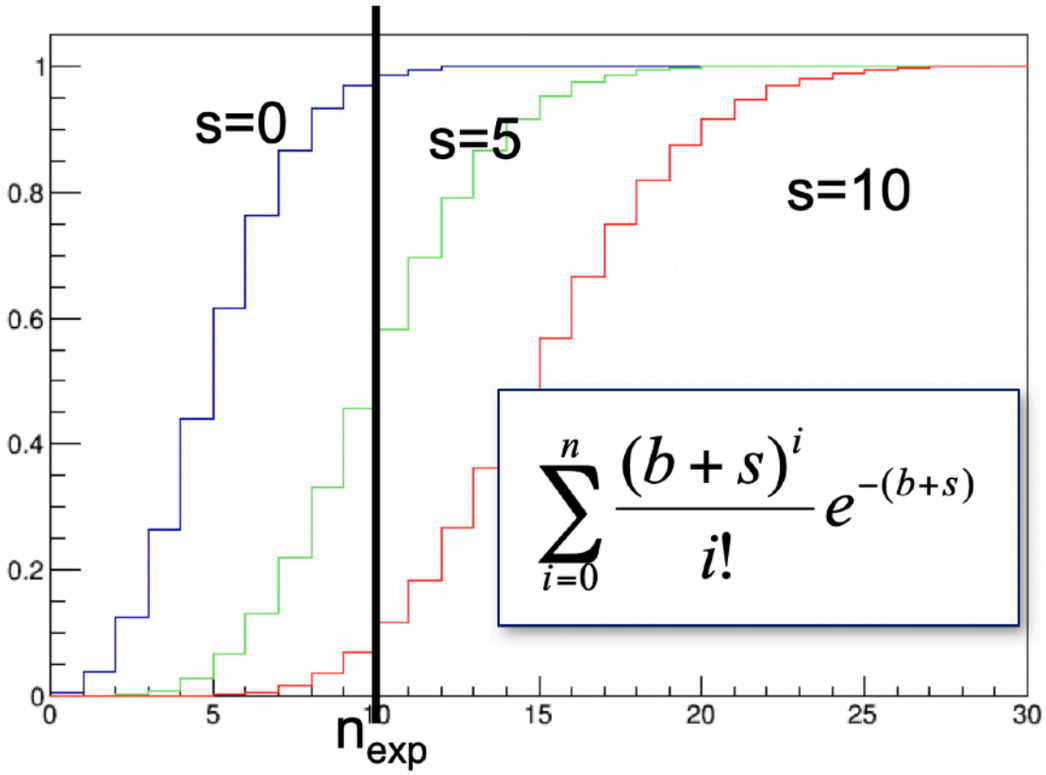
COME CALCOLARE UN LIMITE ?

Ancora un esempio

b=5, n_{exp}=10

s_{up} è il valore per il quale la probabilità di ottenere sino ad n successi è piccola 1 - α. Per cui posso dire con fiducia α che se s esiste deve essere minore di s_{up}.

$$1-\alpha = \sum_{i=0}^{n} \frac{(b+s_{up})^i}{i!} e^{-(b+s_{up})}$$



Possibili valori di s		$P(n<n_{exp}\|s>s_{up})<1-\varepsilon$		Confidenza ε
s=0	=>	$P(n<n_{exp}\|s=0)=99\%$	=>	1 %
s=5	=>	$P(n<n_{exp}\|s=5)=60\%$	=>	40%
s=10	=>	$P(n<n_{exp}\|s=10)=10\%$	=>	90%

Al 90% di C.L. il processo S ha valore di aspettazione inferiore a 10

COME CALCOLARE UN LIMITE ?

- **Il caso di *Risultato 0, fondo atteso 0***

Un altro utile esempio è il caso in cui ho un processo con fondo atteso 0 e misuro 0. Cosa posso dire sul massimo valore atteso (un dato livello di confidenza) che assume un processo incognito?
Quale upper limit posso porre su s con livello di fiducia del 90%?

$$1-\alpha = \sum_{i=0}^{n} \frac{(b+s_{up})^i}{i!} e^{-(b+s_{up})}$$

$$0.1 = e^{-s_{up}}$$

$$s_{up} = -\ln(0.1) \cong 2.3$$

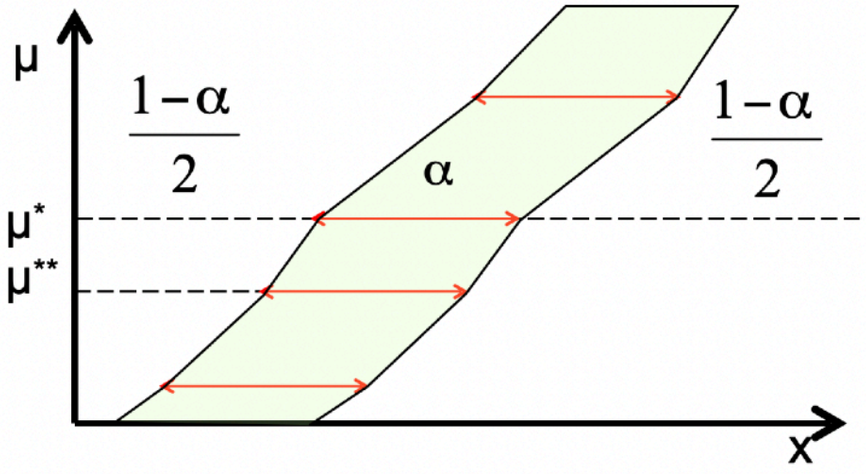
Al 90% di C.L. s è minore di 2.3

COME CALCOLARE UN LIMITE ?

Distribuzioni di probabilita' arbitraria

- Immaginiamo una misura alla fine della quale sono confidente che il mio risultato non dia evidenza dell'esistenza di un nuovo processo e di voler fissare un upper limit. Posso ricorrere alla ***tecnica di Neyman***. In questo caso, quando costruisco ***la banda di confidenza, l'estremo superiore sarà posto ad infinito mentre l'estremo inferiore sarà legato a 1-α, dove, come sempre α è il livello di fiducia voluto***.

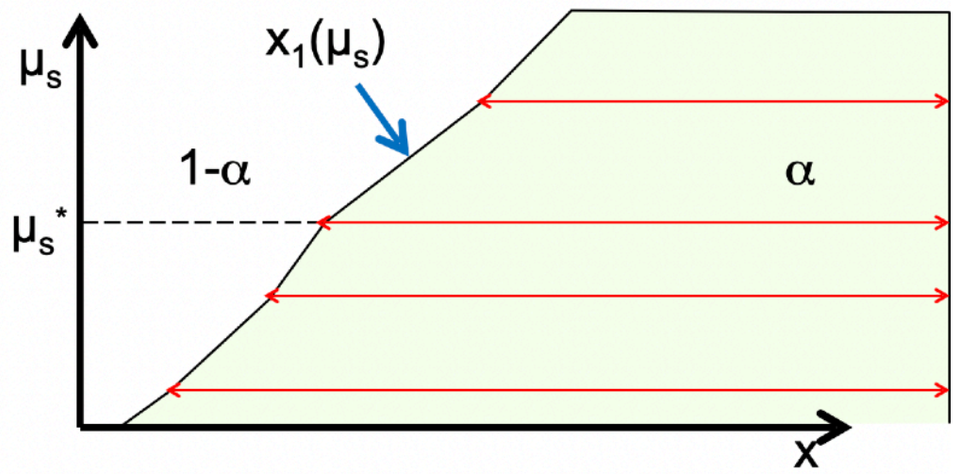
Intervallo di confidenza per μ



$$\int_{-\infty}^{x_1(\mu)} f(x,\mu)dx = \frac{1-\alpha}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{x_2(\mu)} f(x,\mu)dx = \frac{1+\alpha}{2}$$

Limite superiore per μ_s



$$\int_{-\infty}^{x_1(\mu_s)} f(x,\mu_s+\mu_b)dx = 1-\alpha$$

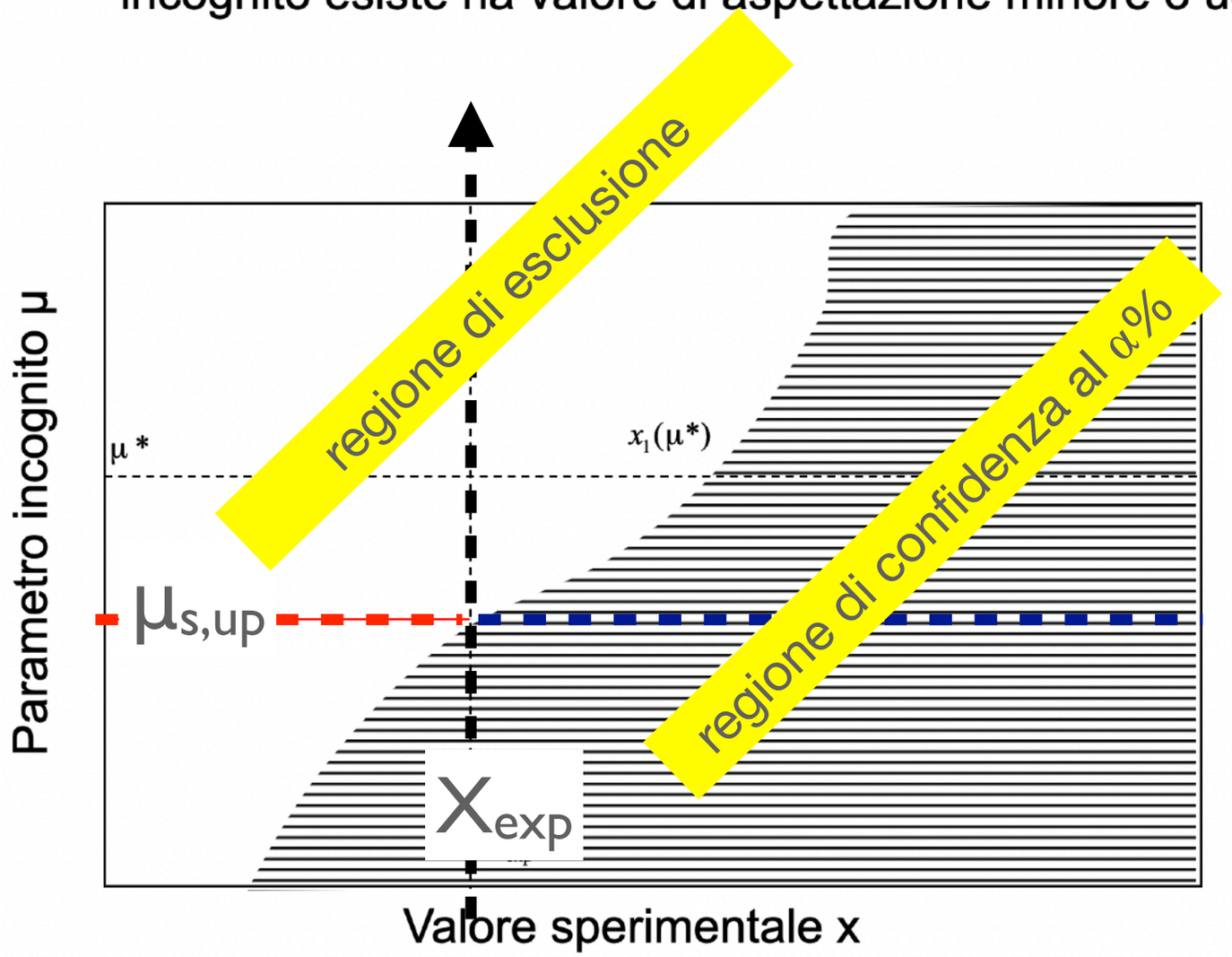
$$x_2(\mu_s) = +\infty$$

Costruiamo la regione di confidenza al α%

COME CALCOLARE UN LIMITE ?

Distribuzioni di probabilita' arbitraria

Ottenuto un valore sperimentale (x_{exp}) identifico sulla banda di confidenza il corrispondete limite superiore.
Posso affermare che, con il livello di confidenza α scelto, se il processo incognito esiste ha valore di aspettazione minore o uguale a $\mu_{s,up}$



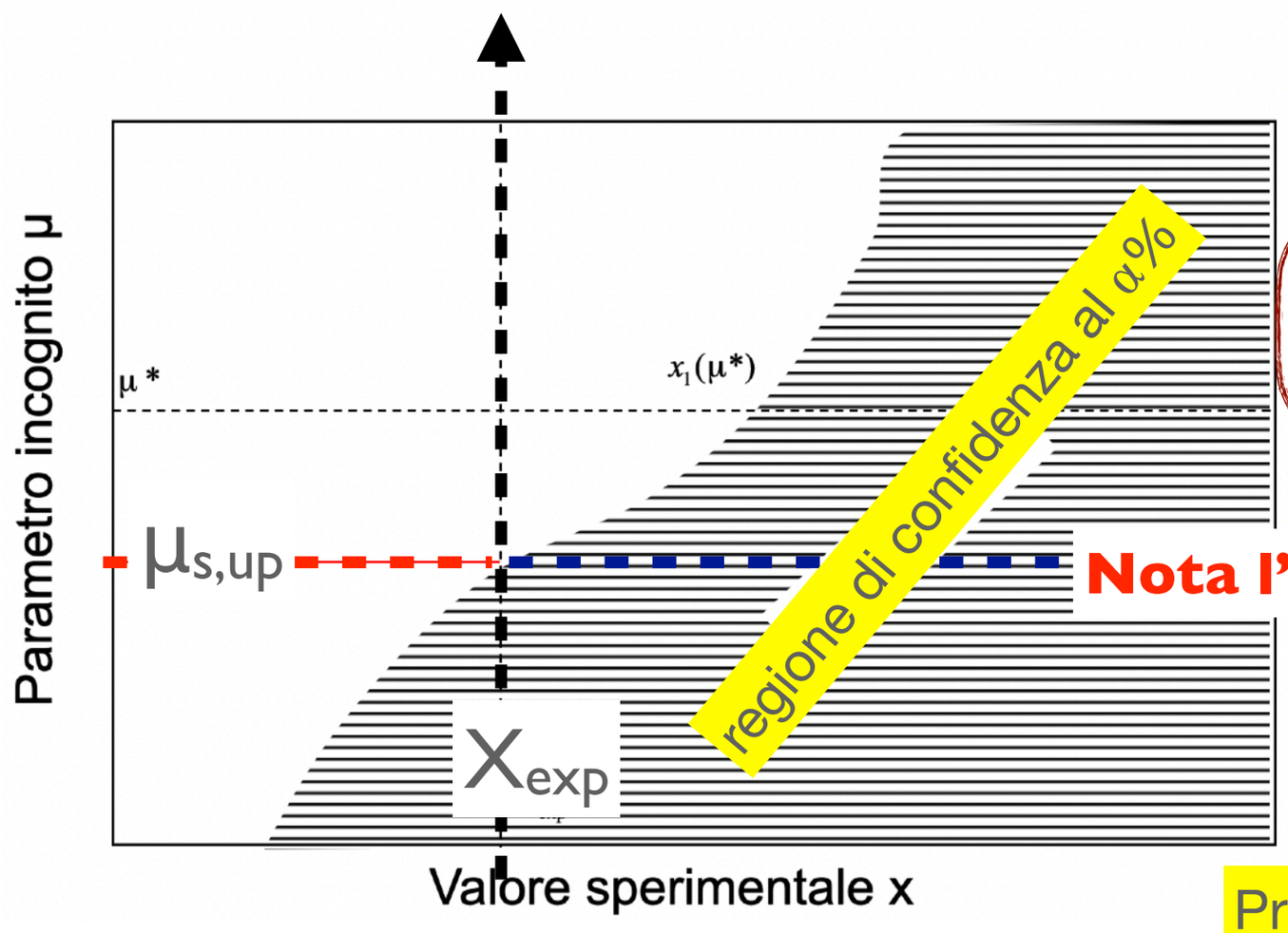
$$\int_{-\infty}^{x_{exp}(\mu_{s,up})} dx\, f(x\,|\,\mu_s+\mu_b) = 1-\alpha$$

$$x_2(\mu_s) = +\infty$$

COME CALCOLARE UN LIMITE ?

Distribuzioni di probabilita' arbitraria

Ottenuto un valore sperimentale (x_{exp}) identifico sulla banda di confidenza il corrispondete limite superiore.
Posso affermare che, con il livello di confidenza α scelto, se il processo incognito esiste ha valore di aspettazione minore o uguale a $\mu_{s,up}$



Probabilita' che $x < x_{exp}(\mu_{s,up})$

$$\int_{-\infty}^{x_{exp}(\mu_{s,up})} dx\, f(x \mid \mu_s + \mu_b) = 1 - \alpha$$

$$x_2(\mu_s) = +\infty$$

Nota l'analogia con il caso Poissoniano

$$1 - \alpha = \sum_{i=0}^{n} \frac{(b + s_{up})^i}{i!} e^{-(b+s_{up})}$$

Probabilita' che I conteggi siano <= n

COME CALCOLARE UN LIMITE ?

Esempio: consideriamo una popolazione con p.d.f. gaussiana in cui ho due processi con medie μ_b per il fondo e μ_s per il segnale. Mi aspetto che la variabile aleatoria somma dei due segua una distribuzione gaussiana con media pari alla somma $(\mu_b + \mu_s)$ delle medie varianza pari alla combinazione statistica della varianze.
In questo caso il quantili x_1 che identifica gli estremi della banda di confidenza è facilmente calcolabile.

Dalle tabelle di integrali della gaussiana, ricavo l'estremo sup. dell'integrale in funzione di μ_s

$$\int_{-\infty}^{x_1(\mu_b+\mu_s)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu_b-\mu_s)^2}{2\sigma^2}} dx = 1-\alpha \Rightarrow \quad x_1(\mu_b+\mu_s) = \mu_b + \mu_s - N(\alpha)\sigma$$

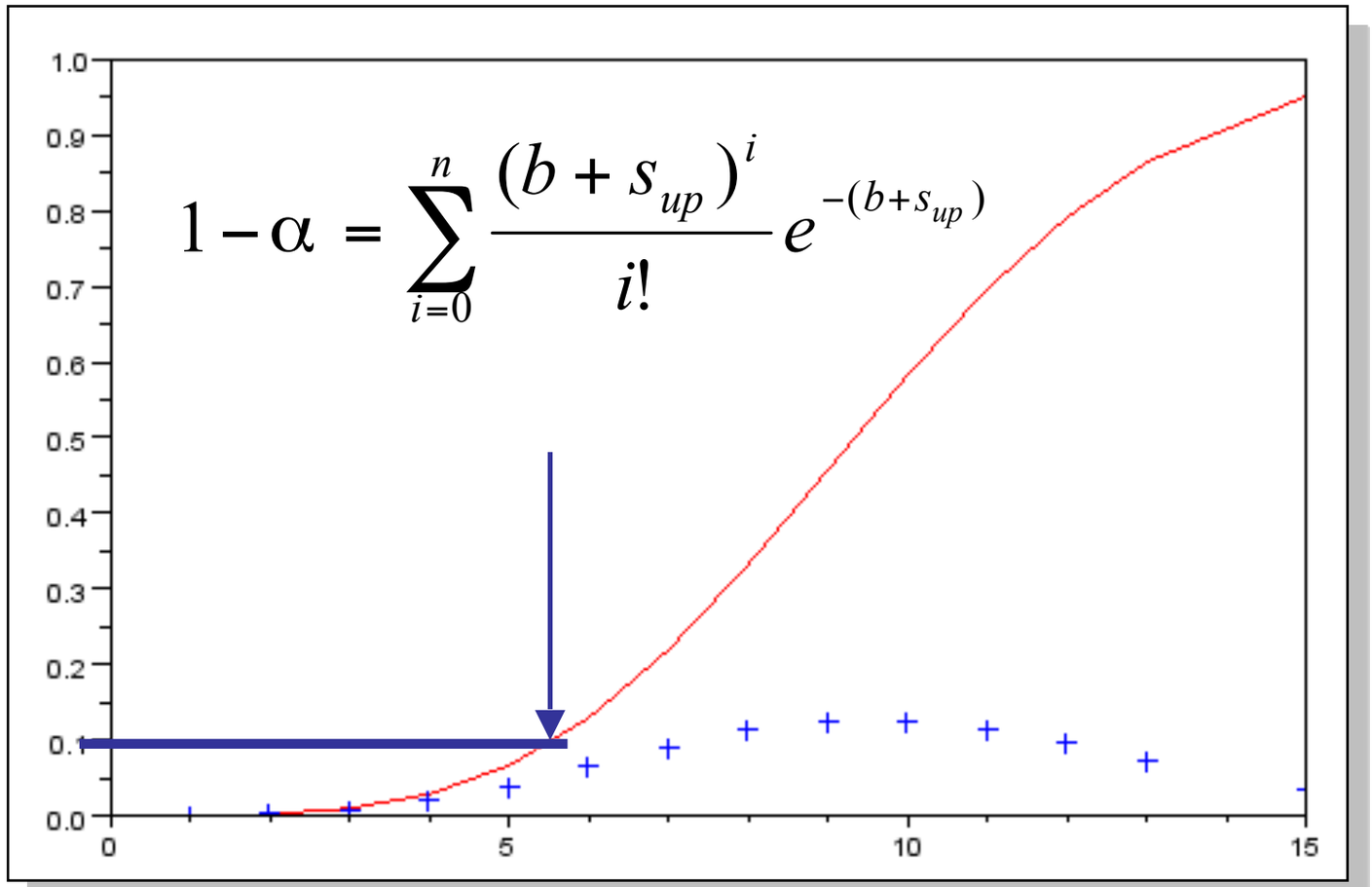
Pongo x misurato (x_{exp}) = estremo superiore dell'integrale per l'ipotesi μ_s

$$x_{\text{exp}} = \mu_s + \mu_b - N(\alpha)\sigma \quad \Rightarrow \quad \mu_{s,up} = x_{\text{exp}} - \mu_b + N(\alpha)\sigma$$

Ricavo $\mu_{s,up}$ in funzione di x misurato e il C.L. fissato

$\mu_{s,up}$ rappresenta il valore di aspettazione massimo che può assumere in base alla misura effettuata il segnale atteso con il livello di confidenza richiesto.

INTERVALLI DI CONFIDENZA E LIMITI



La tecnica per identificare un intervallo mostrata un precedenza ha evidenti limiti.

1. Non risponde alla domanda: *quando devo interpretare il risultato come un limite e quando, invece, posso interpretare il risultato come evidenza di un segnale*.
2. Può dare origine a valori limite negativi. Se non uso la precauzione di slide 23 **

Supponiamo di voler porre un limite sul valore atteso di processo al 90% di C.L.
Sappiamo che la nostra misura è affetta da un fondo con valore atteso b=12.
Se misuriamo sei conteggi (n=6) quale è il limite superiore che possiamo porre al valore atteso del processo incognito (s_{up})?

SENSIBILITA' DI UN ESPERIMENTO

- ***La sensibilita'*** di un esperimento che ricerca un fenomeno ipotetico e raro
  - In assenza di segnale (se la mia misura coincide con il fondo atteso) quale limite al α% di C.L. determino ?
    - Questo limite e' il limite di sensibilità, il ***limite atteso***

- Cosa succede se il mio numero di eventi osservati e' inferiore al numero di eventi di fondo atteso ?
  - I metodi descritti finora mi danno un ***limite*** < ***limite atteso***
  - *Per fluttuazioni grandi in basso del numero di eventi di fondo, posso addirittura ottenere un limite superiore sul segnale <0*
  - ***E' un risultato credibile ???***

INTERVALLI DI CONFIDENZA E LIMITI

Per evitare valori non fisici nel calcolo del valore limite per un processo nel caso di misure con un fondo, nel 1989 G. Zech (**Nucl. Instr. & Meth. A277 608-610 1989**) propone di normalizzare la probabilità del processo fondo + segnale con la probabilità cumulativa del fondo.

$$p(k \mid b+s) = \frac{\frac{(b+s)^k}{k!} e^{-(b+s)}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{(b)^i}{i!} e^{-b}}$$

La probabilita' di un conteggio qualunque ***k*** e' ridefinita come quella Poissoniana divisa per la cumulativa del fondo calcolata al numero di eventi osservato ***n***

$s=0 \Rightarrow P(n<n_{exp}|s=0)=100\%$

Per definizione

Dato che ho osservato n eventi, il fondo può assumere solo valori compresi tra 0 e n. La mia distribuzione di probabilità, quindi, deve essere tale che in caso di presenza di solo fondo (s=0) sia normalizzata ad 1. Usando il metodo proposto da Zech, quindi, per calcolare il limite per un dato valore α di confidenza occorre risolvere rispetto a s_{up} la seguente equazione.

$$1-\alpha = \frac{\sum_{i=0}^{n} \frac{(b+s_{up})^i}{i!} e^{-(b+s_{up})}}{\sum_{i=0}^{n} \frac{(b)^i}{i!} e^{-b}}$$

LIMITE O SCOPERTA ?

In questa trattazione sto implicitamente assumendo che sono convinto che il valore osservato NON è indicativo della presenza del fenomeno per cui lo scopo è, in base alla sensibilità del mio esperimento, stabilire qual è il valore massimo che il parametro può assumere dato che io NON vedo il fenomeno.

LIMITE O SCOPERTA ?

Dato un esperimento per misurare una grandezza quando decido che il mio risultato deve portare a un limite (non scoperta) e quando invece ad una scoperta?

Consideriamo per esempio di supporre che un potenziale fenomeno segua una distribuzione gaussiana con varianza nota pari a 1 e di voler valutare in base alla misura sperimentale se vi sia evidenza o no del processo.

Proviamo a dare una risposta “ragionevole” alla domanda precedente.

Potremmo per esempio dire che: **se la misura x non eccede il fondo di almeno 3 sigma allora non possiamo fare l’annuncio della nuova scoperta e quindi calcoleremo un limite superiore al processo con C.L. del 90%. Se invece troveremo un valore maggiore di 3 sigma allora annunceremo la scoperta e individueremo un intervallo di confidenza al 90% entro il quale si trova il valore vero.**

Potremo anche completare la nostra risposta assumendo che **se nel calcolo dell’eccesso sul fondo dovessimo riscontrare un valore negativo (non fisico) allora assumeremo di aver misurato 0.**

LIMITE O SCOPERTA ?

p.d.f. gaussiana per il fondo con

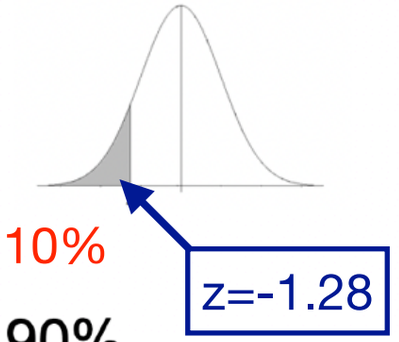
Convertiamo l'affermazione precedente in un diagramma alla Neyman che identifichi la banda di confidenza. Assumiamo sigma = 1 e fondo = 0

Sino a quando x<3 (abbiamo assunto sigma nota =1) allora metto un limite al 90%

$$\int_{-\infty}^{x_1(\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx = 1-\alpha = 0.1 \Rightarrow \quad x_1(\mu) = \mu - 1.28 \quad (*)$$

$$x_2(\mu) = \infty$$

$\mu < x+1.28$ al 90% di C.L.

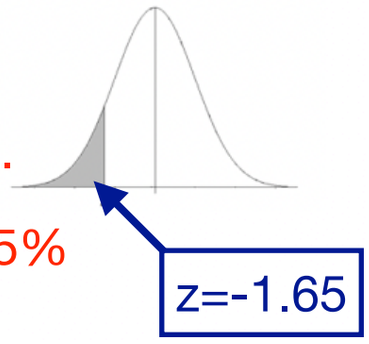


Se x>3 annuncio la scoperta e definisco un intervallo di confidenza al 90%

$$\int_{-\infty}^{x_1(\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx = \frac{1-\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow \quad x_1(\mu) = \mu - 1.65 \quad (**)$$

$x-1.65 < \mu < x+1.65$ al 90% di C.L.

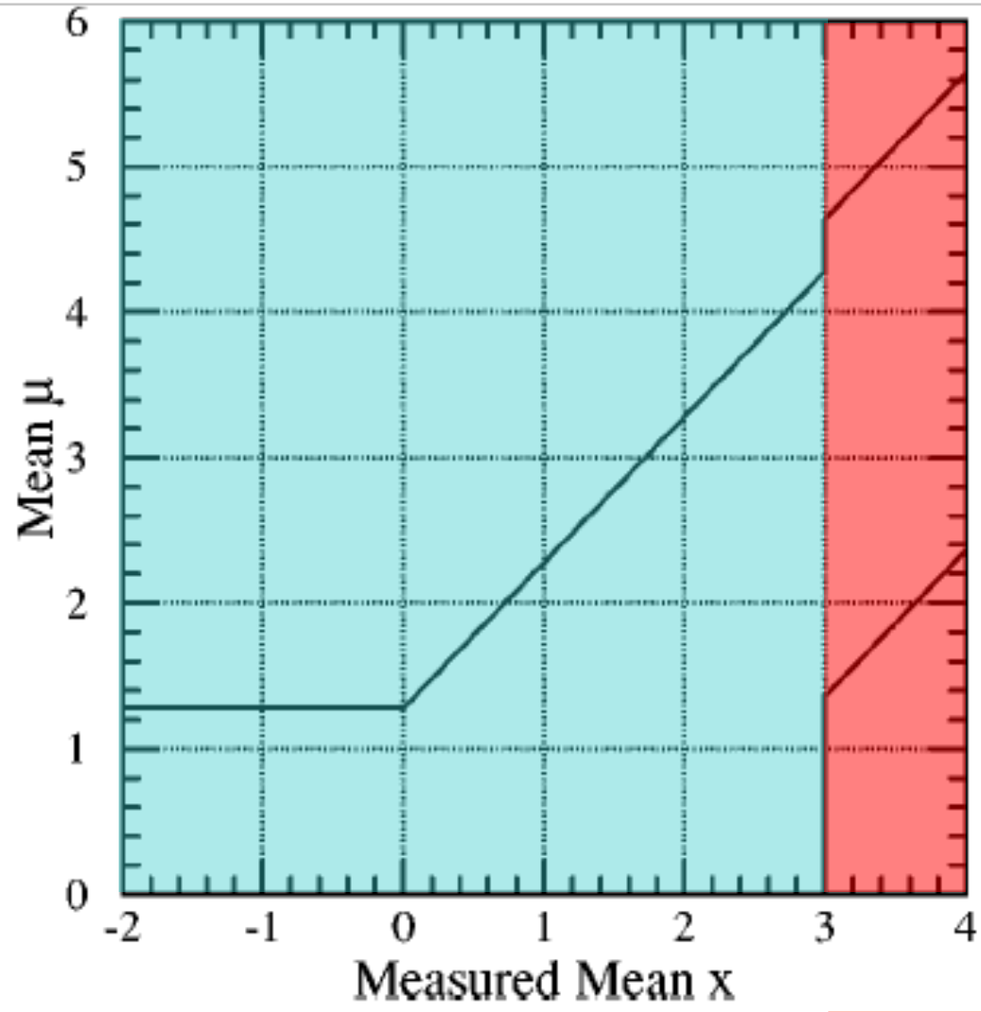
$$\int_{-\infty}^{x_2(\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx = \frac{1+\alpha}{2} = 0.95 \Rightarrow \quad x_2(\mu) = \mu + 1.65 \quad (***)$$



Se x<0 (regione non fisica) assumo di aver misurato 0 e pongo lo stesso limite che otterrei per x=0. Ossia μ=1.28, dalla (*) $\mu < 0+1.28$ al 90% di C.L. **

LIMITE O SCOPERTA ?

- Le condizioni che definiscono la ragione di confidenza sono quindi:



μ < 0+1.28 al 90% di C.L.
per x<0

x-1.65 < μ < x+1.65
al 90% di C.L.
per x>3

μ < x+1.28
al 90% di C.L.
per 0<x<3

scoperta

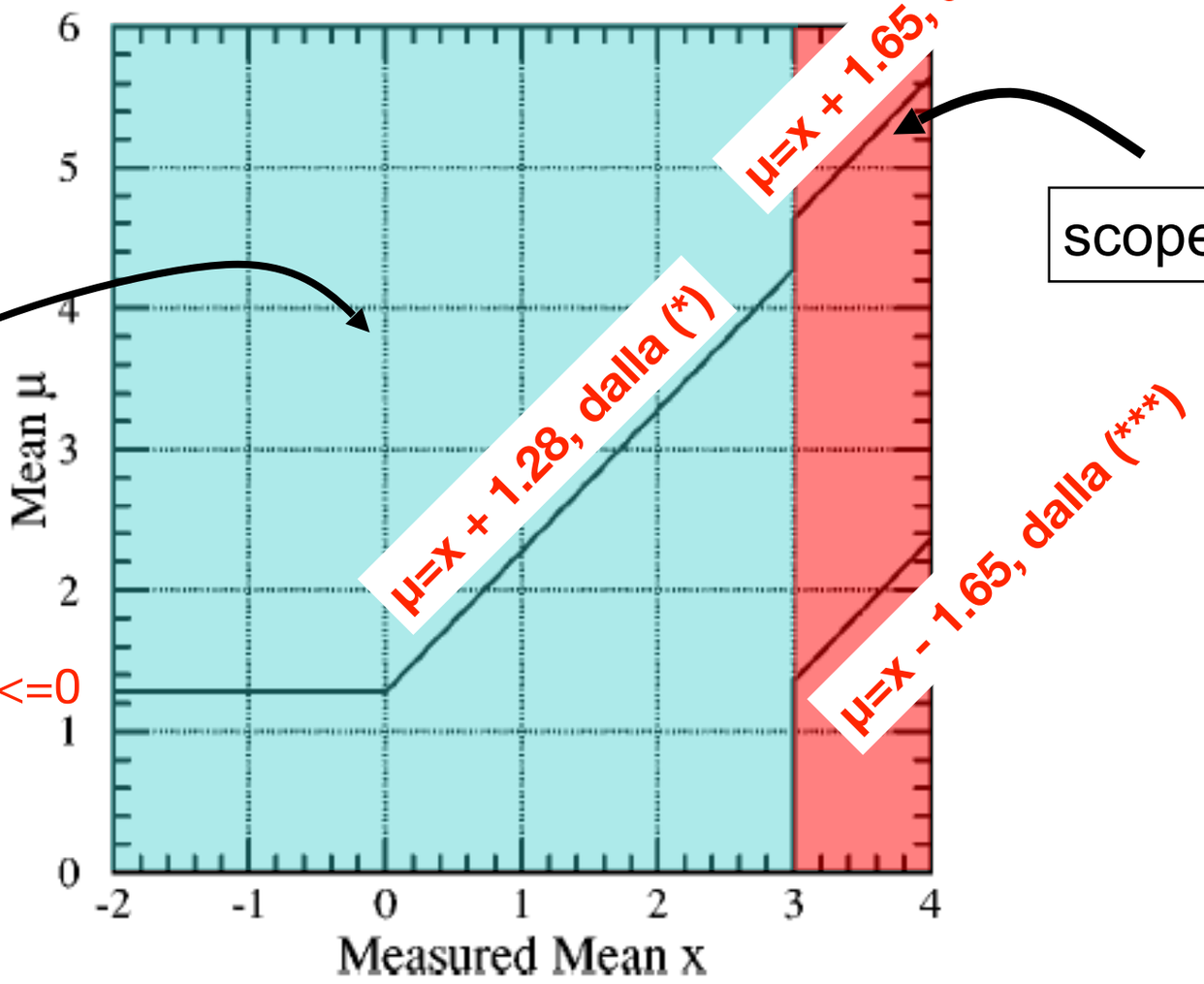
LIMITE O SCOPERTA ?

Convertiamo l'affermazione precedente in un diagramma alla Neyman che identifichi la banda di confidenza.

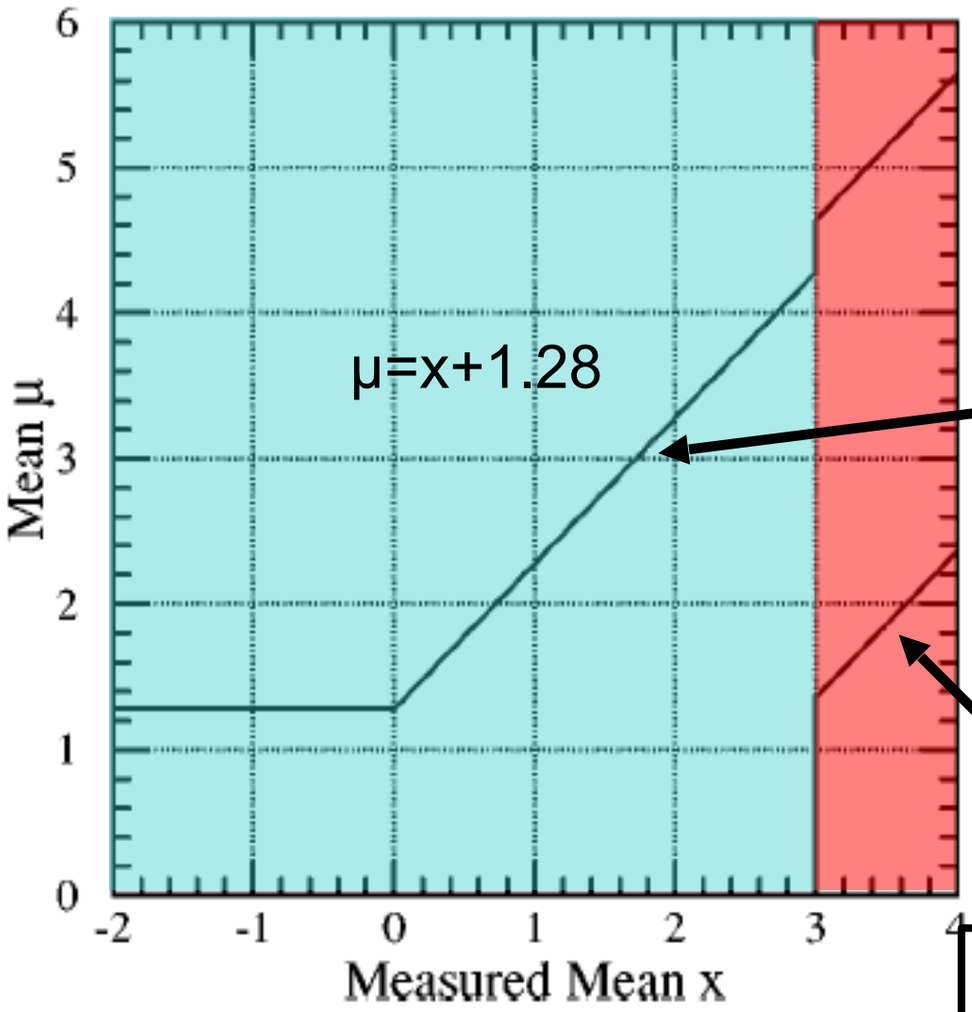
Measured Mean
X = Osservazione - fondo

Upper limit

μ=1.28, dalla (*) per x<=0



LIMITE O SCOPERTA ?



μ=x+1.65

μ=x-1.65

Measured Mean
X = Osservazione - fondo

$$\int_{-\infty}^{x_1(\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx = 1-\alpha = 0.1 \Rightarrow \quad x_1(\mu) = \mu - 1.28$$

$$x_2(\mu) = \infty$$

μ=x+1.28

$$\int_{-\infty}^{x_1(\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx = \frac{1-\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow \quad x_1(\mu) = \mu - 1.65$$

μ=x+1.65

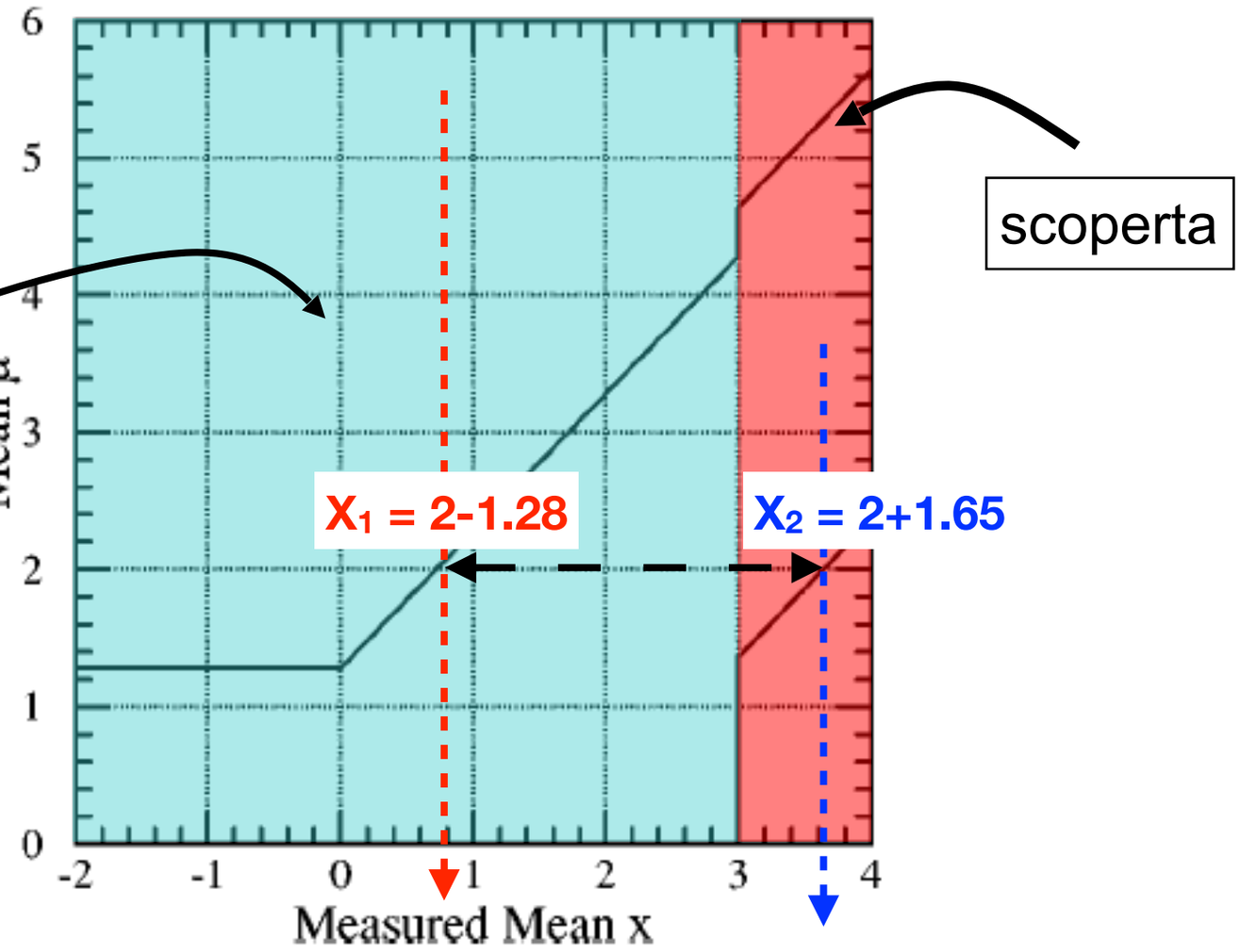
$$\int_{-\infty}^{x_2(\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx = \frac{1+\alpha}{2} = 0.95 \Rightarrow \quad x_2(\mu) = \mu + 1.65$$

μ=x-1.65

LIMITE O SCOPERTA ?

Measured Mean
X = Osservazione - fondo

Upper limit



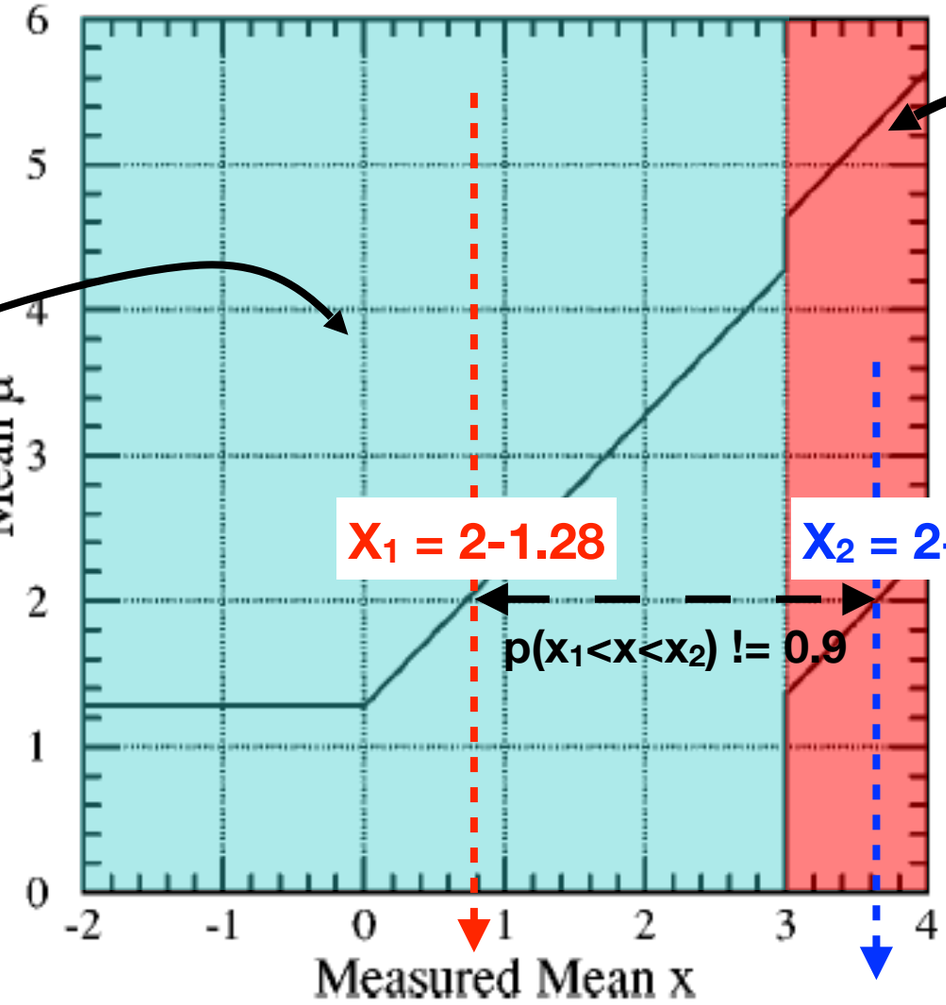
Si vede come gli intervalli di confidenza ottenuti non soddisfano le richieste.
Se per esempio il valore vero fosse μ=2, l'intervallo identificato (2-1.28, 2+1.65) non contiene il richiesto 90% di probabilità.

LIMITE O SCOPERTA ?

Convertiamo l'affermazione precedente in un diagramma alla Neyman che identifichi la banda di confidenza.

Measured Mean
X = Osservazione - fondo

Upper limit



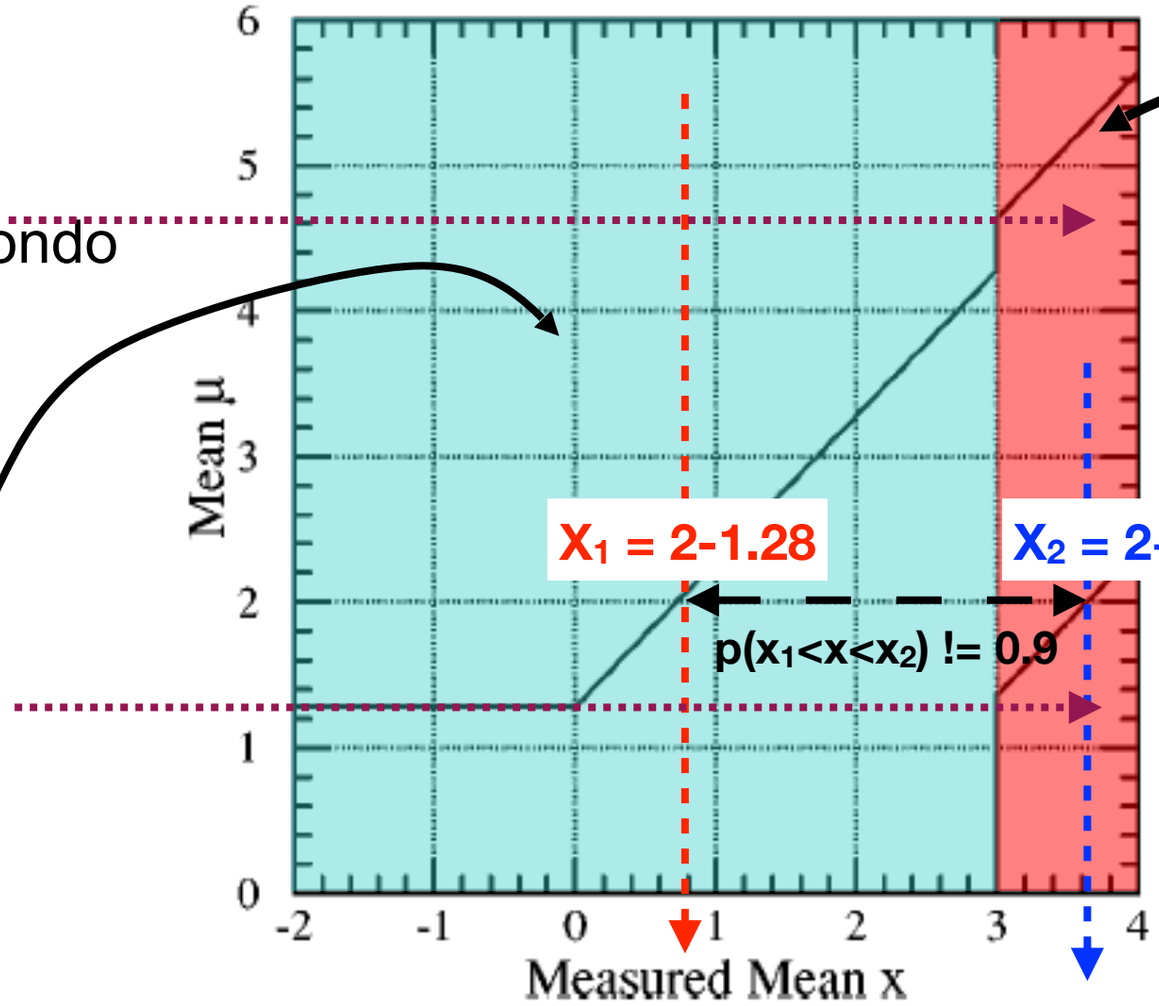
La costruzione della banda di confidenza *non rispetta il criterio generale richiesto*, ossia p(x_1<x<x_2) = 0.9

Si vede come gli intervalli di confidenza ottenuti non soddisfano le richieste.
Se per esempio il valore vero fosse μ=2, l'intervallo identificato (2-1.28, 2+1.65) non contiene il richiesto 90% di probabilità.

LIMITE O SCOPERTA ?

Convertiamo l'affermazione precedente in un diagramma alla ***Neyman*** che identifichi la banda di confidenza.

Measured Mean
X = Osservazione - fondo



Upper limit

scoperta

La costruzione della banda di confidenza *non rispetta il criterio generale richiesto*, ossia p(x_1<x<x_2) = 0.9

l'intervallo di x identificato non contiene il 90% di probabilità come e' richiesto

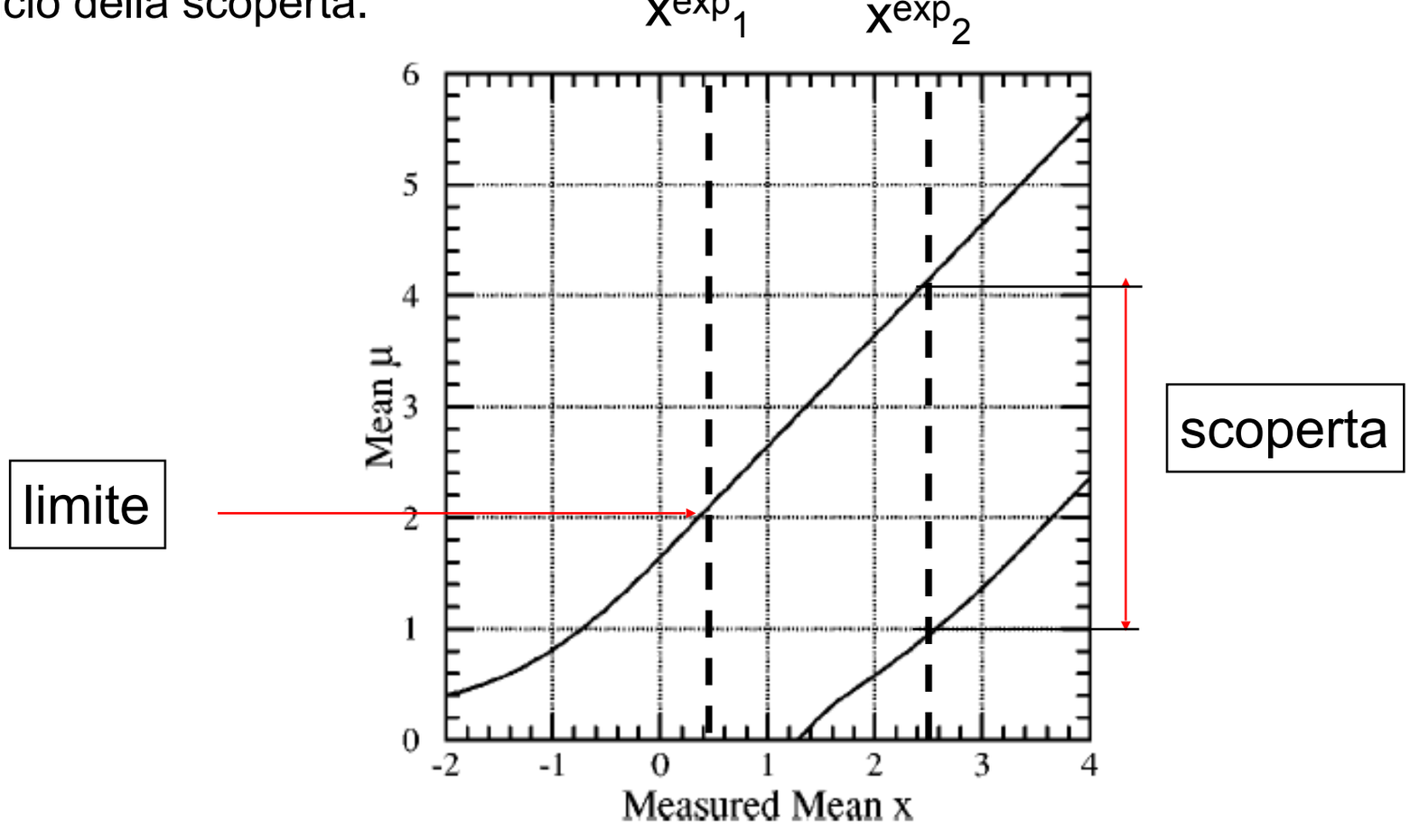
NOTA: Questo succede per ogni μ compreso tra 1.28 e 4.65

INTERVALLI DI CONFIDENZA E LIMITI

Una soluzione più generale secondo la scuola frequentista a questo problema è stata proposta da G.R. Feldman e R.D. Cousins (Phys. Rev. D 57, 3873-3889 (1998)).

La proposta di F & C consiste nell'***utilizzare un rapporto di Likelihood per costruire la banda di confidenza***.
Una volta individuata la banda si potrà agire nella maniera tradizionale.
Dato un valore sperimentale individuare la o le sue intersezioni con la banda:

- se l'intersezione è una sola allora pongo un limite
- se sono due faccio l'annuncio della scoperta.



RICORDA: ESISTE UNA AMBIGUITÀ

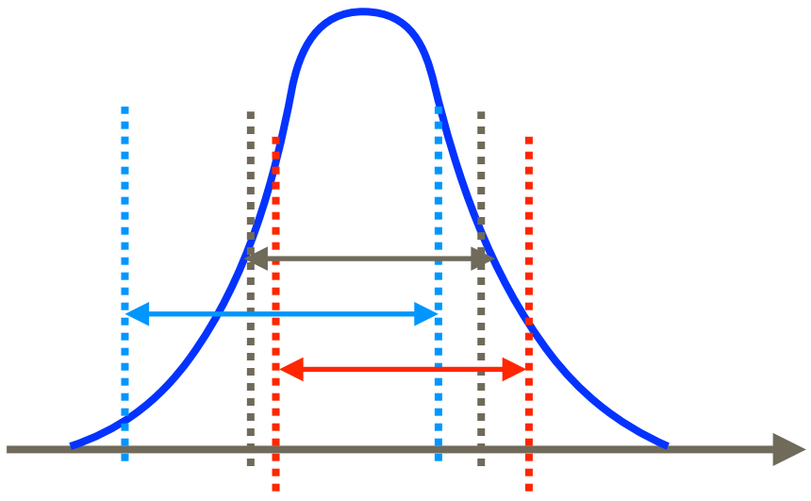
The Neyman confidence interval construction does not specify how you should draw, at fixed μ, the interval over the measured value that contains 90% of the probability content.

There are various different prescriptions:

1) add all x values greater than or less than a given value (upper limit or lower limit)
2) draw a central region with equal probability of the measurement falling above the region as below
3) starting with the parameter value which has maximum probability, keep adding points from more probable to less probable until the region contains 90% of the probability
4) The Feldman-Cousins prescription

INTERVALLI DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN

FELDMAN AND COUSIN



Per esempio

$$P(x_{1,1} < x < x_{1,2}) = P(x_{2,1} < x < x_{2,2}) = P(x_{3,1} < x < x_{3,2})$$

Quale di questi intervalli scegliamo ?

INTERVALLI DI CONFIDENZA E LIMITI

Il rapporto di Likelihood proposto è

$$R(x) = \frac{P(x \mid \mu)}{P(x \mid \mu_{best})}$$

Dove μ_{best} identifica il valore di μ che massimizza la P in corrispondenza del risultato x, con la precauzione che μ_{best} non potrà essere negativo (regione non fisica).

L'idea di F & C consiste nell'applicare un test di ipotesi per verificare se il parametro incognito ha valore vero μ.

Si assume come ipotesi nulla che il parametro sia pari ad un certo valore μ e come ipotesi alternativa che questo non sia vero. In questo modo si escludono tutti i valori del parametro al di sotto di un livello prefissato di significatività. Tutto ciò che resta è il mio intervallo di confidenza.

INTERVALLI DI CONFIDENZA E LIMITI

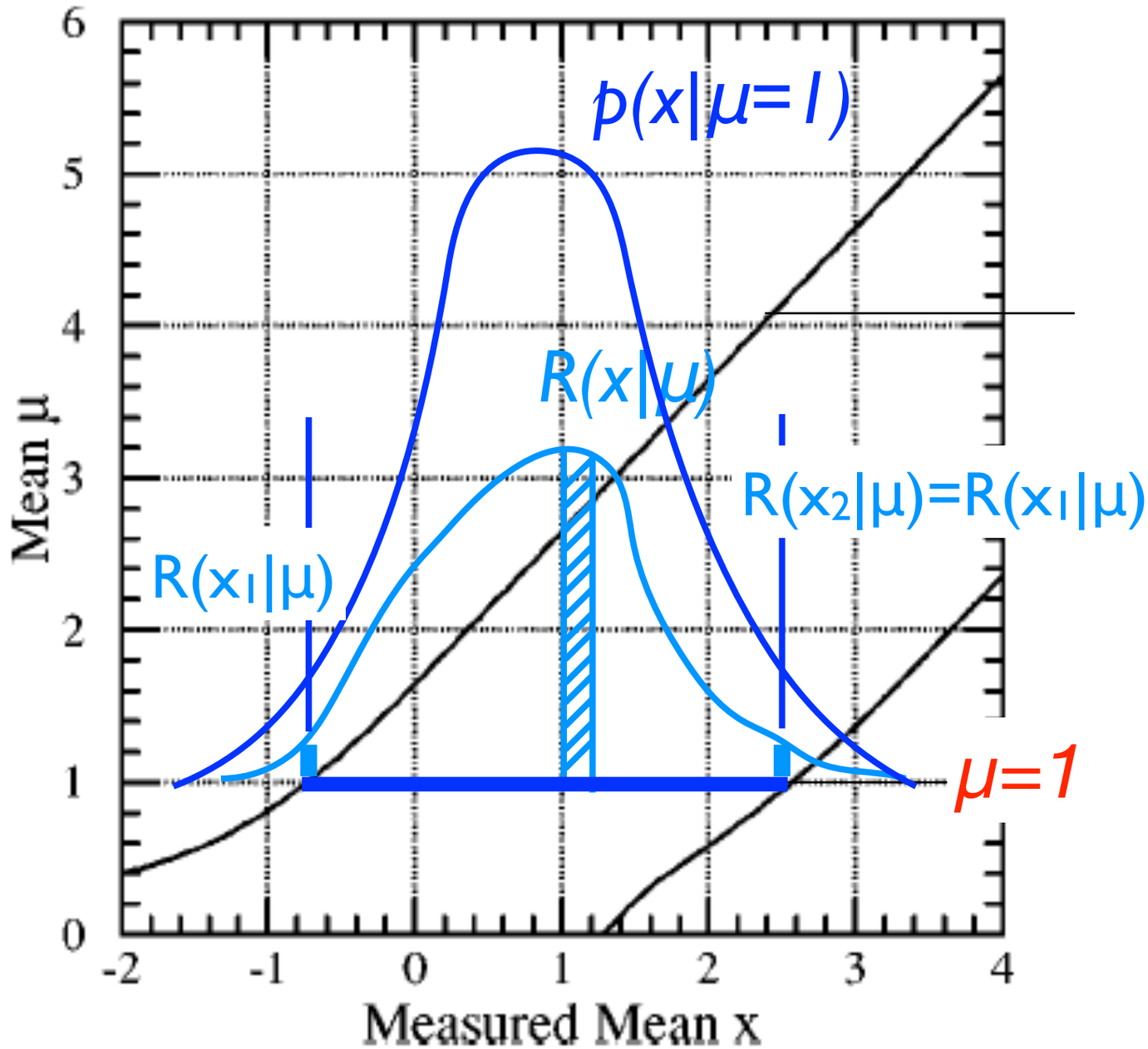
Per un valore di μ fissato
considero R(x| μ);
Trovo il valore x_0 di x che massimizza R(x|μ)
Apro un intervallo attorno a x_0 aggiungendo progressivamente valori di x *secondo l'ordine decrescente di R*, fino a che

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} p(x\,|\,\mu)dx < \alpha$$

Gli estremi dell'intervallo saranno

x_1 e x_2 tali che $\int_{x_1}^{x_1} p(x\,|\,\mu)dx = \alpha$

Naturalmente quindi $R(x_1\,|\,\mu) = R(x_2\,|\,\mu)$



Intervalli di Confidenza e Limiti

Per ogni valore fissato di μ (es. in figura μ=1)

1) considero **R(x|μ=1)** = P(x|1)/P(x | μ_{best});

2) Trovo il valore x_0 di x che massimizza R(x|μ)

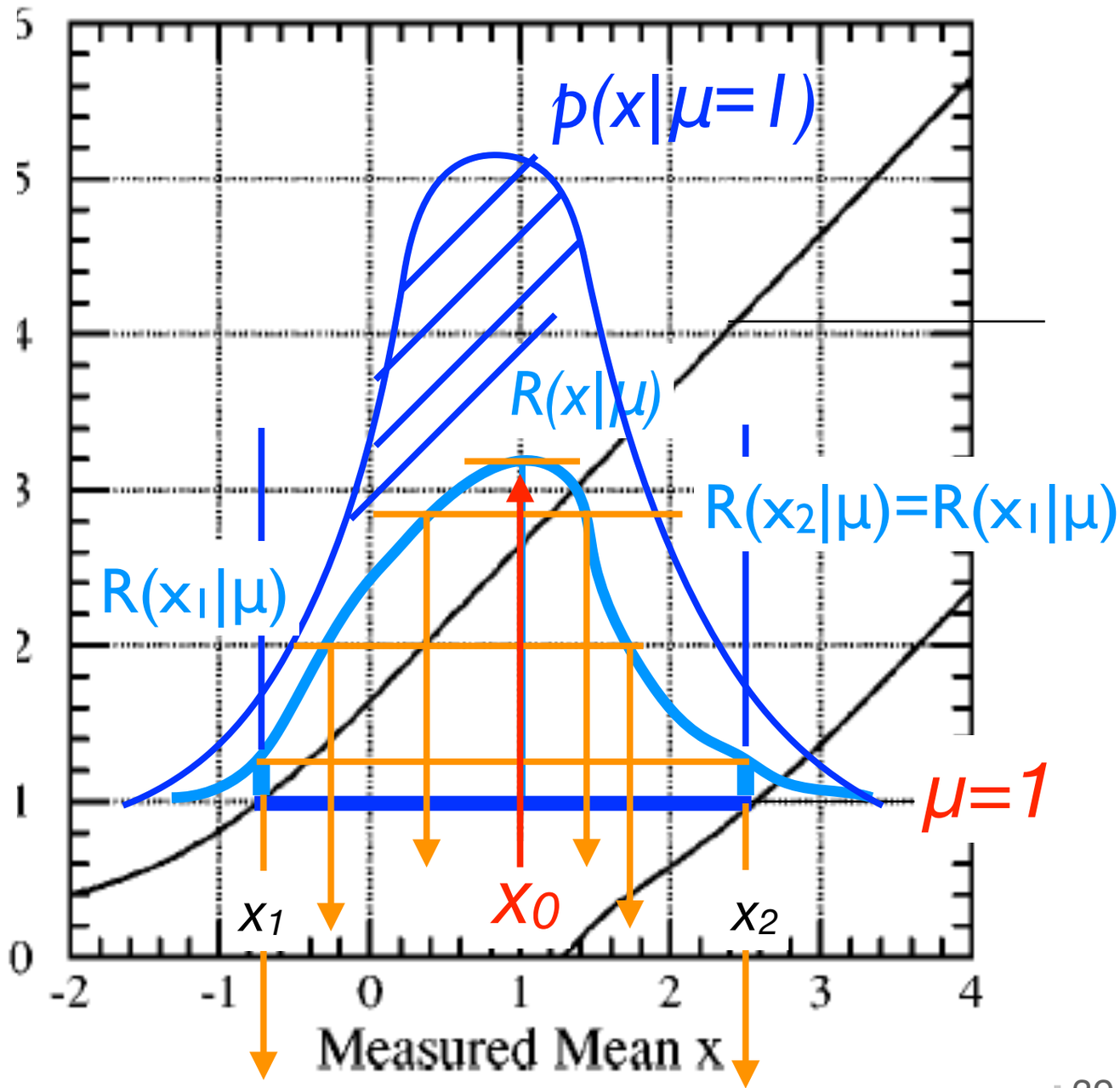
3) Apro un intervallo attorno a x_0 aggiungendo progressivamente valori di x *secondo l'ordine decrescente di R*, fino a che

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} p(x|\mu=1)dx < \alpha$$

4) Gli estremi dell'intervallo saranno

x_1 e x_2 tali che $\int_{x_1}^{x_1} p(x|\mu)dx = \alpha$

Naturalmente quindi $R(x_1|\mu) = R(x_2|\mu)$



INTERVALLI DI CONFIDENZA E LIMITI

$$R(x) = \frac{P(x \mid \mu)}{P(x \mid \mu_{best})}$$

Operativamente, il rapporto di Likelihood serve a identificare i valori per ogni μ delle x che devono essere inseriti all'interno della regione di confidenza.

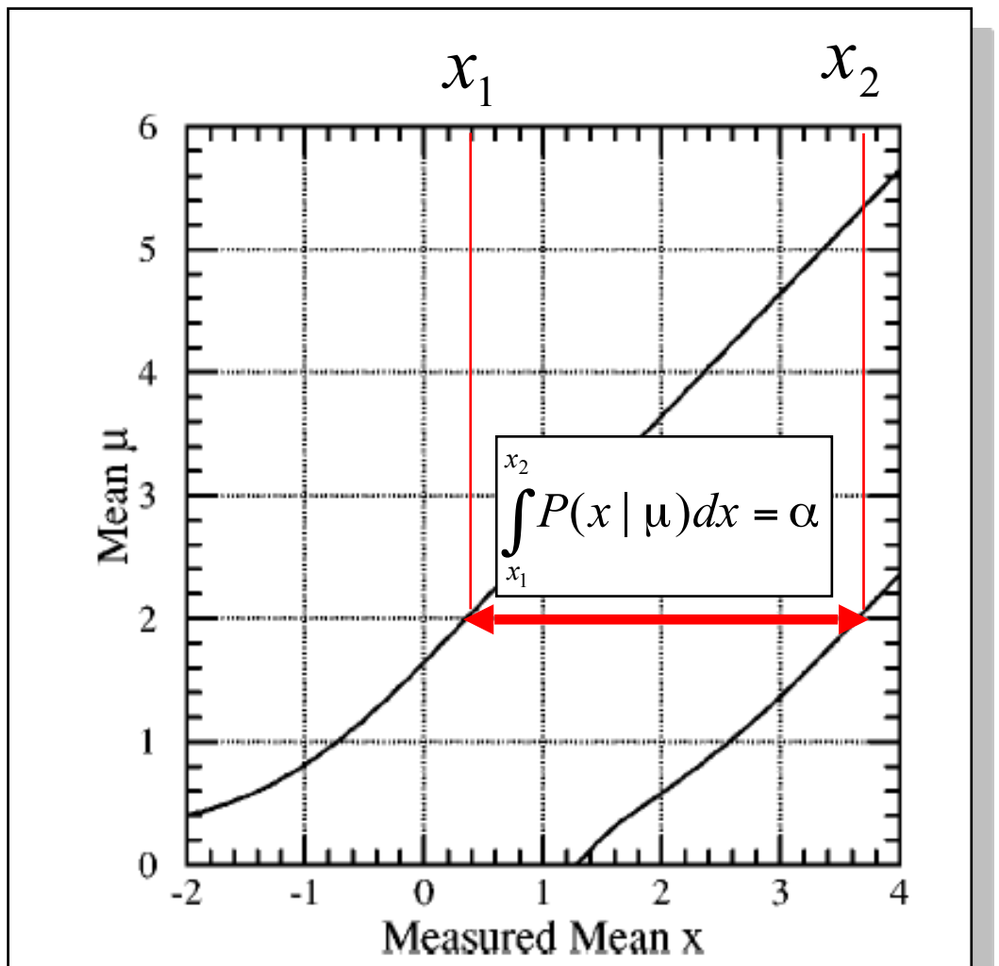
Dato un certo μ identificherò il valore x_0 per il quale la R(x) è massima e a partire da questo allargherò progressivamente l'intervallo aggiungendo via via altri valori di x sino a quando l'intervallo non conterrà la frazione di probabilità voluta (α).

In pratica questo significa, per un dato valore di μ, trovare l'intervallo [x1,x2] tale che:

$$R(x_1) = R(x_2)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} P(x \mid \mu) dx = \alpha$$

INTERVALLI DI CONFIDENZA E LIMITI



$$R(x_1) = R(x_2)$$

$$f(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

$$R(x) = \frac{L(x \mid \mu)}{L(x \mid \mu_{best})} = \frac{f(x \mid \mu)}{f(x \mid \mu_{best})}$$

Nel caso della gaussiana con varianza unitaria la migliore stima di μ dato un certo x coincide con x. Nel caso in cui x<0 allora si prende 0. Quindi μ_{best}=max(0,x). Ho quindi che:

$$f(x \mid \mu_{best}) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & x \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} & x < 0 \end{cases}$$

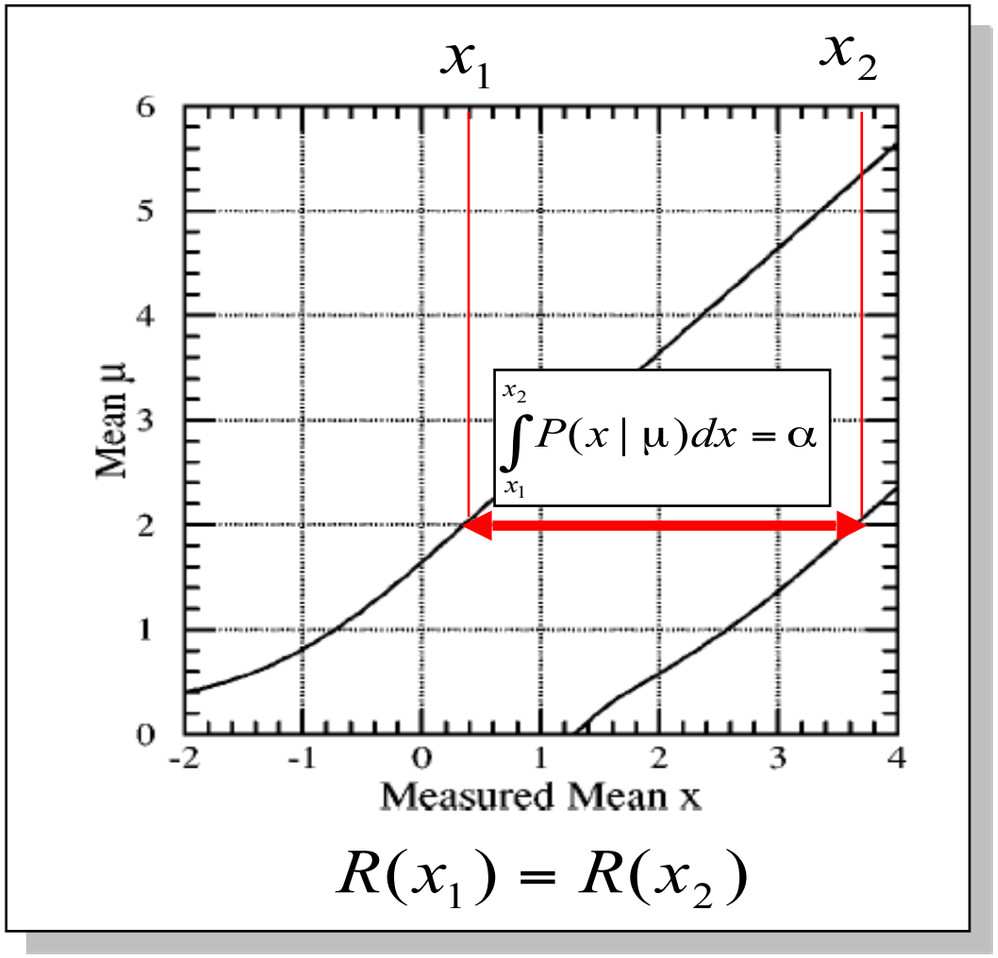
Quando μ best = x

Quando μ best = 0

Per cui

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} = e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} & x \geq 0 \\ \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}} = e^{\frac{(2x\mu-\mu^2)}{2}} & x < 0 \end{cases}$$

INTERVALLI DI CONFIDENZA E LIMITI



Gli estremi della banda di fiducia sono dati dalle soluzioni del sistema:

$$R(x_1) = R(x_2) \Rightarrow \quad e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2}} = e^{-\frac{(x_2-\mu)^2}{2}} \qquad x_2 > x_1$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx = \alpha$$

$$\int_{-\infty}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx - \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx = \alpha$$

L'approccio di F & C è utilizzabile anche nel caso di distribuzioni di Poisson o per determinare regioni di confidenza nel caso di più parametri determinati da una procedura di regressione.

La tecnica è molto usata in fisica delle alte energie nel trattare processi rari.

INTERVALLI DI CONFIDENZA E LIMITI

Applichiamo il metodo a un processo di tipo Poissoniano con l'aggiunta di un fondo.
(Caso estremamente frequente, si pensi ai vari esempi fisici presentati)

Assumiamo che il fondo noto abbia un valore atteso b=3, si vuole stimare in base ad una misura se al fondo si somma un segnale con valore atteso s oppure no.

Utilizzando la tecnica di F&C dovrei per ogni possibile valore di s costruire il rapporto di Likelihood

$$R(n) = \frac{P(n \mid s)}{P(n \mid s_{best})}$$

In questo caso la distribuzione di probabilità è una Poisson

$$P(n \mid s) = \frac{(s+b)^n e^{-(s+b)}}{n!}$$

INTERVALLI DI CONFIDENZA E LIMITI

Dal momento che abbiamo una singola misura, s_{best} coincide con la differenza tra la misura e il valore atteso per il fondo con il limite di mantenersi maggiore di 0.

$$s_{best}=\max(0,n-b)$$

Dovrei, quindi, ordinare i vari termini in base a valori decrescenti di R e sommare le corrispondenti p(n|s) sino a superare il valore di confidenza richiesto

Avendo tutti gli ingredienti è possibile calcolare i valori di R(n) per ogni particolare s.
Per esempio, per s=0.5.

n=0 b=3 s=0.5 $s_{best}=\max(0,0-3)=0$ $$R(0)=\frac{\frac{(0.5+3)^0 e^{-(0.5+3)}}{0!}}{\frac{(0+3)^0 e^{-(0+3)}}{0!}}=\frac{e^{-(3.5)}}{e^{-(3)}}=0.607$$

n=1 b=3 s=0.5 $s_{best}=\max(0,1-3)=0$ $$R(1)=\frac{\frac{(0.5+3)^1 e^{-(0.5+3)}}{1!}}{\frac{(0+3)^1 e^{-(0+3)}}{1!}}=\frac{3.5e^{-(3.5)}}{3e^{-(3)}}=0.708$$

INTERVALLI DI CONFIDENZA E LIMITI

b=3, s=0.5(valore del parametro)

n	p(n|s)	s_{best}	$p(n\|s_{best})$	R(n)	indice
0	0.030	0.0	0.050	0.607	6
1	0.106	0.0	0.149	0.708	5
2	0.185	0.0	0.224	0.826	3
3	0.216	0.0	0.224	0.963	2
4	0.189	1.0	0.195	0.966	1
5	0.132	2.0	0.175	0.753	4
6	0.077	3.0	0.161	0.480	7
7	0.039	4.0	0.149	0.259	
8	0.017	5.0	0.140	0.121	
9	0.007	6.0	0.132	0.050	
10	0.002	7.0	0.125	0.018	
11	0.001	8.0	0.119	0.006	

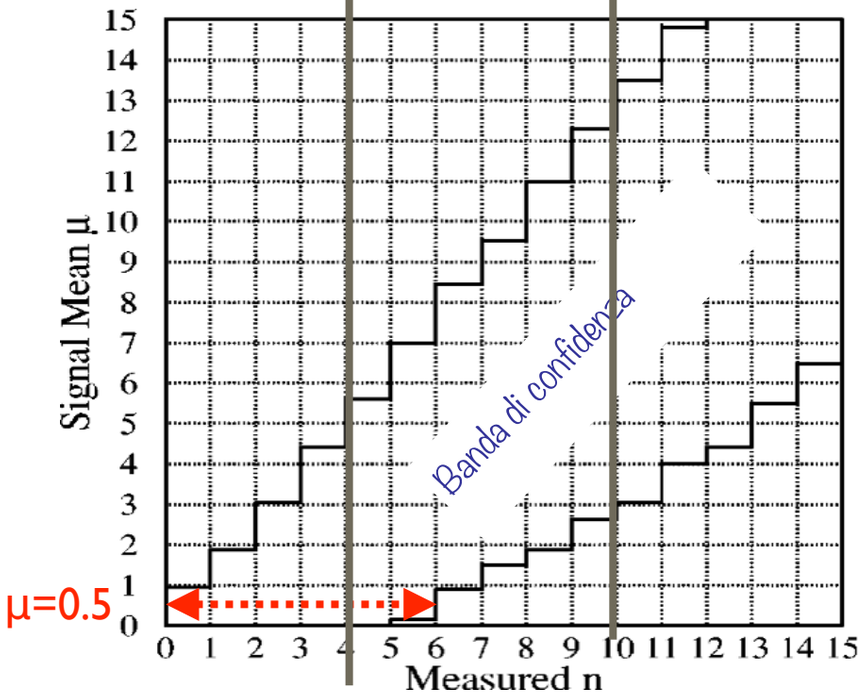
Poisson(s) Poisson(s_best)

Per costruire l'intervallo di confidenza i vari n vanno aggiunti secondo l'ordine indicato nell'ultima colonna (che indica i valori decrescenti di R) sino a raggiungere il livello di significatività voluto.

Sum(P(n|s)) = 0.189+
0.216+
0.185+
0.132+
0.106+
0.030+
0.077 = 0.935 > 0.9

=====>>> x1 = 0, x2 = 6

INTERVALLI DI CONFIDENZA E LIMITI



Considerando diversi valori di μ si procede costruendo i vari intervalli [x1,x2] per ottenere la banda di confidenza

Come si vede anche nel caso di una distribuzione di Poisson, la banda ottenuta risolve il problema dell'indecisione se porre un limite o annunciare una scoperta.

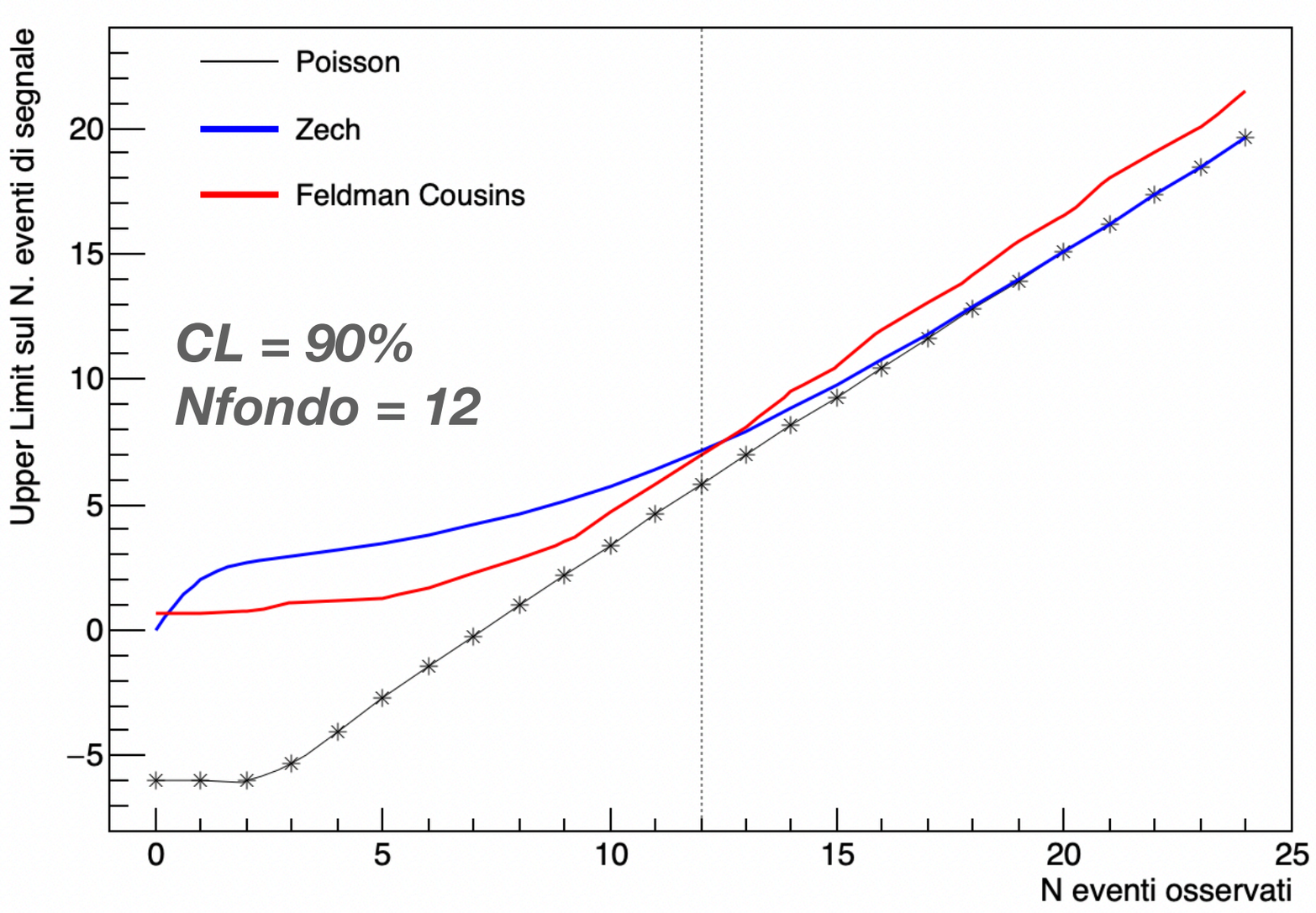
ESERCIZI

Confronto dei metodi per il calcolo dei limiti

ESERCIZI

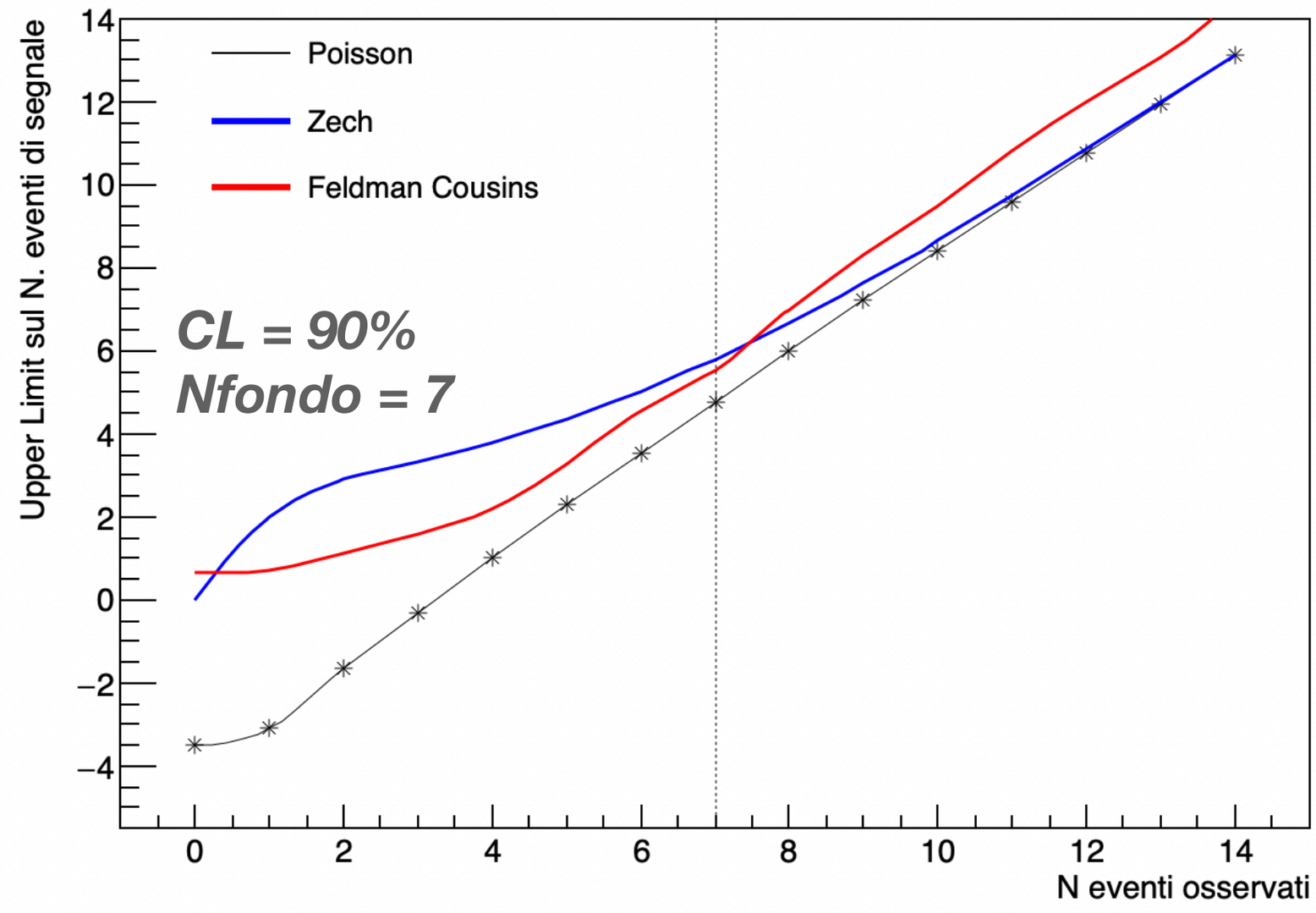
Macro plotLimiti.C

- Osservazioni
  - Poisson da limiti negativi per conteggi inferiori a ~7
  - Zech: limite sempre >0 [tranne a Nosservati=0]
  - FC: limite sempre >0 [anche a Nosservati=0]
  - Limite Zech ~ Limite Poisson per N >~ 17
  - UL FC > UL Poisson sempre !



ESERCIZI

Macro plotLimiti.C



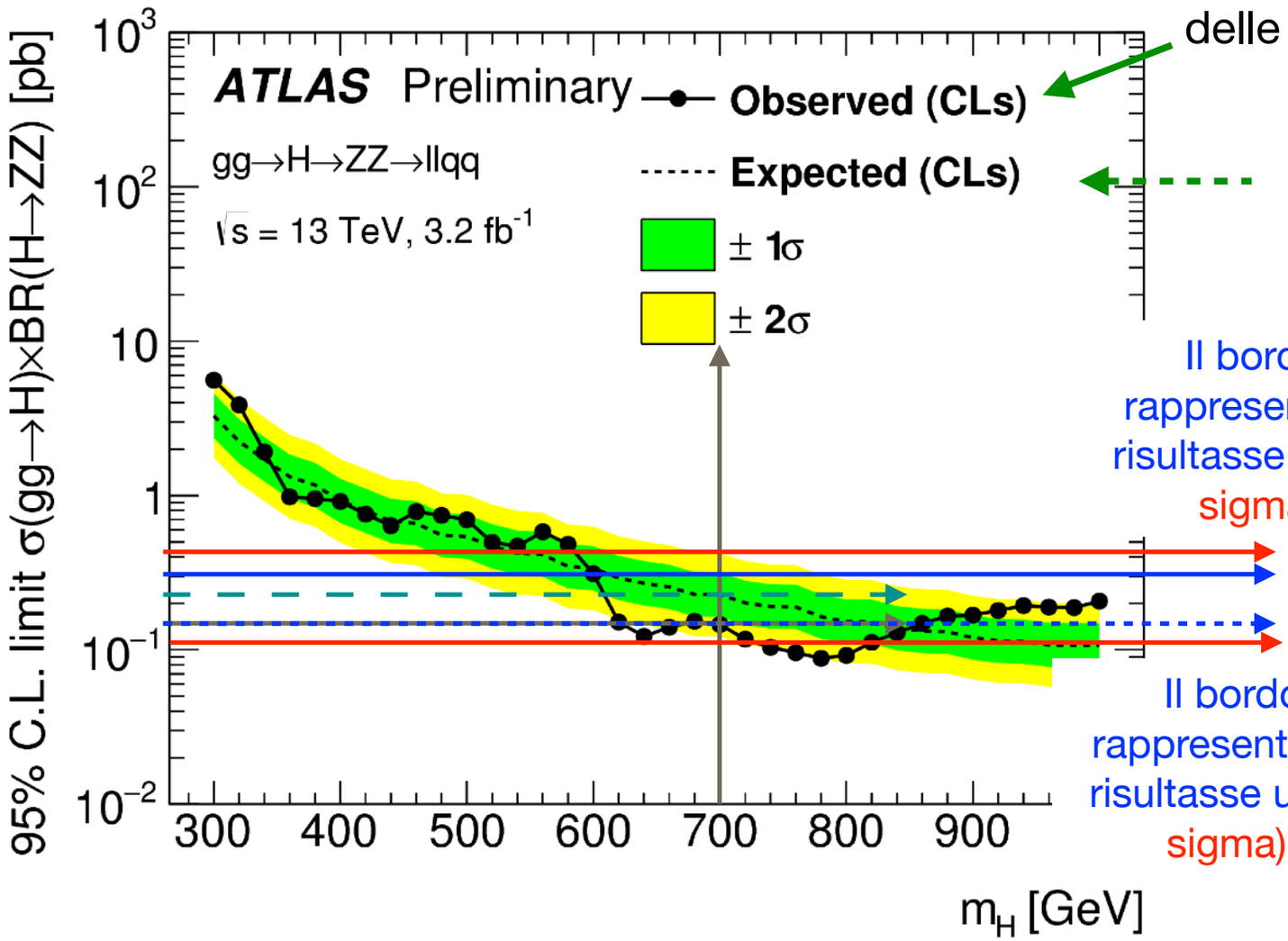
METODO CLS

Analogo a Zech - non solo nel caso di pdf Poissoniana

ATLAS-CONF-2016-016

https://cds.cern.ch/record/2141005/files/ATLAS-CONF-2016-016.pdf

Exclusion limits are calculated with a modified frequentist method [83], also known as CLs , using the $\tilde{q}_\mu$ test statistic in the asymptotic approximation [84, 85]. The observed and expected 95% confidence level (CL) upper limits on σ × BR as functions of the resonance mass are shown in Fig. 4(a)



Limite ottenuto sulla base delle misure effettive

Limite atteso con il metodo CLs quando la misura coincide con il background = ***limite di sensibilità***

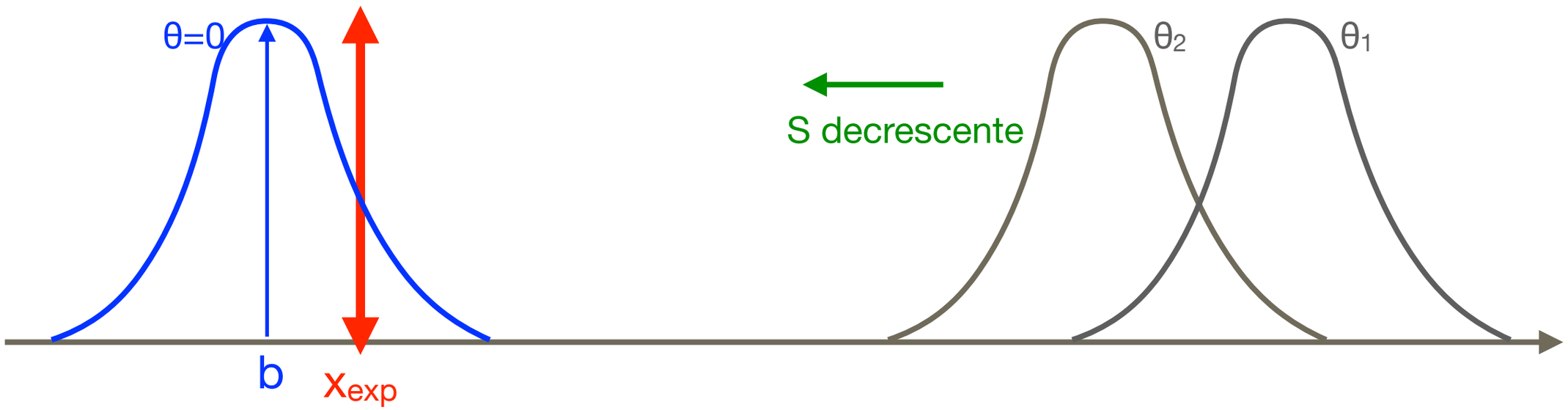
Il bordo superiore della banda verde (gialla) rappresenta il limite che si otterrebbe se la misura risultasse uguale al background atteso+1sigma (+2 sigma) con sigma = errore stat. sul fondo)

Il bordo inferiore della banda verde (giallo) rappresenta il limite che si otterrebbe se la misura risultasse uguale al background atteso-1sigma (-2 sigma) con sigma = errore stat. sul fondo)

Observed and expected 95% CL upper limits on the production cross section of a heavy resonance at √s=13 TeV times its decay branching ratio to a Z boson pair for H→ ZZ

METODO CLS

Distribuzioni della test statistics $\tilde{q}_\mu$ funzione di un parametro θ che determina il numero di eventi di segnale, che si sommano al background



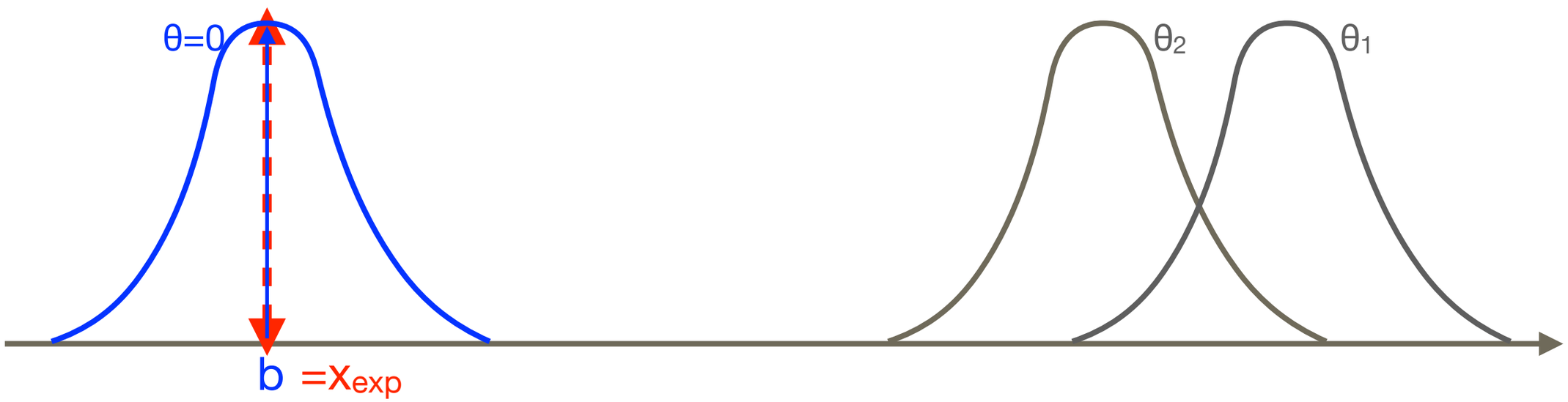
Molto frequentemente la misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$

n_b ha un valore di aspettazione uguale a *b*, ma fluttua secondo una pdf, la pdf corrispondente ad assenza di segnale, $f(x|\theta = 0)$

Le nostre $f(x|\theta)$ descrivono in generale la probabilita' di x in presenza di un segnale s(θ) e di un background che ha valore di aspettazione b

Se nella realta' θ=0, ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la $f(x|\theta = 0)$

METODO CLS



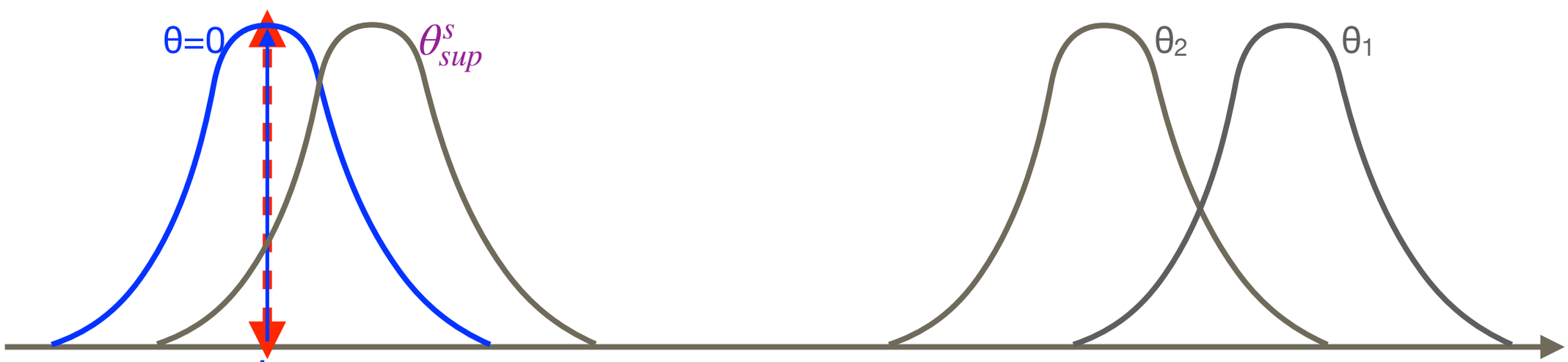
La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$

Se nella realta' θ=0, ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la $f(x \mid \theta = 0)$

Se immagino di ottenere x_{exp} = b qual e' il limite θ_{sup} che otterrò ?

METODO CLs

$$p(x < b \,|\, \theta = \theta^s_{sup}) = \int_{-\infty}^{b} f(x; \theta^s_{sup})\, dx = 10\,\%$$



b =x_{exp}

La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$

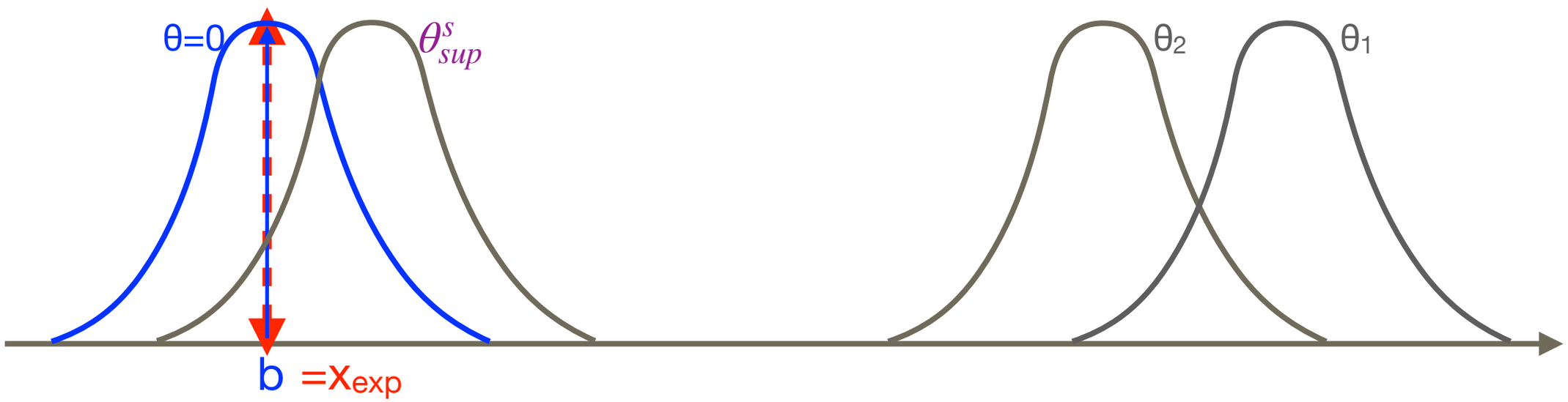
Se nella realta' θ=0, ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la $f(x \,|\, \theta = 0)$

Se immagino di ottenere x_{exp} = b qual e' il limite θ_{sup} che otterrò ?

Chiamo questo valore θ^s_{sup}, si tratta del ***limite di sensibilita'*** del mio esperimento (determinato dal background) e corrisponde [vedremo con un toy MC] al limite atteso, nell'ipotesi di solo background (assenza di segnale, θ=0)

METODO CLs

$$p(x < b \,|\, \theta = \theta^s_{sup}) = \int_{-\infty}^{b} f(x; \theta^s_{sup})\, dx = 10\,\%$$



La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$

Se nella realta' θ=0, ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la $f(x \,|\, \theta = 0)$

Se immagino di ottenere x_{exp} = b il limite e' θ^s_{sup}

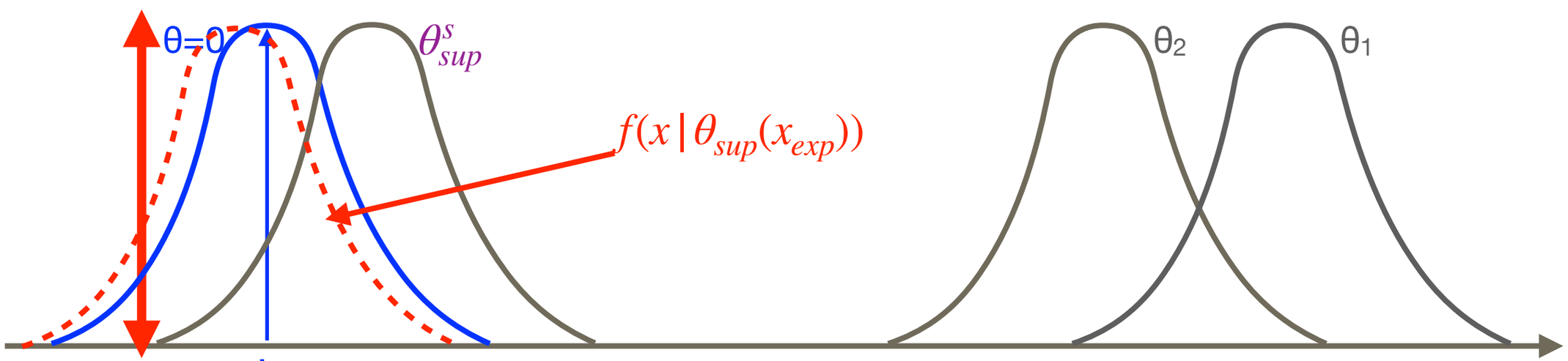
NOTA:

se, per effetto delle fluttuazioni statistiche di n_b, x_{exp} > b, $\theta_{sup} > \theta^s_{sup}$

se, per effetto delle fluttuazioni statistiche di n_b, x_{exp} < b, $\theta_{sup} < \theta^s_{sup}$

METODO CLs

$$p(x < b \,|\, \theta = \theta^s_{sup}) = \int_{-\infty}^{b} f(x; \theta^s_{sup})\, dx = 10\,\%$$



$x_{exp} <$ b

La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$

Se nella realta' θ=0, ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la $f(x \,|\, \theta = 0)$

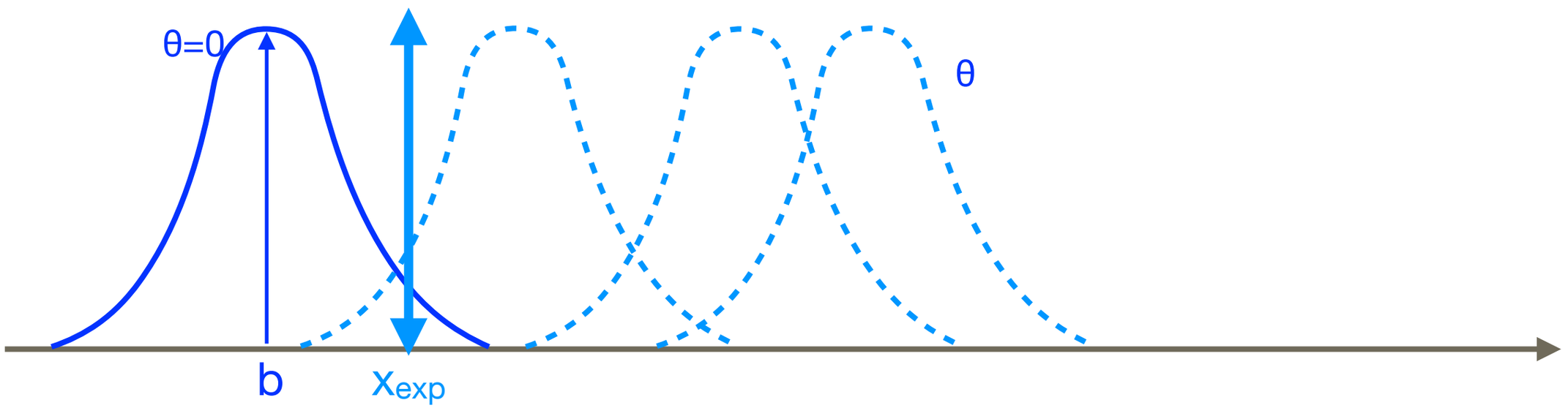
Se immagino di ottenere x_{exp} = b il limite e' θ^s_{sup}

NOTA:

se, per effetto delle fluttuazioni statistiche di n_b, $x_{exp} <$ b, $\theta_{sup} = \theta_{sup}(x_{exp}) < \theta^s_{sup}$

Ha senso fisicamente ottenere un limite migliore, piu' stringente, di quello di sensibilità ? E' prudente quotare come risultato del mio esperimento un limite piu' stringente, di quello di sensibilità ?

METODO CLS [ZECH]



La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$ Siamo nel caso θ=0, ossia il segnale non e' realizzato

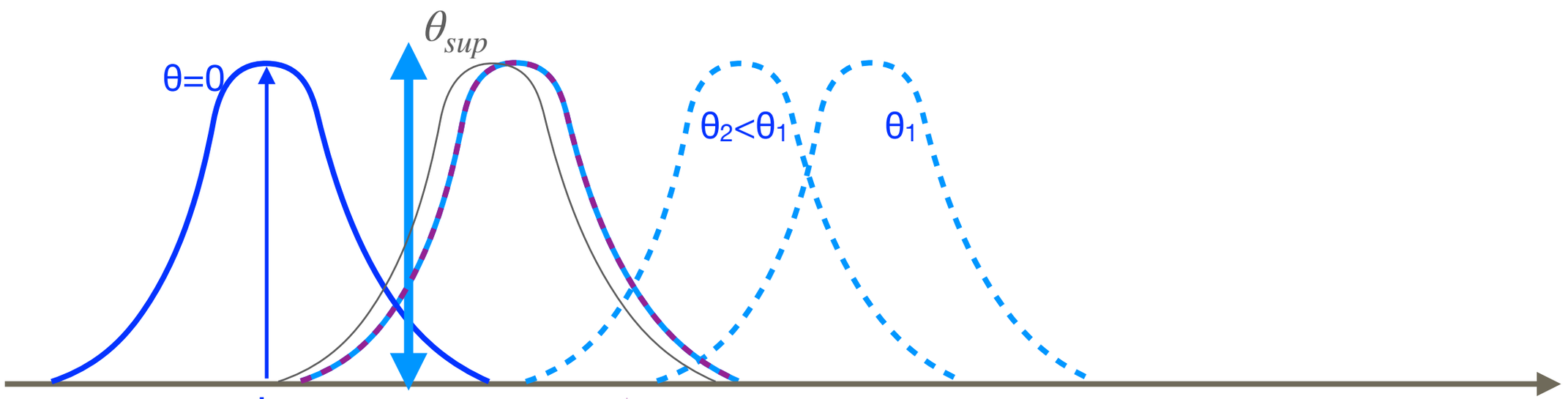
Consideriamo

$$\text{CLb} = p(x < x_{exp} \,|\, \theta = 0) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta = 0)\, dx$$

$$\text{CLs+b} = p(x < x_{exp} \,|\, \theta) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta)\, dx$$ <<<<==== dipende da θ

Definiamo CLs = CLs+b/CLb

METODO CLS



La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$ Siamo nel caso θ=0, ossia il segnale non e' realizzato

Consideriamo

$$\text{CLb} = p(x < x_{exp} \,|\, \theta = 0) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta = 0)\, dx$$

$$\text{CLs+b} = p(x < x_{exp} \,|\, \theta) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta)\, dx$$

Definiamo CLs = CLs+b/CLb

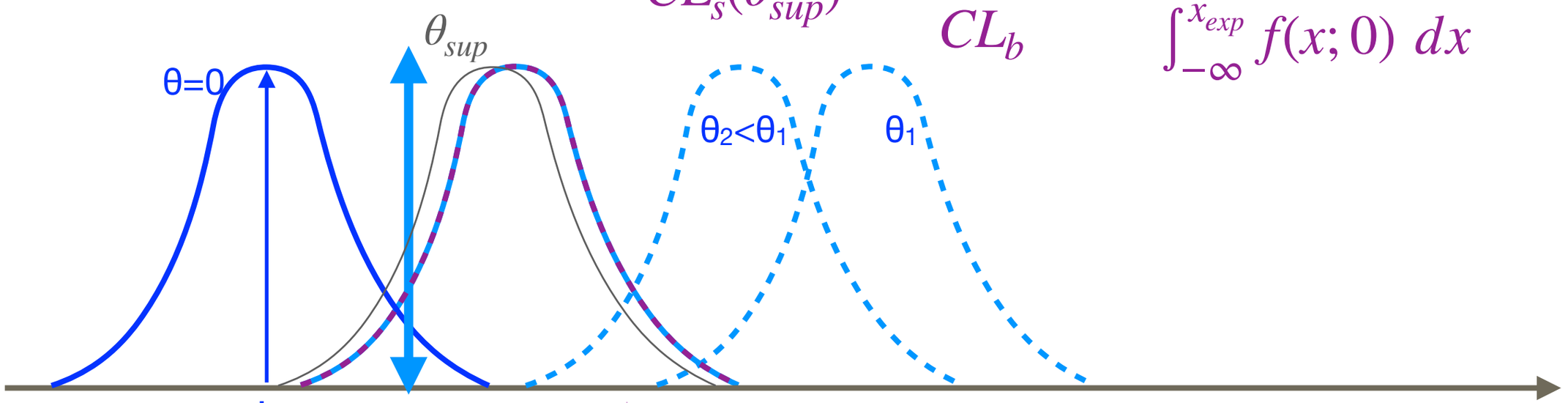
Ricordiamo che θ_{sup} e' definito da

$$CL_{s+b}(\theta_{sup}) = P(x < x_{exp} \,|\, \theta_{sup}) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta_{sup})\, dx = 10\,\%$$

METODO CLs

definiamo

$$CL_s(\theta^{\star}_{sup}) = \frac{CL_{s+b}}{CL_b} = \frac{\int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta^{\star}_{sup})\ dx}{\int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;0)\ dx} = 10\,\%$$



$\theta^{\star}_{sup} < \theta_2 < \theta_1$

La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$ Siamo nel caso θ=0, ossia il segnale non e' realizzato

Consideriamo

CLb = $p(x < x_{exp} \,|\, \theta = 0) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta=0)\ dx$

CLs+b = $p(x < x_{exp} \,|\, \theta) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta)\ dx$

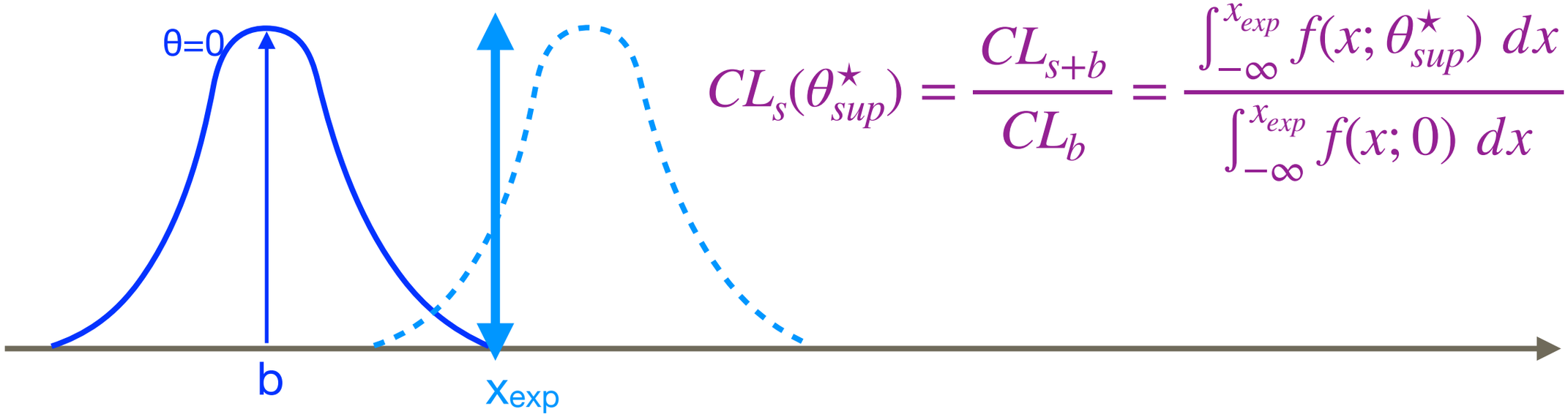
Definiamo CLs = CLs+b/CLb

Ricordiamo che θ_{sup} e' definito da

$$CL_{s+b}(\theta_{sup}) = P(x < x_{exp} \,|\, \theta_{sup}) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta_{sup})\ dx = 10\,\%$$

NOTA: $\theta_{sup} < \theta^{\star}_{sup} < \theta_2 < \theta_1$

METODO CLs



$$CL_s(\theta^{\star}_{sup}) = \frac{CL_{s+b}}{CL_b} = \frac{\int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta^{\star}_{sup})\ dx}{\int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;0)\ dx} = 10\,\%$$

La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$ Siamo nel caso θ=0, ossia il segnale non e' realizzato

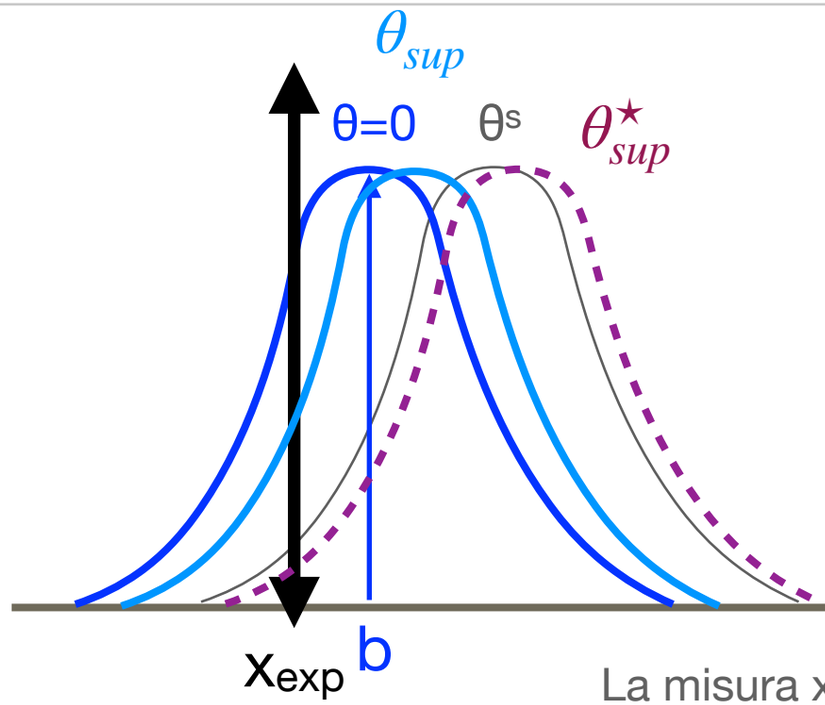
Consideriamo il valore in figura di x_{exp}

Consideriamo

$$\text{CLb} = p(x < x_{exp}\,|\,\theta = 0) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta = 0)\ dx \ \sim 1$$

$$\text{CLs+b}(\theta^{\star}_{sup}) = p(x < x_{exp}\,|\,\theta^{\star}_{sup}) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta^{\star}_{sup})\ dx \ \sim \text{CLs}(\theta^{\star}_{sup}) \ ===>>> \theta_{sup} \sim \theta^{\star}_{sup}$$

METODO CLs



$$CL_s(\theta^{\star}_{sup}) = \frac{CL_{s+b}}{CL_b} = \frac{\int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta^{\star}_{sup})\ dx}{\int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;0)\ dx} = 10\,\%$$

Consideriamo il valore in figura di x_{exp}

La misura $x = x_{exp} = n_b + n_s$ Siamo nel caso θ=0, ossia il segnale non e' realizzato

Consideriamo

CLb = $p(x < x_{exp}\,|\,\theta = 0) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta=0)\ dx$ **< 1, per esempio in figura 0.2**

CLs+b(θ_{sup}) = $p(x < x_{exp}\,|\,\theta_{sup}) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta_{sup})\ dx = 0.1$ inoltre $p(x < x_{exp} = b\,|\,\theta^s) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta^s)\ dx = 0.1$

CLs+b($\theta^{\star}_{sup}$) = $p(x < x_{exp}\,|\,\theta^{\star}_{sup}) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta^{\star}_{sup})\ dx$ ~ 0.2 x CLs($\theta^{\star}_{sup}$) = 0.2 x 0.1 = **2%**

$\theta_{sup} < \theta^s$ situazione non fisica, risultato migliore del limite di sensibilità

$\theta^s < \theta^{\star}_{sup}$ situazione prudente, il risultato $\theta^{\star}_{sup}$ e' tendenzialmente (non sempre) peggiore del limite (classico) di sensibilità