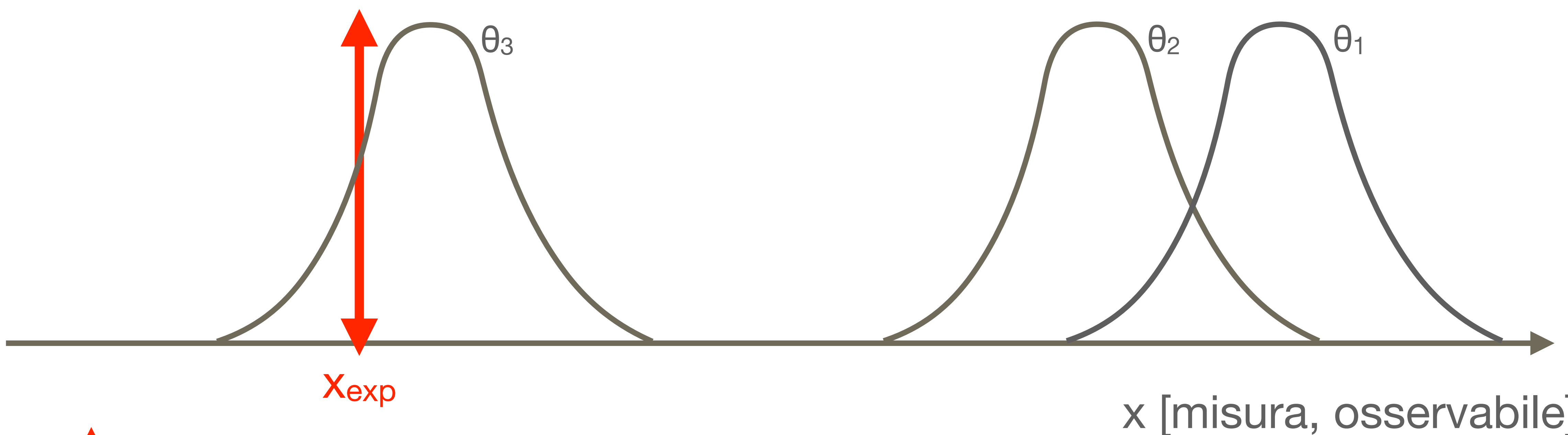
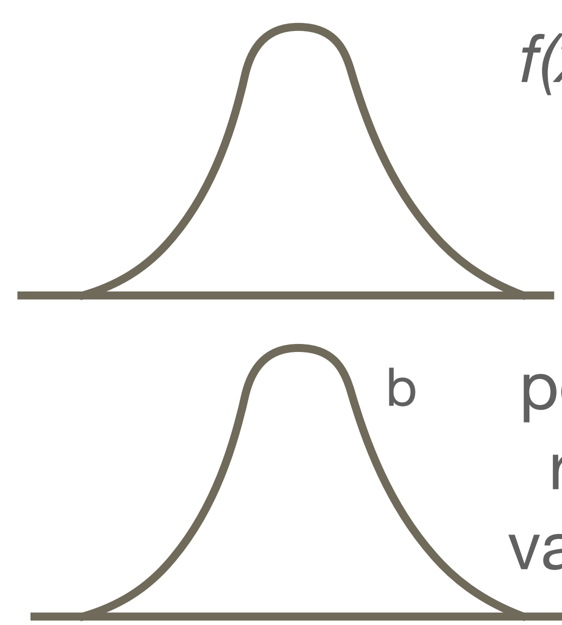
LIMITI SUPERIORI

DEFINIZIONE DI LIMITE SUPERIORE PER UN PARAMETRO

Non sappiamo se θ e' realizzato nei dati, solo fondo => θ=0



x_{exp} = Misura sperimentale



f(x|θ) = pdf di x, dipende dal parametro θ

pdf di x, in assenza del fenomeno ricercato (cioe' per θ=0, minimo valore possibile per il segnale, θ<0 non e' fisico) = pdf del fondo

DEFINIZIONE DI LIMITE SUPERIORE PER UN PARAMETRO

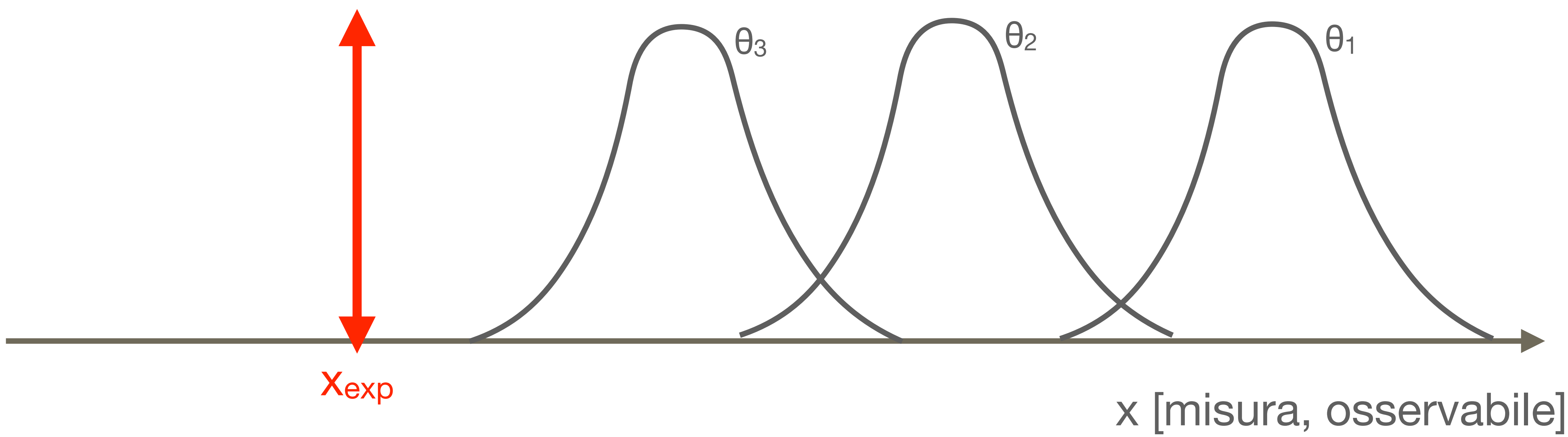
Non sappiamo se θ e’ realizzato nei dati, solo fondo => θ=0

Se la nostra misura $x = x_{exp}$

Possiamo tranquillamente escludere il valore θ_1 perche’ la prob di osservare valori minori o uguali a x_{exp} nell’ipotesi $\theta=\theta_1$ e’ piccolissima

DEFINIZIONE DI LIMITE SUPERIORE PER UN PARAMETRO

Non sappiamo se θ e' realizzato nei dati, solo fondo => θ=0



Se la nostra misura x = x_{exp}

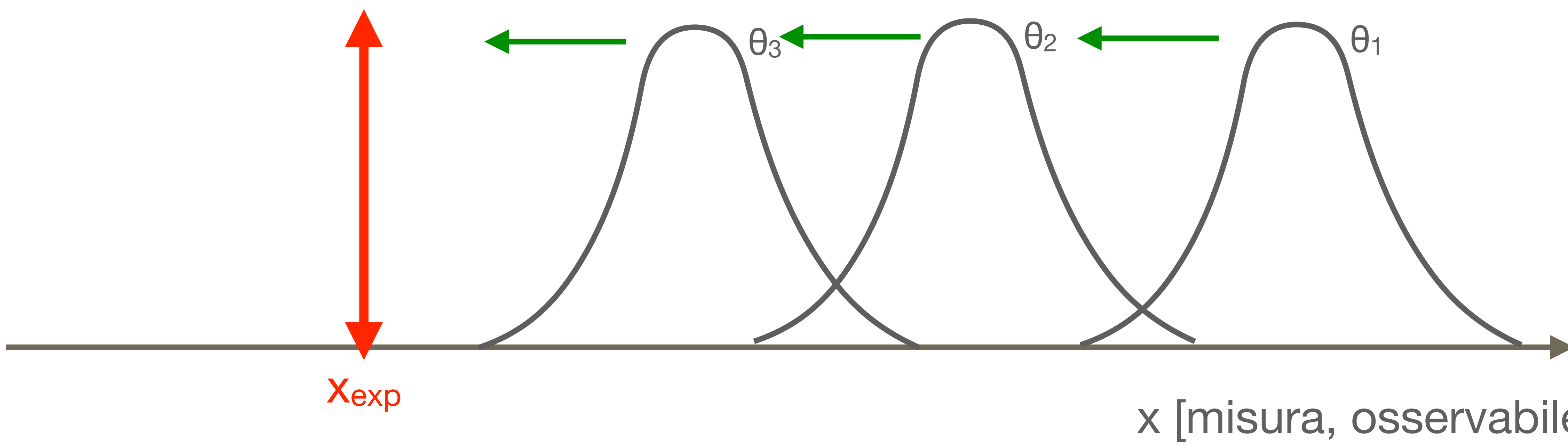
Possiamo tranquillamente escludere θ_1 perche' la prob di osservare valori minori o uguali a x_{exp} nell'ipotesi $\theta=\theta_1$ e' piccolissima

Allo stesso modo possiamo escludere $\theta_2, \theta_3 < \theta_1$ perche'

$$p(x < x_{exp} \,|\, \theta = \theta_3) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta_3)\, dx \simeq 0$$

DEFINIZIONE DI LIMITE SUPERIORE PER UN PARAMETRO

Non sappiamo se θ e' realizzato nei dati, solo fondo => θ=0



Se la nostra misura $x = x_{exp}$

Possiamo tranquillamente escludere θ_1 perche' la prob di osservare valori minori o uguali a x_{exp} nell'ipotesi $\theta=\theta_1$ e' piccolissima

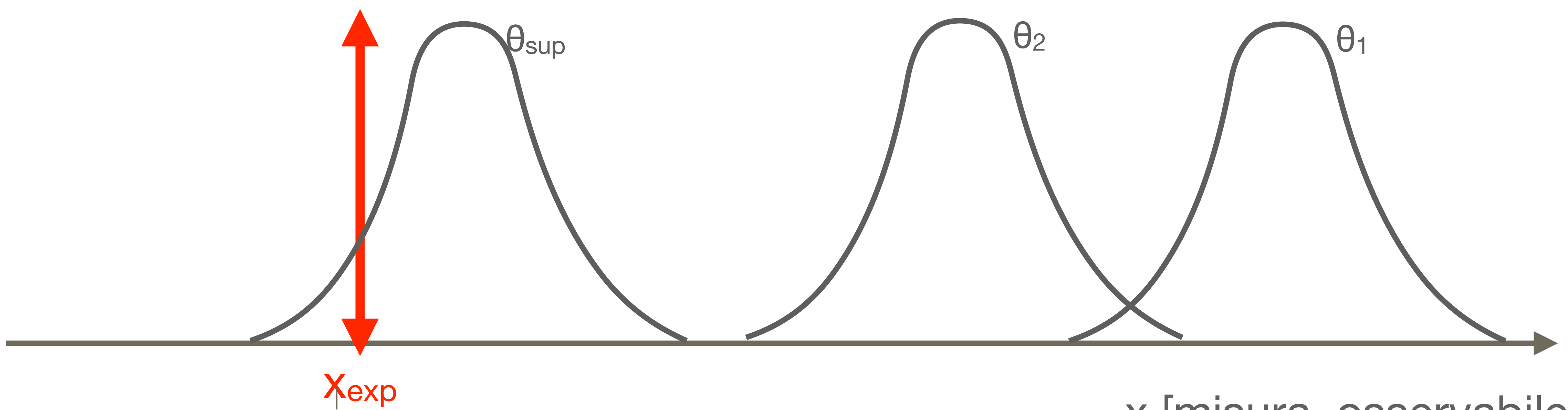
Allo stesso modo possiamo escludere $\theta_2, \theta_3 < \theta_1$ perche'

$$p(x < x_{exp}\,|\,\theta = \theta_3) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta_3)\ dx \simeq 0$$

Fino a quali valori di θ posso fare questa affermazione ?

DEFINIZIONE DI LIMITE SUPERIORE PER UN PARAMETRO

Non sappiamo se θ e' realizzato nei dati, solo fondo => θ=0



Se la nostra misura x = x_{exp}

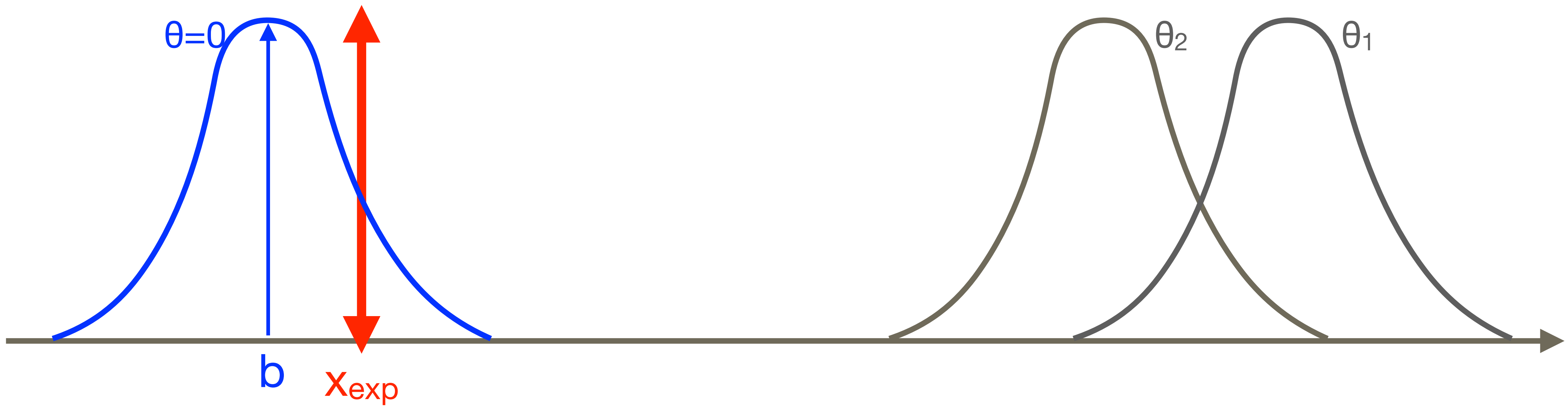
Scegliamo θ_{sup} tale che $p(x < x_{exp} \,|\, \theta = \theta_{sup}) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta_{sup})\; dx = 10\,\%$

Allora per ogni $\theta > \theta_{sup}$ la probabilita' di un risultato x < x_{exp} e' minore del 10%. Percio' posso dire che θ_{sup} definito da questa condizione e' il limite superiore per θ compatibile con la mia misura x_{exp} **al 90% di C.L.**

CASO GAUSSIANO

CASO POISSONIANO

BACKGROUND



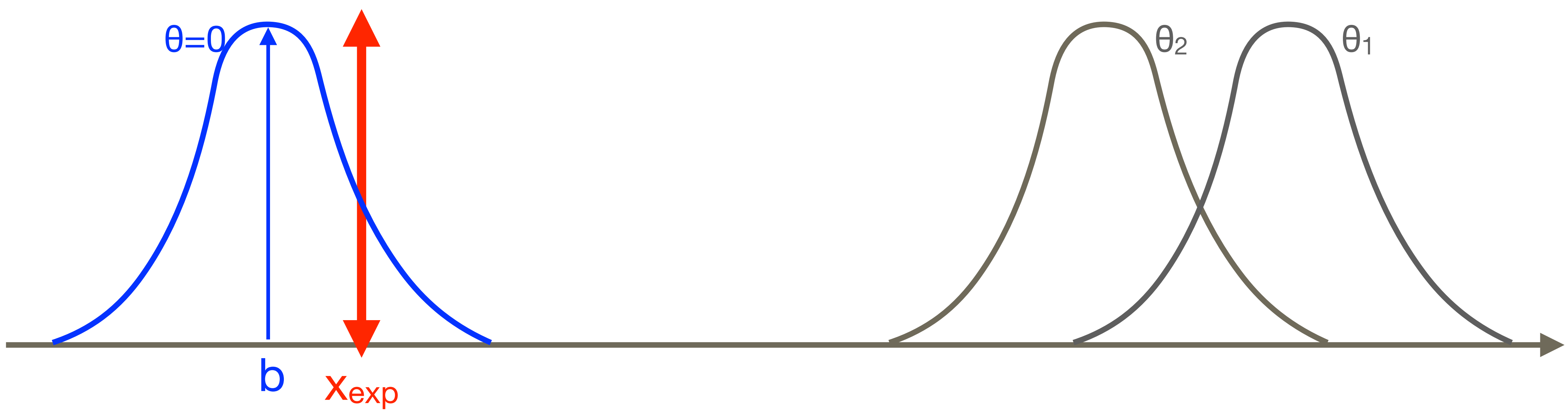
Molto frequentemente la misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$

n_b ha un valore di aspettazione uguale a *b*, ma fluttua secondo una pdf, la pdf corrispondente ad assenza di segnale, $f(x \,|\, \theta = 0)$

Le nostre $f(x \,|\, \theta)$ descrivono in generale la probabilita' di x in presenza di un segnale s(θ) e di un background che ha valore di aspettazione b

Se nella realta' θ=0, ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la $f(x \,|\, \theta = 0)$

BACKGROUND

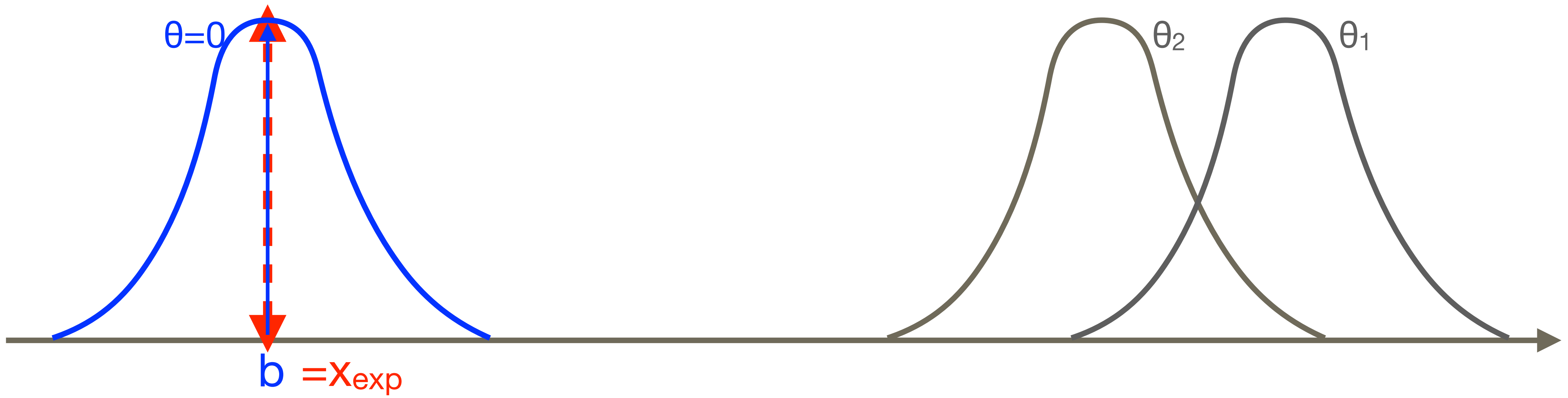


La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$

Consideriamo il caso in cui il segnale non sia realizzato -> la mia misura fluttuerà secondo la $f(x \mid \theta = 0)$

Se immagino di ripetere N volte la misura, qual e' la distribuzione del limite θ_{sup} che otterrò ?
In quale frazione degli esperimenti 0 (valore di θ che corrisponde ad assenza di segnale) sara' < θ_{sup} ? => vedere caso gaussiano, poissoniano, ecc

BACKGROUND



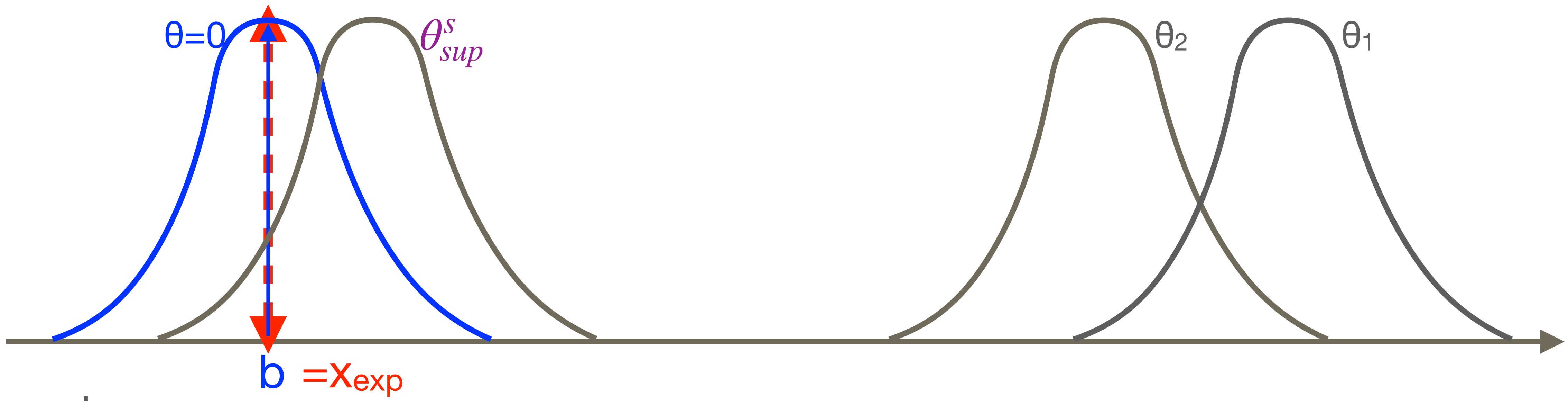
La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$

Se nella realta' θ=0, ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la $f(x\,|\,\theta = 0)$

Se immagino di ottenere x_{exp} = b qual e' il limite θ_{sup} che otterrò ?

BACKGROUND

$$p(x < b\,|\,\theta = \theta^s_{sup}) = \int_{-\infty}^{b} f(x;\theta^s_{sup})\,dx = 10\,\%$$



La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$

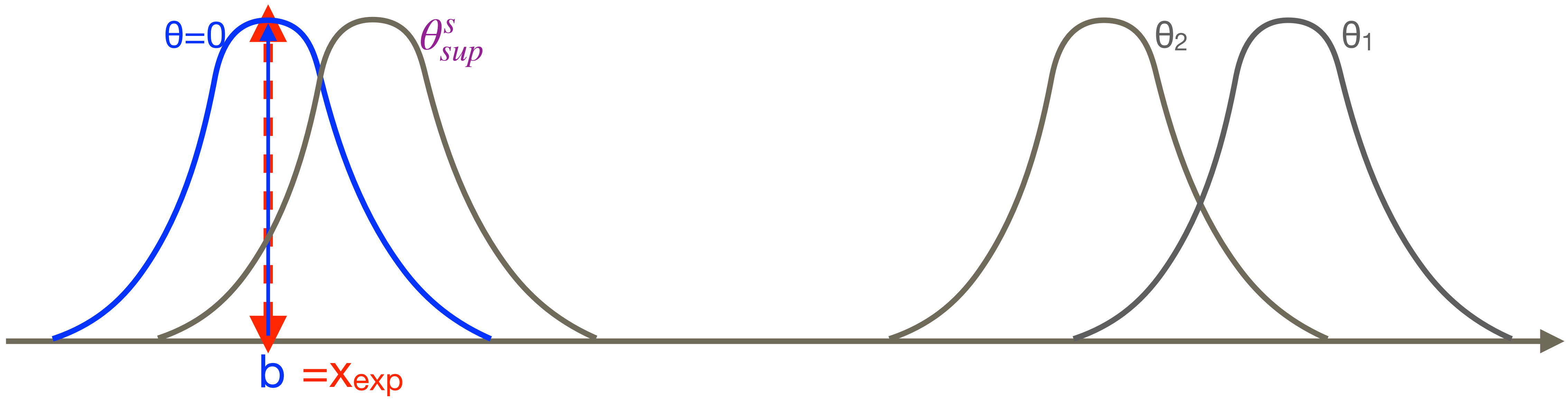
Se nella realta' θ=0, ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la $f(x\,|\,\theta = 0)$

Se immagino di ottenere x_{exp} = b qual e' il limite θ_{sup} che otterrò ?

Chiamo questo valore θ^s_{sup}, si tratta del ***limite di sensibilita'*** del mio esperimento (determinato dal background) e corrisponde [vedremo con un toy MC] al limite atteso, nell'ipotesi di solo background (assenza di segnale, θ=0)

BACKGROUND

$$p(x < b \,|\, \theta = \theta^s_{sup}) = \int_{-\infty}^{b} f(x;\theta^s_{sup})\, dx = 10\,\%$$



La misura x = x_{exp} = n_b + n_s

Se nella realta' θ=0, ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la $f(x\,|\,\theta = 0)$

Se immagino di ottenere x_{exp} = b il limite e' θ^s_{sup}

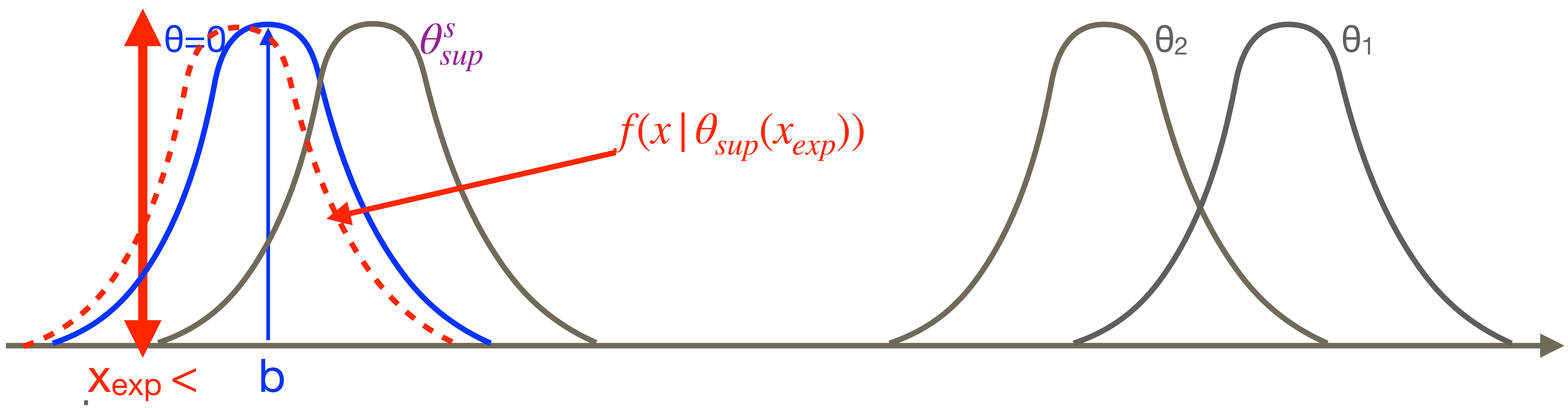
NOTA:

se, per effetto delle fluttuazioni statistiche di n_b, x_{exp} > b, θ_{sup} > θ^s_{sup}

se, per effetto delle fluttuazioni statistiche di n_b, x_{exp} < b, θ_{sup} < θ^s_{sup}

Background

$$p(x < b \,|\, \theta = \theta^s_{sup}) = \int_{-\infty}^{b} f(x;\theta^s_{sup})\; dx = 10\,\%$$



La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$

Se nella realta' θ=0, ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la $f(x\,|\,\theta = 0)$

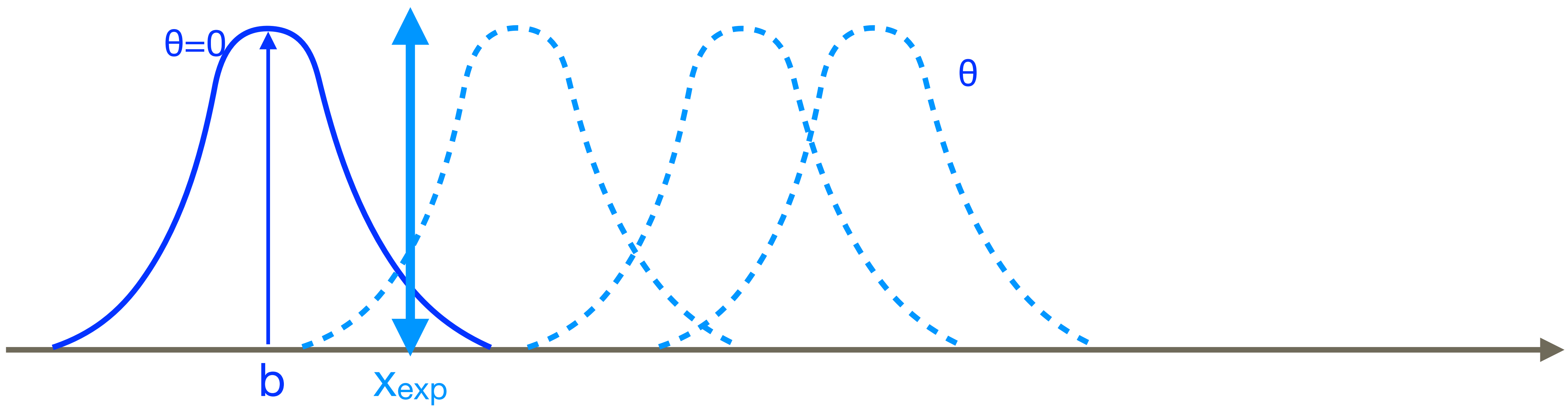
Se immagino di ottenere x_{exp} = b il limite e' θ^s_{sup}

NOTA:

se, per effetto delle fluttuazioni statistiche di n_b, x_{exp} < b, $\theta_{sup} = \theta_{sup}(x_{exp}) < \theta^s_{sup}$

Ha senso fisicamente ottenere un limite migliore, piu' stringente, di quello di sensibilità ? E' prudente quotare come risultato del mio esperimento un limite piu' stringente, di quello di sensibilità ?

METODO CLS [ZECH]



La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$ Siamo nel caso θ=0, ossia il segnale non e' realizzato

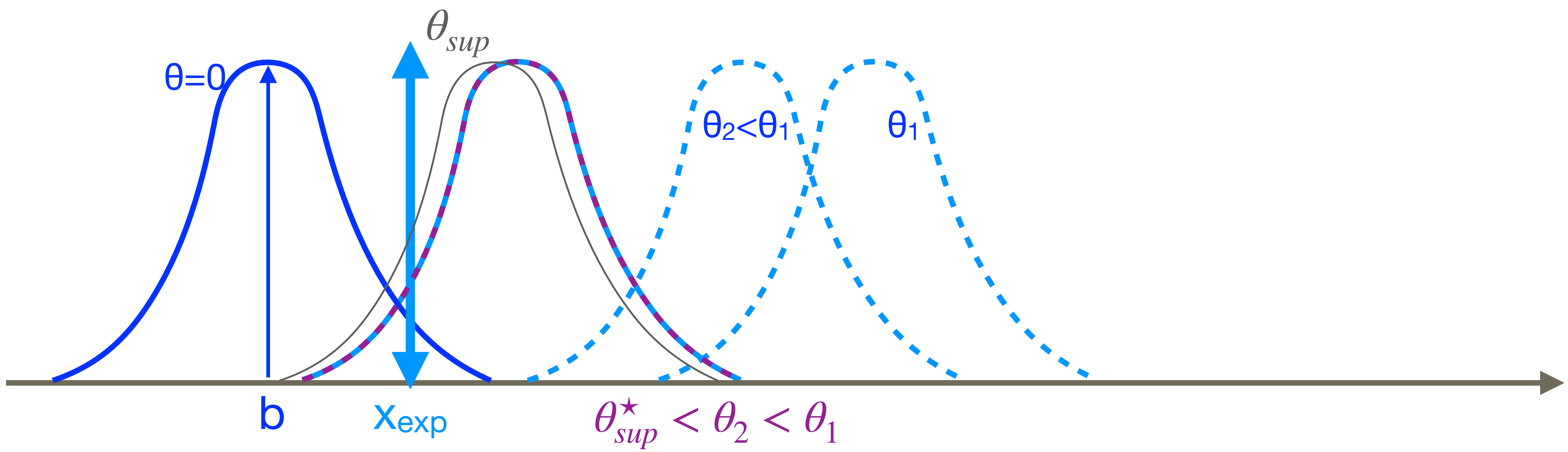
Consideriamo

CLb = $p(x < x_{exp} \,|\, \theta = 0) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta = 0)\, dx$

CLs+b = $p(x < x_{exp} \,|\, \theta) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta)\, dx$ <<<<==== dipende da θ

Definiamo CLs = CLs+b/CLb

METODO CLs



La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$ Siamo nel caso θ=0, ossia il segnale non e' realizzato

Consideriamo

CLb = $p(x < x_{exp} | \theta = 0) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta = 0)\ dx$

CLs+b = $p(x < x_{exp} | \theta) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta)\ dx$

Definiamo CLs = CLs+b/CLb

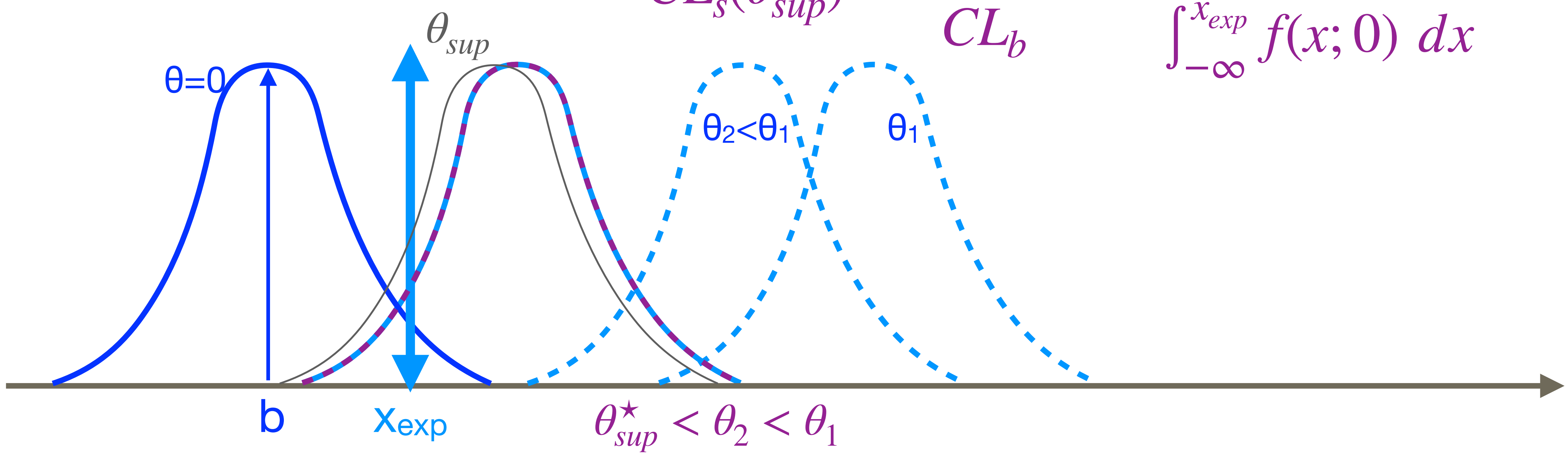
Ricordiamo che θ_{sup} e' definito da

$$CL_{s+b}(\theta_{sup}) = P(x < x_{exp} | \theta_{sup}) =$$
$$= \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta_{sup})\ dx = 10\,\%$$

METODO CLs

definiamo

$$CL_s(\theta^\star_{sup}) = \frac{CL_{s+b}}{CL_b} = \frac{\int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta^\star_{sup})\ dx}{\int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;0)\ dx} = 10\ \%$$



La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$ Siamo nel caso θ=0, ossia il segnale non e' realizzato

Consideriamo

CLb = $p(x < x_{exp}\,|\,\theta = 0) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta = 0)\ dx$

CLs+b = $p(x < x_{exp}\,|\,\theta) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta)\ dx$

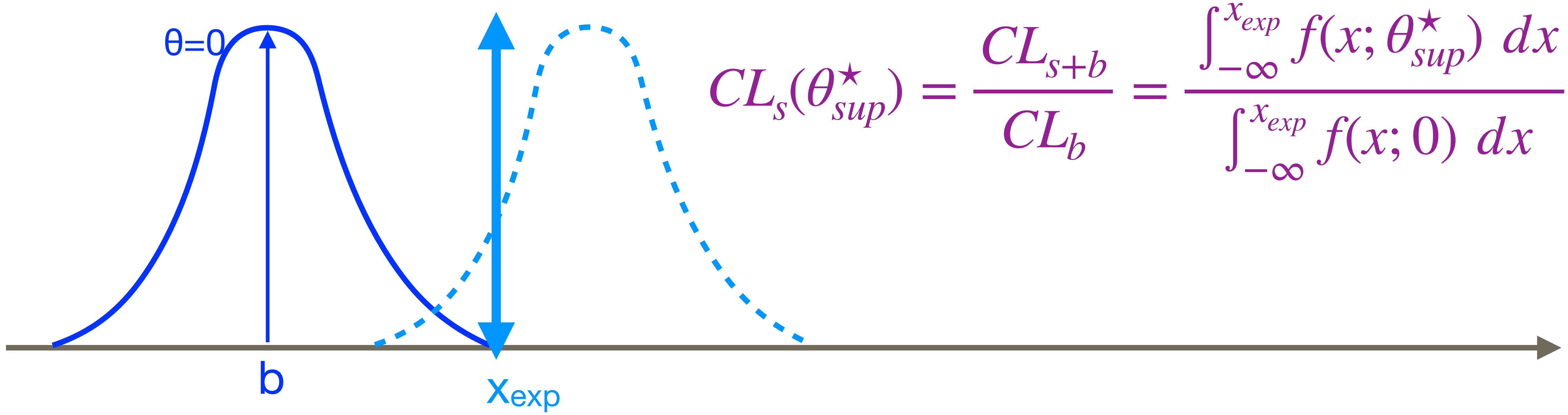
Definiamo CLs = CLs+b/CLb

Ricordiamo che θ_{sup} e' definito da

$$CL_{s+b}(\theta_{sup}) = P(x < x_{exp}\,|\,\theta_{sup}) = \\ = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta_{sup})\ dx = 10\ \%$$

NOTA: $\theta_{sup} < \theta^\star_{sup} < \theta_2 < \theta_1$

METODO CLs



$$CL_s(\theta^\star_{sup}) = \frac{CL_{s+b}}{CL_b} = \frac{\int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta^\star_{sup})\ dx}{\int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;0)\ dx} = 10\,\%$$

La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$

Siamo nel caso θ=0, ossia il segnale non e' realizzato

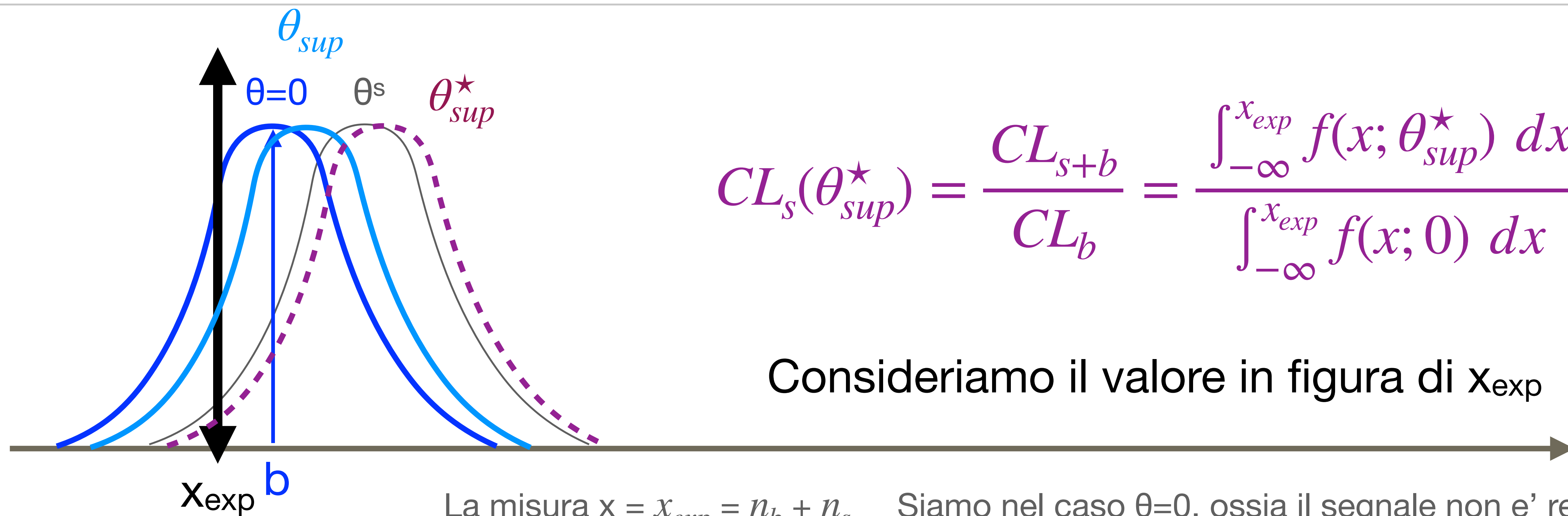
Consideriamo il valore in figura di x_{exp}

Consideriamo

CLb = $p(x < x_{exp}\,|\,\theta = 0) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta=0)\ dx$ ~ 1

CLs+b($\theta^\star_{sup}$) = $p(x < x_{exp}\,|\,\theta^\star_{sup}) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta^\star_{sup})\ dx$ ~ CLs($\theta^\star_{sup}$) ===>>> θ_{sup} ~ $\theta^\star_{sup}$

METODO CLs



$$CL_s(\theta^{\star}_{sup}) = \frac{CL_{s+b}}{CL_b} = \frac{\int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta^{\star}_{sup})\ dx}{\int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;0)\ dx} = 10\ \%$$

Consideriamo il valore in figura di x_{exp}

La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$ Siamo nel caso θ=0, ossia il segnale non e' realizzato

Consideriamo

CLb = $p(x < x_{exp}\,|\,\theta = 0) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta = 0)\ dx$ **< 1, per esempio in figura 0.2**

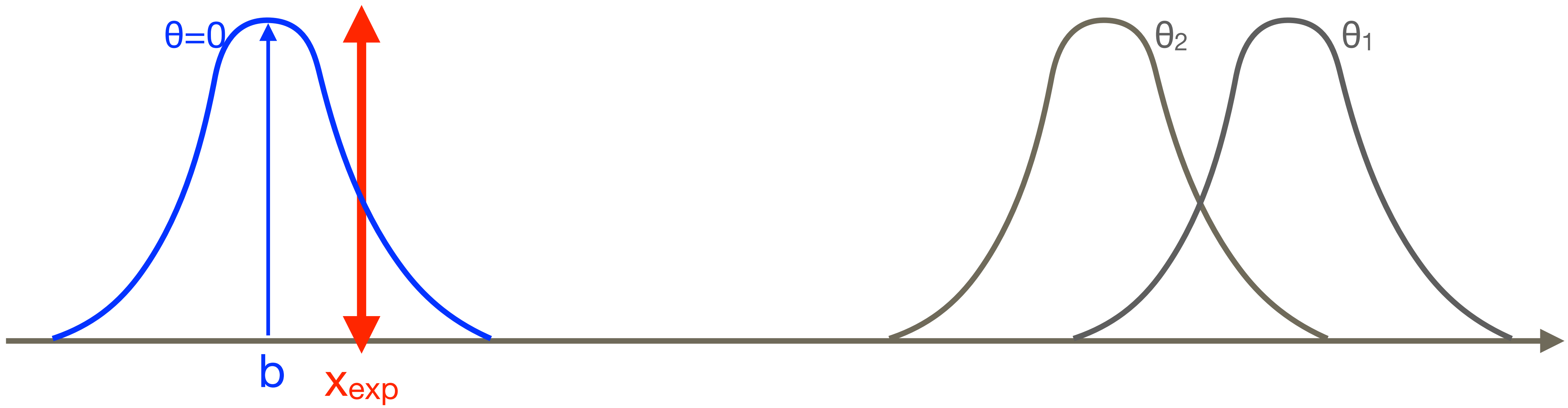
CLs+b(θ_{sup}) = $p(x < x_{exp}\,|\,\theta_{sup}) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta_{sup})\ dx = 0.1$ inoltre $p(x < x_{exp} = b\,|\,\theta^s) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta^s)\ dx = 0.1$

CLs+b($\theta^{\star}_{sup}$) = $p(x < x_{exp}\,|\,\theta^{\star}_{sup}) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x;\theta^{\star}_{sup})\ dx$ ~ 0.2 x CLs($\theta^{\star}_{sup}$) = 0.2 x 0.1 = **2%**

$\theta_{sup} < \theta^s$ situazione non fisica, risultato migliore del limite di sensibilità

θ^s < $\theta^{\star}_{sup}$ situazione prudente, il risultato $\theta^{\star}_{sup}$ e' tendenzialmente (non sempre) peggiore del limite (classico) di sensibilità

METODO CLs



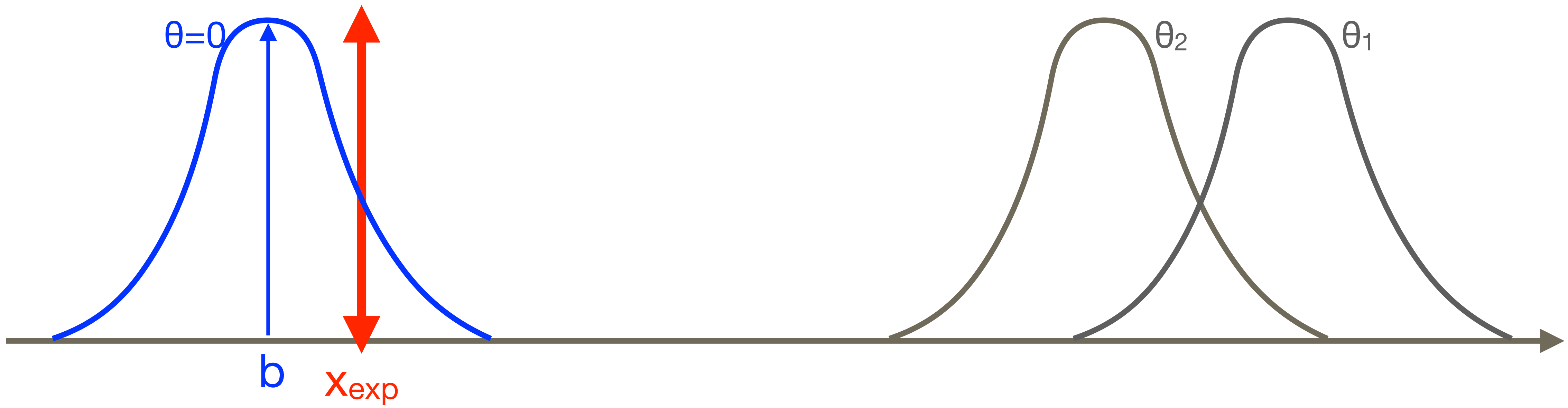
La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$

Se nella realta' θ=0, ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la $f(x \,|\, \theta = 0)$

Se immagino di ripetere N volte la misura,

- qual e' la distribuzione del limite θ_{sup} che otterrò ?
- qual e' la distribuzione del limite $\theta^{\star}_{sup}$ che otterrò ?
- in quale frazione degli esperimenti 0 (valore di θ che corrisponde ad assenza di segnale) sara' < θ_{sup} ?
  - => vedere caso gaussiano, poissoniano, ecc
- in quale frazione degli esperimenti 0 (valore di θ che corrisponde ad assenza di segnale) sara' < $\theta^{\star}_{sup}$?
  - => vedere caso gaussiano, poissoniano, ecc

METODO CLs VS METODO CLASSICO



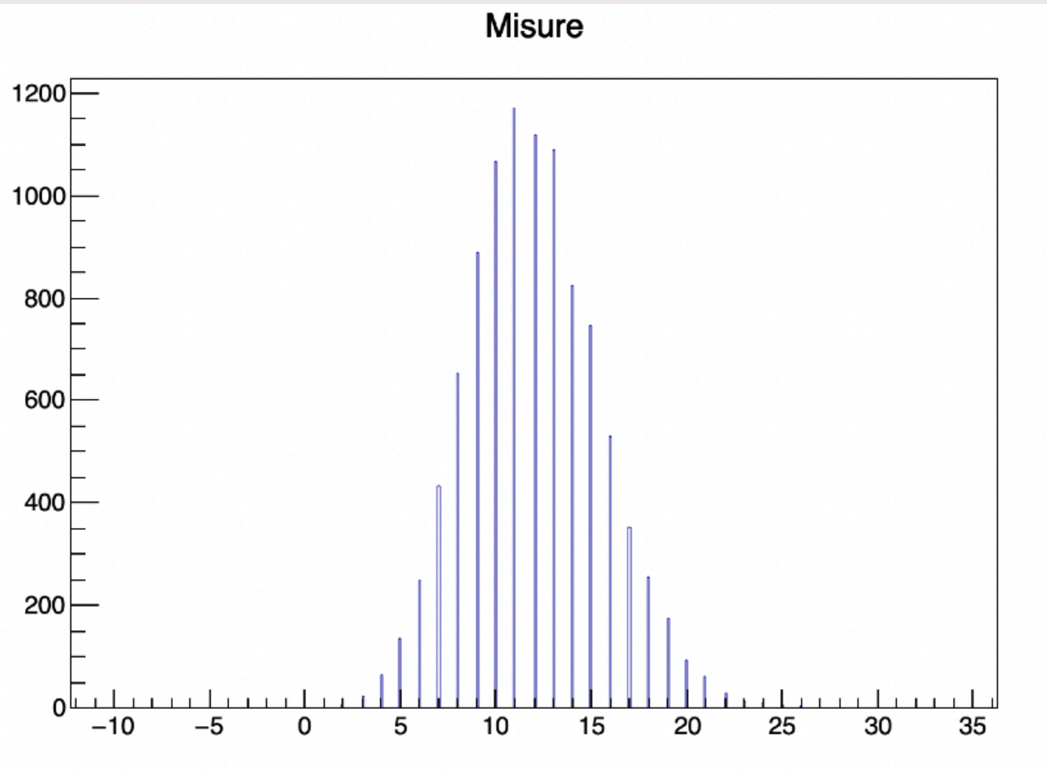
La misura x = $x_{exp} = n_b + n_s$

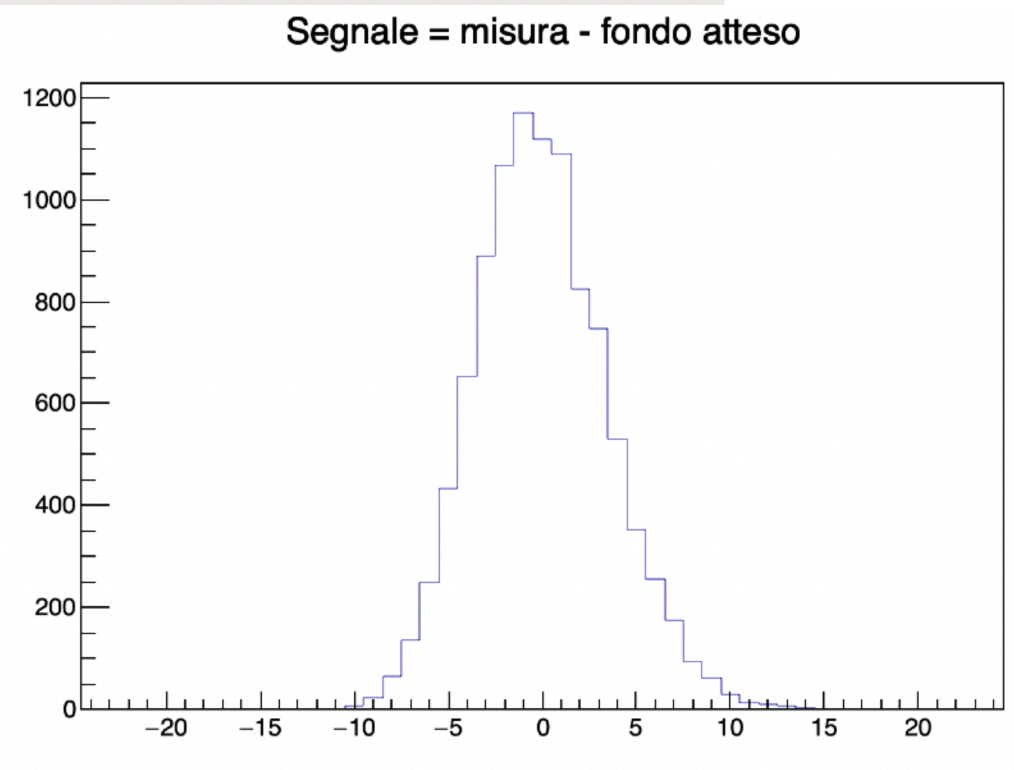
Se nella realta' θ=0, ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la $f(x\,|\,\theta = 0)$

Per diverse misure x_{exp} produrre curve di $\theta^{\star}_{sup}$ vs θ_{sup} per b=2,
b=5,
b=10, b=30, b=50

ESERCIZIO

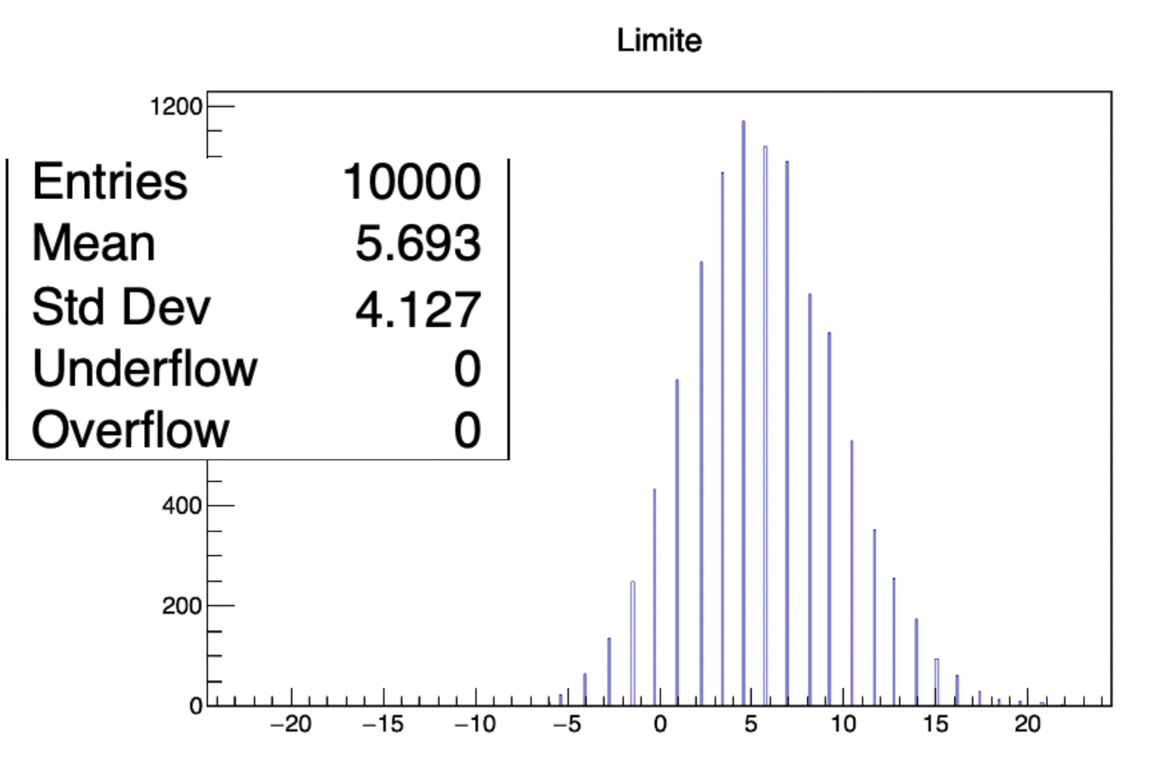
```
root [1] .x LimiteAttesoPoisson.C
Nbackground, CL 12 0.9       Limite atteso  5.782
 NCov       0.9088
 NCov CLs   1
root [2] .ls
 OBJ: TH2F      hbox      : 0 at: 0x12abbd800
 OBJ: TH1F      hDato   Misure : 0 at: 0x1448192c0
 OBJ: TH1F      hBestSign      Segnale = misura - fondo atteso : 0 at: 0x144819a20
 OBJ: TH1F      hUpLim  Limite : 0 at: 0x144819e10
 OBJ: TH1F      hUpLimCLs      Limite CLs : 0 at: 0x14481a200
 OBJ: TH2D      hLimVsCLs      Limite CLs vs Limite std : 0 at: 0x12aa74c00
 OBJ: TH2D      hLimVsData     Limite std vs segnale-misurato : 0 at: 0x12ad17c00
 OBJ: TH2D      hLimCLsVsData  Limite CLs vs segnale-misurato : 0 at: 0x12aa6a000
root [3] hDato->Draw()
```

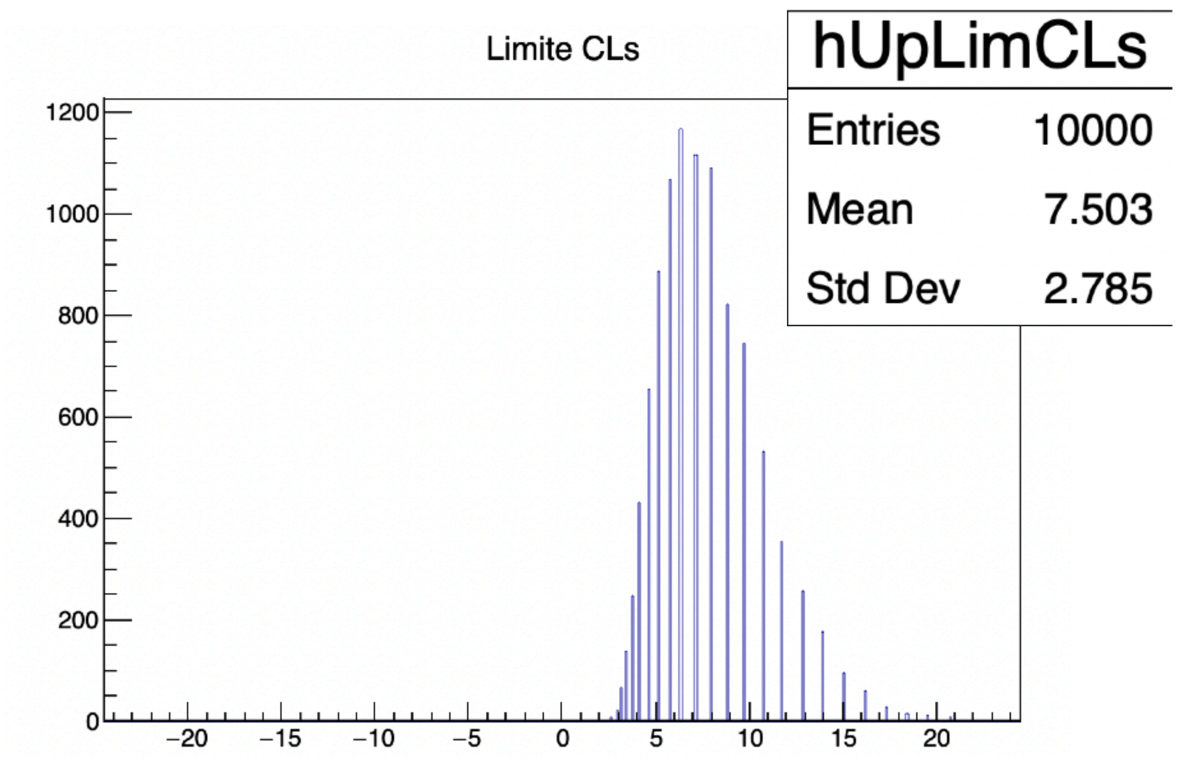


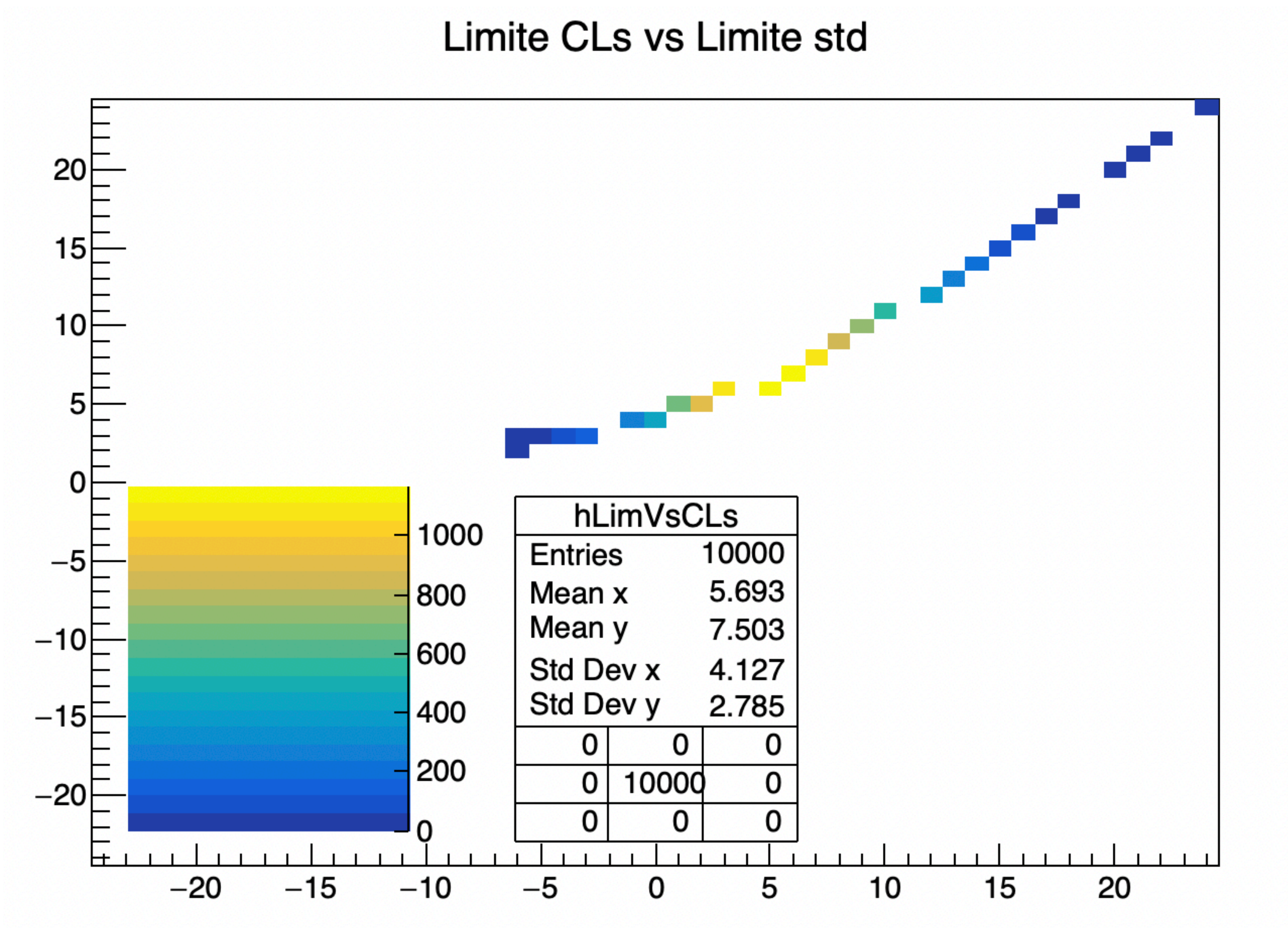


ESERCIZIO

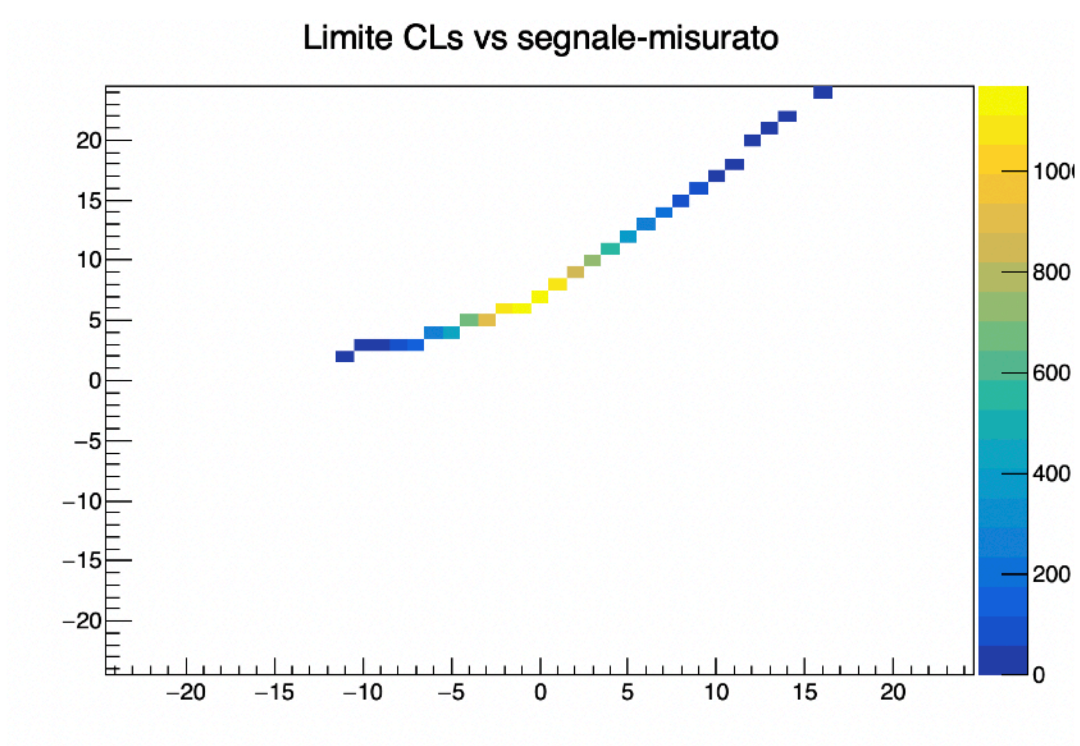
```
root [1] .x LimiteAttesoPoisson.C
Nbackground, CL 12 0.9       Limite atteso  5.782
 NCov       0.9088
 NCov CLs   1
root [2] .ls
 OBJ: TH2F      hbox      : 0 at: 0x12abbd800
 OBJ: TH1F      hDato   Misure : 0 at: 0x1448192c0
 OBJ: TH1F      hBestSign       Segnale = misura - fondo atteso : 0 at: 0x144819a20
 OBJ: TH1F      hUpLim  Limite : 0 at: 0x144819e10
 OBJ: TH1F      hUpLimCLs       Limite CLs : 0 at: 0x14481a200
 OBJ: TH2D      hLimVsCLs       Limite CLs vs Limite std : 0 at: 0x12aa74c00
 OBJ: TH2D      hLimVsData      Limite std vs segnale-misurato : 0 at: 0x12ad17c00
 OBJ: TH2D      hLimCLsVsData   Limite CLs vs segnale-misurato : 0 at: 0x12aa6a000
root [3] hDato->Draw()
```

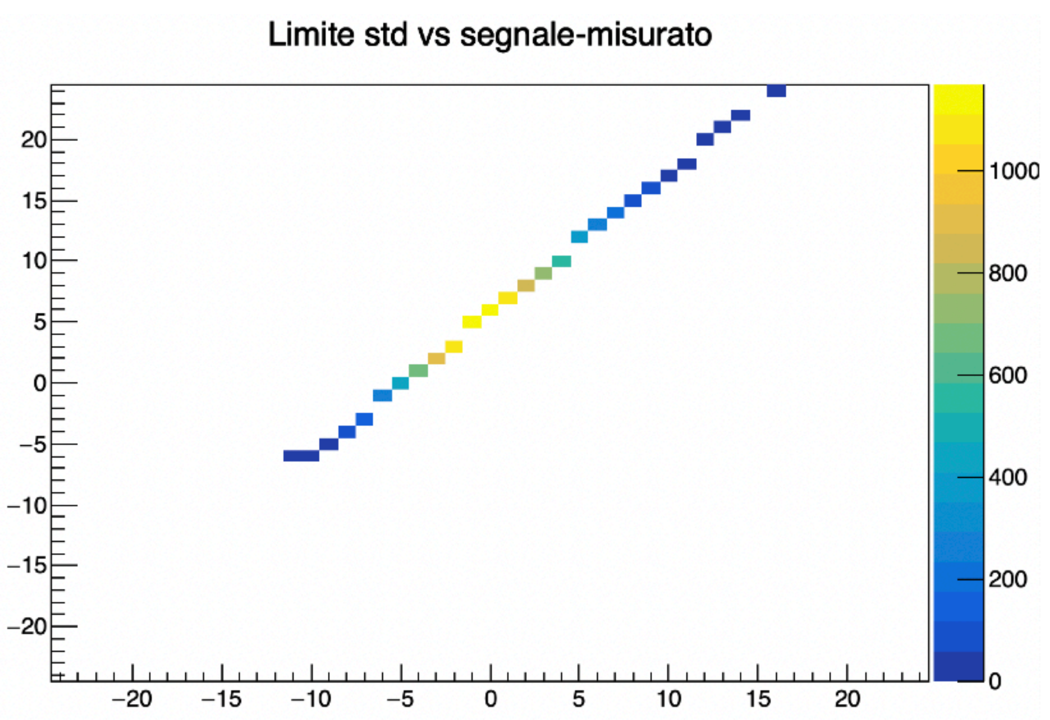






Limite CLs vs Limite std
20
15
10
5
0
−5
−10
−15
−20
−20
−15
−10
−5
0
5
10
15
20
1000
800
600
400
200
0
hLimVsCLs
Entries 10000
Mean x 5.693
Mean y 7.503
Std Dev x 4.127
Std Dev y 2.785
0 0 0
0 10000 0
0 0 0


Limite CLs vs segnale-misurato


Limite std vs segnale-misurato

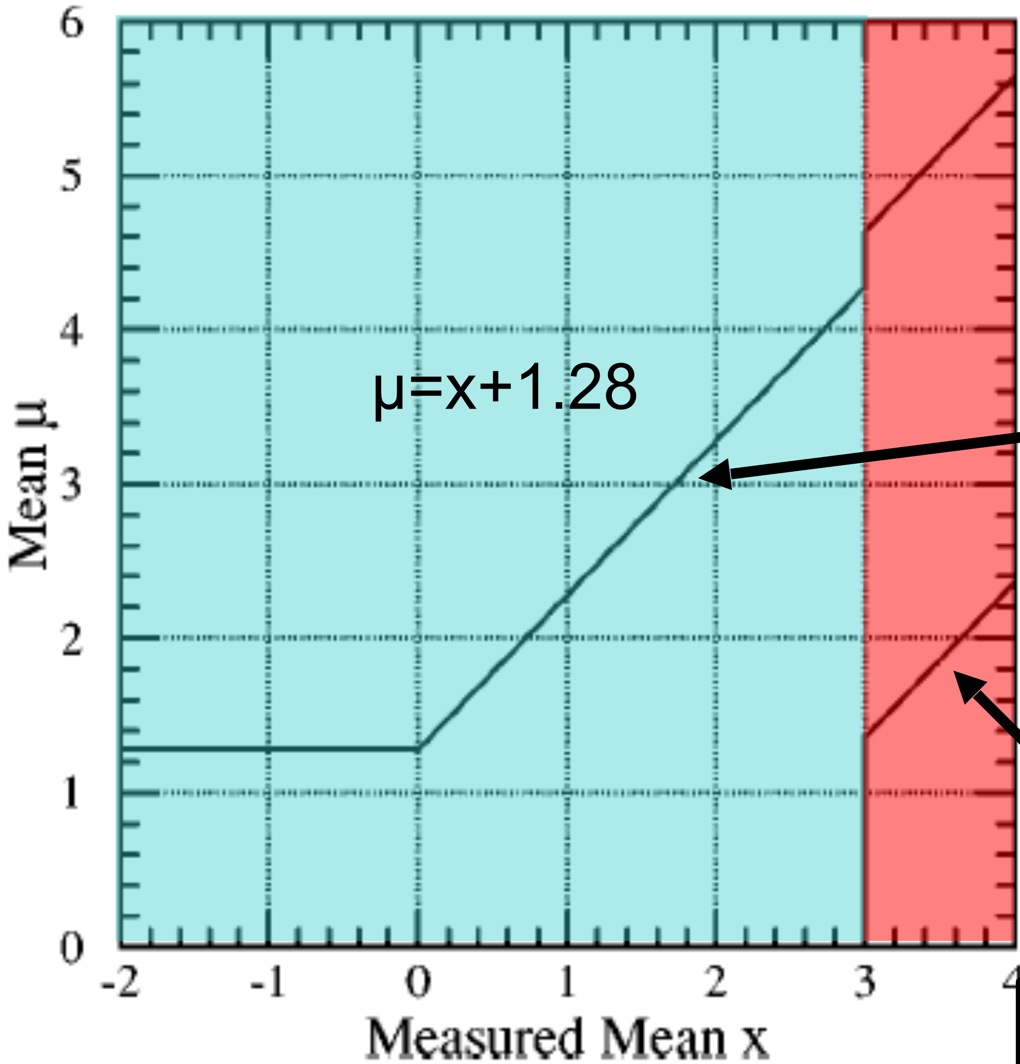
SCOPERTA O LIMITE ?

Intervallo di confidenza o limite superiore ?

Inconsistenza

Prima opzione:
Parliamo di scoperta (e determiniamo un intervallo di confidenza) se $x > b+3\sigma$
Parliamo di assenza di segnale (e determiniamo un limite) se $x < b+3\sigma$

LIMITE O SCOPERTA ?



μ=x+1.68

μ=x+1.28

μ=x-1.68

Measured Mean
X = Osservazione - fondo

$$\int_{-\infty}^{x_1(\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx = 1-\alpha = 0.1 \Rightarrow \quad x_1(\mu) = \mu - 1.28$$

$$x_2(\mu) = \infty$$

μ=x+1.28

$$\int_{-\infty}^{x_1(\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx = \frac{1-\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow \quad x_1(\mu) = \mu - 1.65$$

μ=x+1.65

$$\int_{-\infty}^{x_2(\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx = \frac{1+\alpha}{2} = 0.95 \Rightarrow \quad x_2(\mu) = \mu + 1.65$$

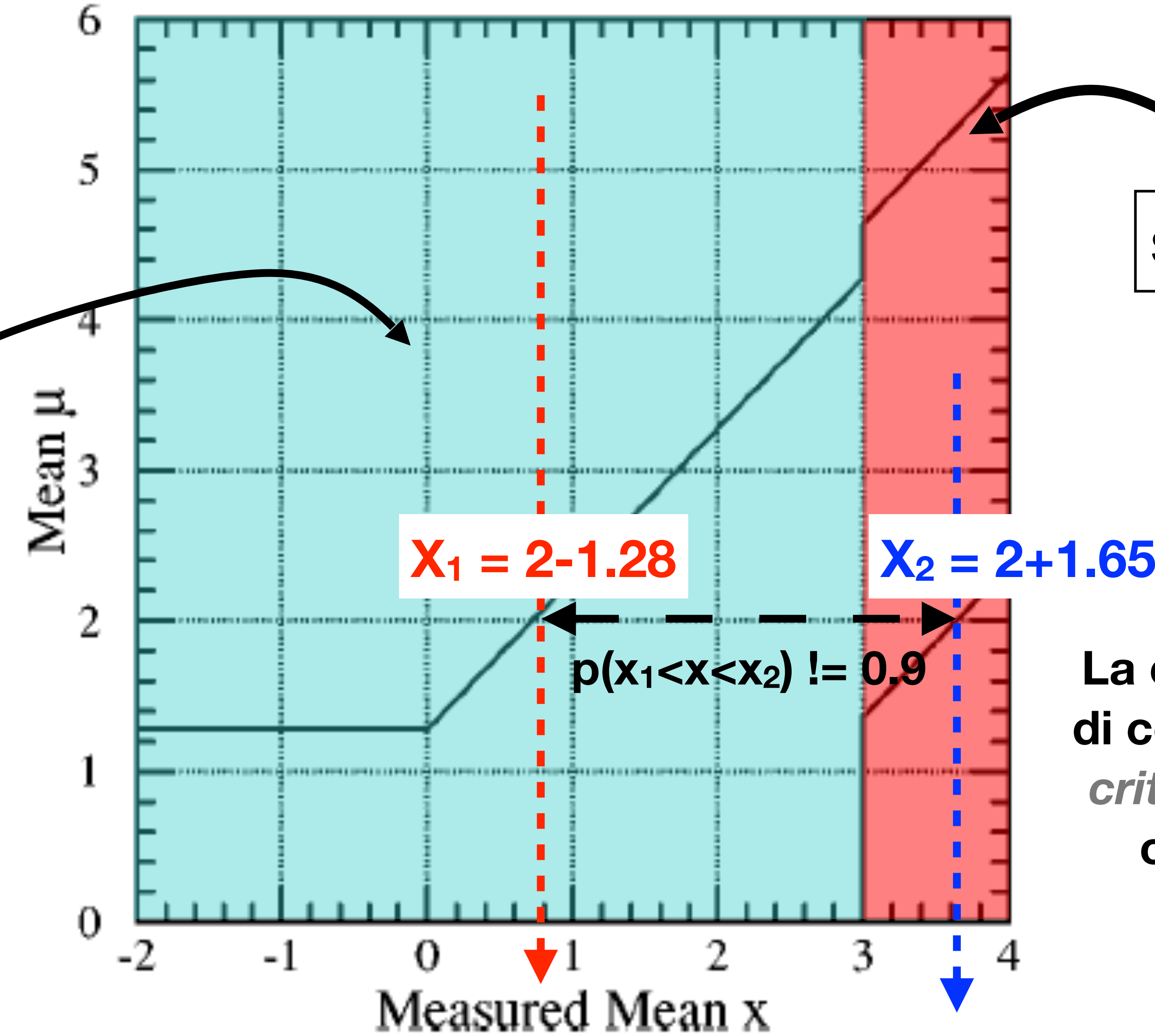
μ=x-1.65

LIMITE O SCOPERTA ?

Convertiamo l'affermazione precedente in un diagramma alla Neyman che identifichi la banda di confidenza.

Measured Mean
X = Osservazione - fondo

Upper limit



scoperta

La costruzione della banda di confidenza *non rispetta il criterio generale richiesto*, **ossia $p(x_1<x<x_2) = 0.9$**

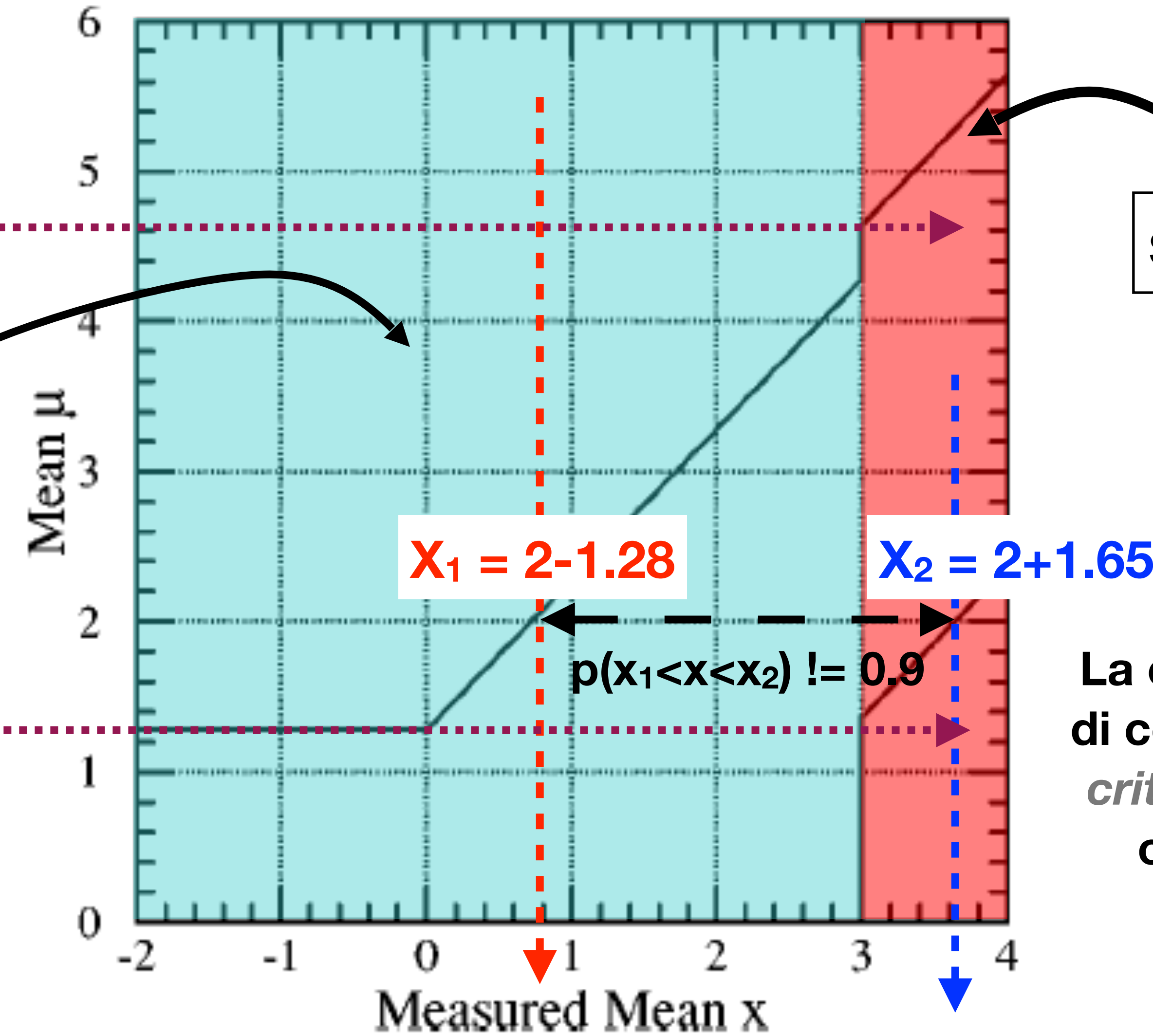
Si vede come gli intervalli di confidenza ottenuti non soddisfano le richieste.
Se per esempio il valore vero fosse μ=2, l'intervallo identificato (2-1.28, 2+1.65) non contiene il richiesto 90% di probabilità.

LIMITE O SCOPERTA ?

Convertiamo l’affermazione precedente in un diagramma alla ***Neyman*** che identifichi la banda di confidenza.

Measured Mean
X = Osservazione - fondo

Upper limit



scoperta

La costruzione della banda di confidenza ***non rispetta il criterio generale richiesto*****, ossia $p(x_1<x<x_2) = 0.9$**

l’intervallo di x identificato non contiene il 90% di probabilità come e’ richiesto

NOTA: Questo succede per ogni μ compreso tra 1.28 e 4.65

Limite o scoperta ?

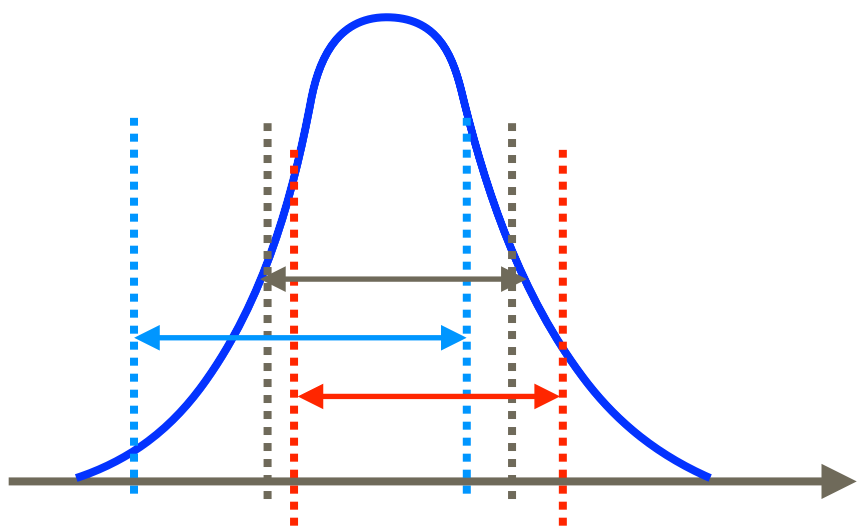
The Neyman confidence interval construction does not specify how you should draw, at fixed μ, the interval over the measured value that contains 90% of the probability content.

There are various different prescriptions:

1) add all x values greater than or less than a given value (upper limit or lower limit)
2) draw a central region with equal probability of the measurement falling above the region as below
3) starting with the parameter value which has maximum probability, keep adding points from more probable to less probable until the region contains 90% of the probability
4) The Feldman-Cousins prescription

Intervalli di confidenza alla Neyman

Feldman and Cousin



Per esempio

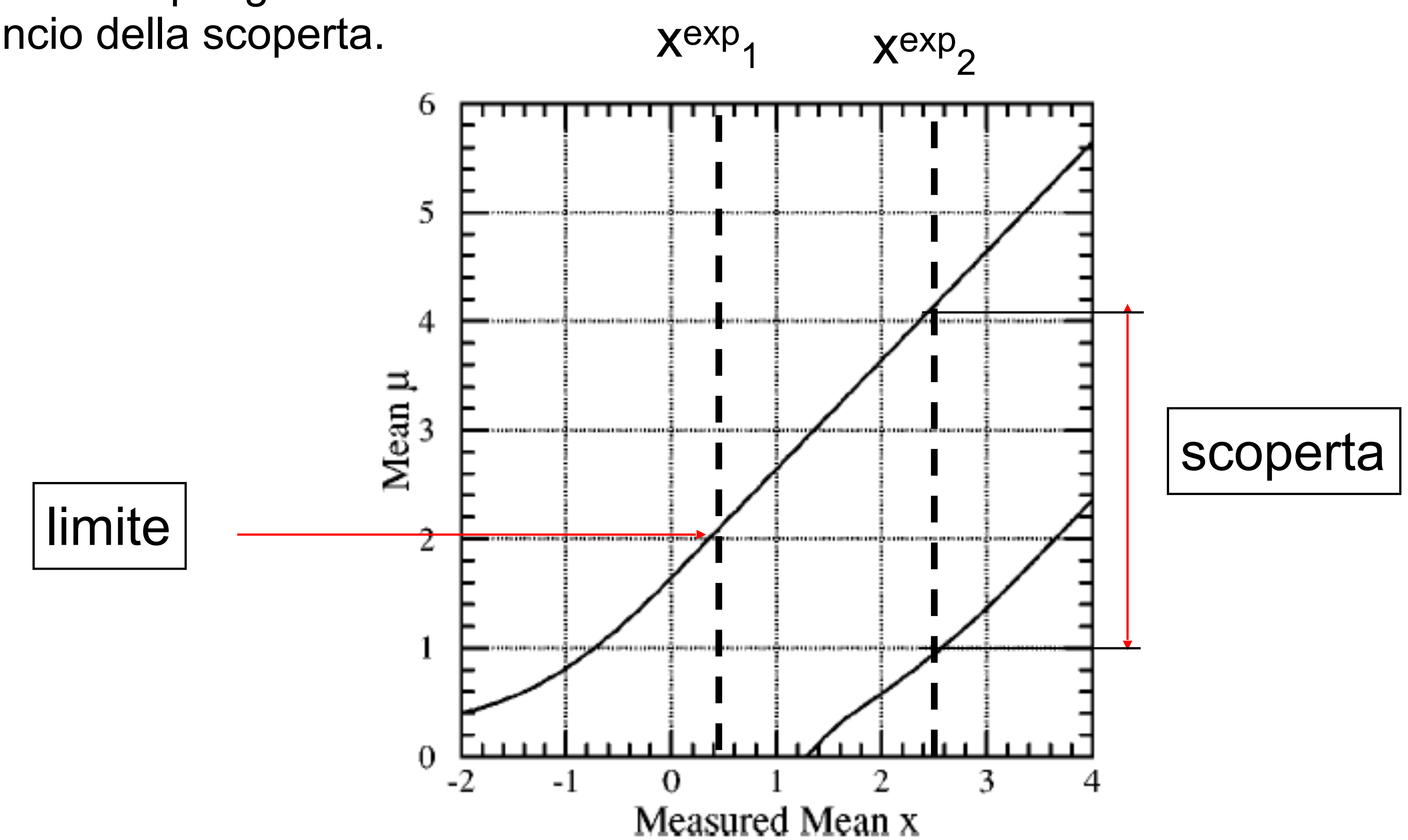
$$P(x_{1,1} < x < x_{1,2}) = P(x_{2,1} < x < x_{2,2}) = P(x_{3,1} < x < x_{3,2})$$

Quale di questi intervalli scegliamo ?

INTERVALLI DI CONFIDENZA E LIMITI

Una soluzione più generale secondo la scuola frequentista a questo problema è stata proposta da G.R. Feldman e R.D. Cousins (Phys. Rev. D 57, 3873-3889 (1998)).

La proposta di F & C consiste nell'***utilizzare un rapporto di Likelihood per costruire la banda di confidenza***.
Una volta individuata la banda si potrà agire nella maniera tradizionale.
Dato un valore sperimentale individuare la o le sue intersezioni con la banda:
- se l'intersezione è una sola allora pongo un limite
- se sono due faccio l'annuncio della scoperta.



INTERVALLI DI CONFIDENZA E LIMITI

$$R(x_1) = R(x_2)$$

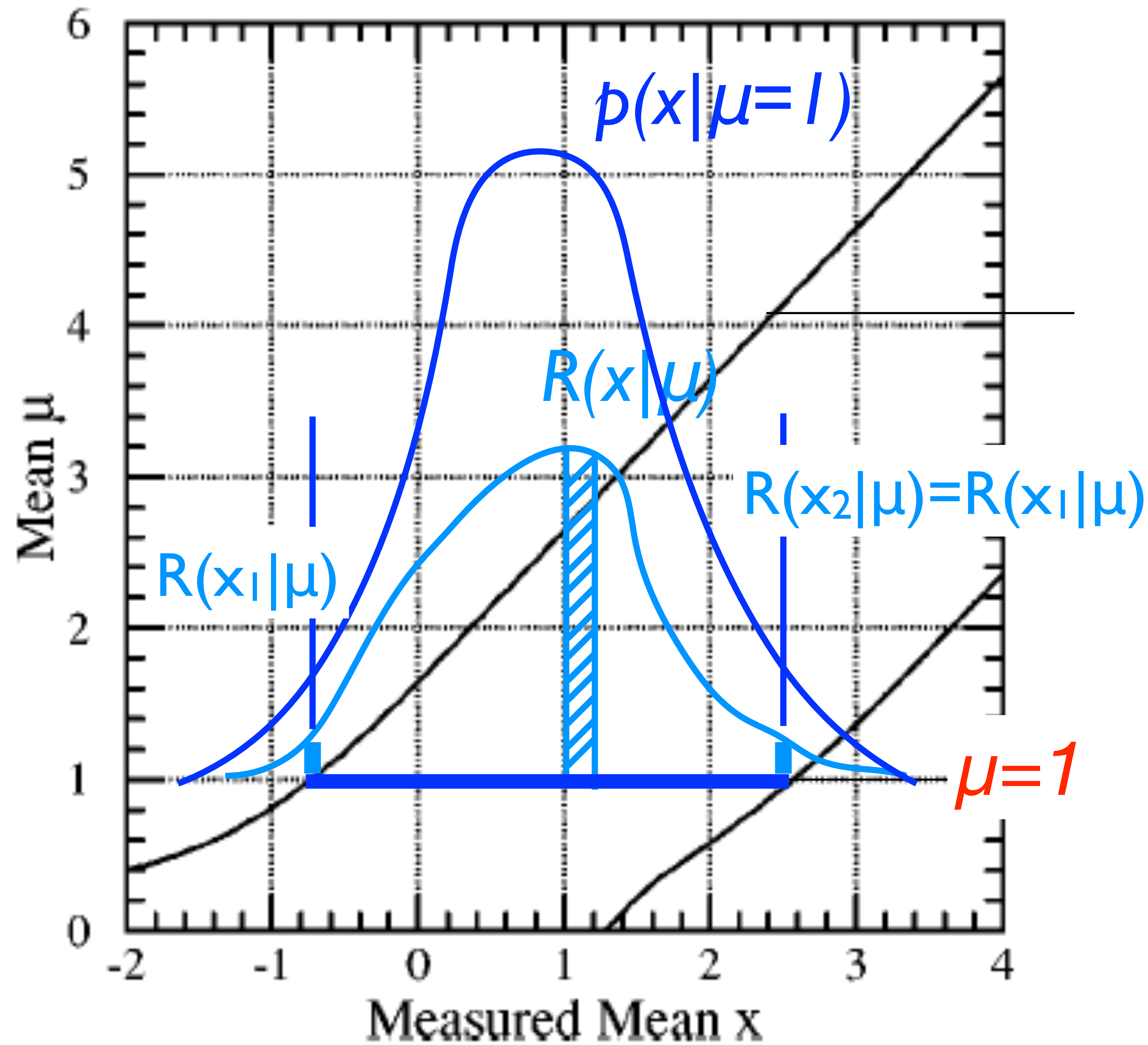
$$\int_{x_1}^{x_2} P(x \mid \mu)dx = \alpha$$

Per un valore di μ fissato considero R(x| μ);
Trovo il valore x_0 di x che massimizza R(x|μ)
Apro un intervallino attorno a x_0 aggiungendo progressivamente valori di x *secondo l'ordine decrescente di R*, fino a che $\int_{x_{min}}^{x_{max}} p(x \mid \mu)dx < \alpha$

Gli estremi dell'intervallo saranno

x_1 e x_2 tali che $\int_{x_1}^{x_1} p(x \mid \mu)dx = \alpha$

Naturalmente quindi $R(x_1 \mid \mu) = R(x_2 \mid \mu)$



INTERVALLI DI CONFIDENZA E LIMITI

$$R(x_1) = R(x_2)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} P(x \mid \mu)dx = \alpha$$

Per ogni valore fissato di μ (es. in figura μ=1)

1) considero **R(x|μ=1)** = P(x|1)/P(x | $\mu_{best}(x_{misurato})$);

2) Trovo il valore **x_0** di x che massimizza R(x|μ)

3) Apro un intervallino attorno a x_0 aggiungendo progressivamente valori di x *secondo l'ordine decrescente di R*, fino a che

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} p(x \mid \mu = 1)dx < \alpha$$

4) Gli estremi dell'intervallo saranno

$$x_1 \text{ e } x_2 \text{ tali che } \int_{x_1}^{x_1} p(x \mid \mu)dx = \alpha$$

Naturalmente quindi $R(x_1 \mid \mu) = R(x_2 \mid \mu)$