

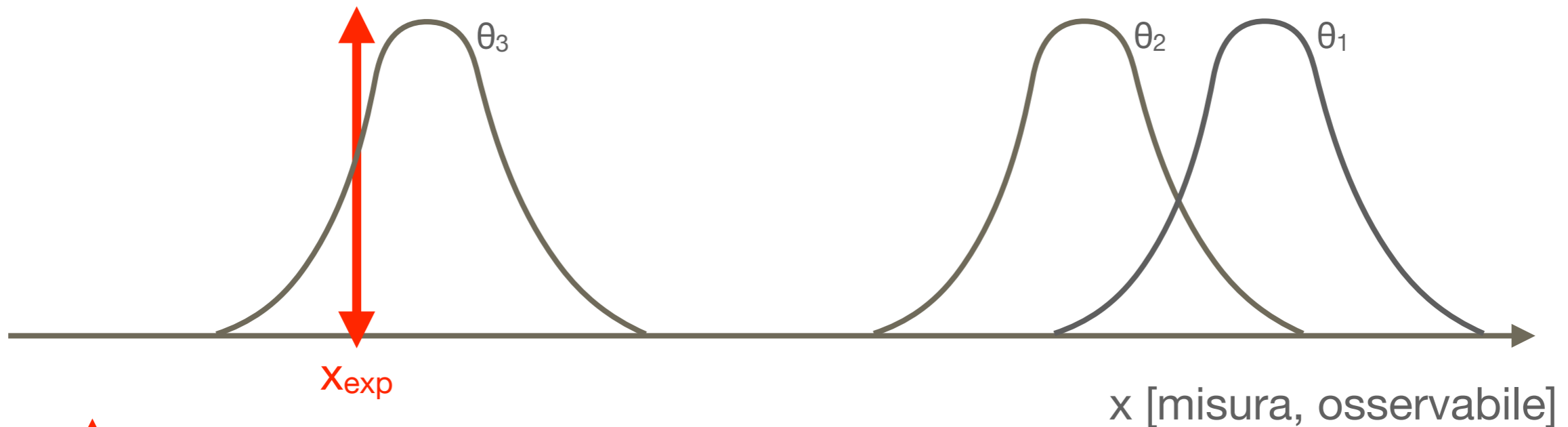
---

# LIMITI SUPERIORI

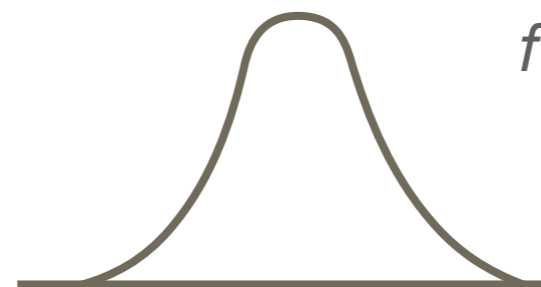
---

# DEFINIZIONE DI LIMITE SUPERIORE PER UN PARAMETRO

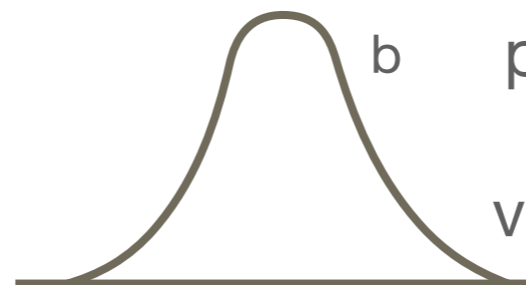
Non sappiamo se  $\theta$  e' realizzato nei dati, solo fondo =>  $\theta=0$



$X_{exp}$  = Misura  
sperimentale



$f(x|\theta)$  = pdf di  $x$ ,  
dipende dal  
parametro  $\theta$



pdf di  $x$ , in assenza del fenomeno  
ricercato (cioe' per  $\theta=0$ , minimo  
valore possibile per il segnale,  $\theta < 0$   
non e' fisico) = pdf del fondo

# DEFINIZIONE DI LIMITE SUPERIORE PER UN PARAMETRO

Non sappiamo se  $\theta$  e' realizzato nei dati, solo fondo  $\Rightarrow \theta=0$

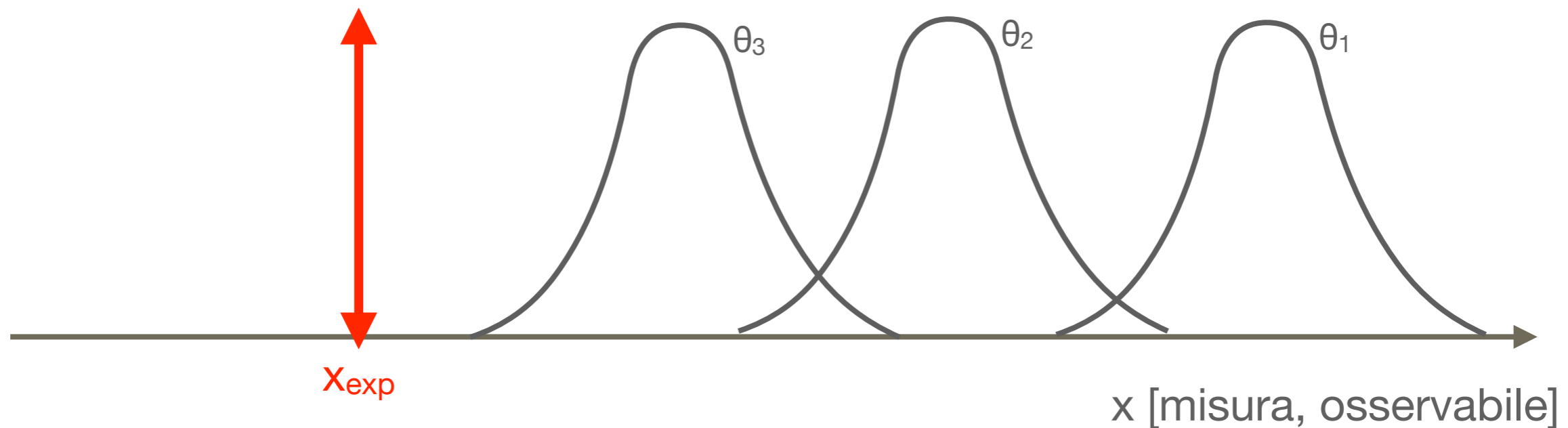


Se la nostra misura  $x = X_{exp}$

Possiamo tranquillamente escludere il valore  $\theta_1$  perche' la prob di osservare valori minori o uguali a  $x_{exp}$  nell'ipotesi  $\theta=\theta_1$  e' piccolissima

# DEFINIZIONE DI LIMITE SUPERIORE PER UN PARAMETRO

Non sappiamo se  $\theta$  e' realizzato nei dati, solo fondo  $\Rightarrow \theta=0$



Se la nostra misura  $x = x_{exp}$

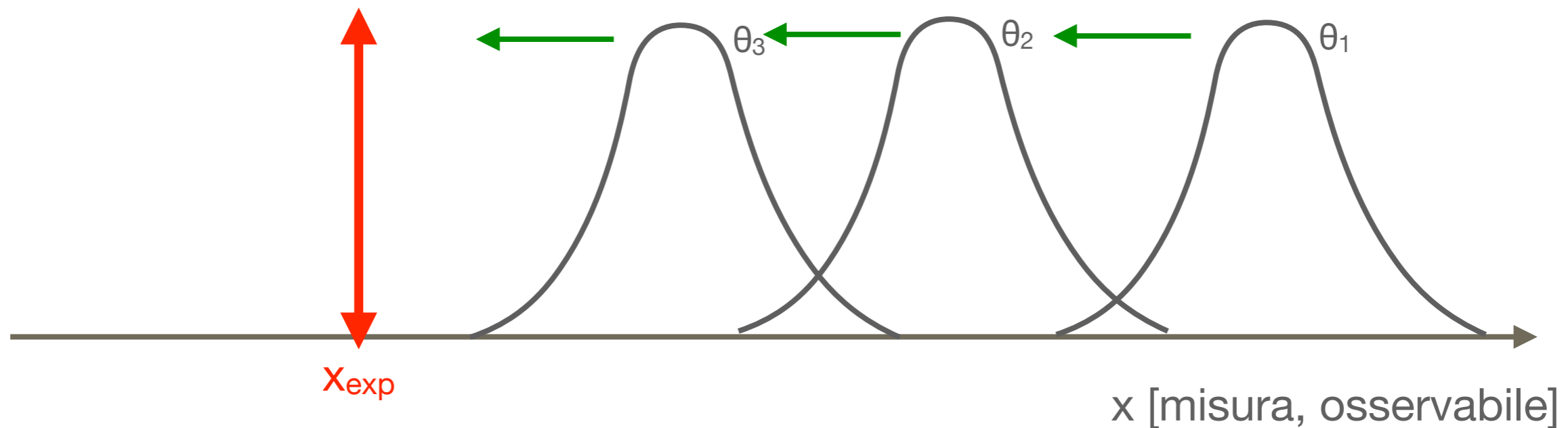
Possiamo tranquillamente escludere  $\theta_1$  perche' la prob di osservare valori minori o uguali a  $x_{exp}$  nell'ipotesi  $\theta=\theta_1$  e' piccolissima

Allo stesso modo possiamo escludere  $\theta_2, \theta_3 < \theta_1$  perche'

$$p(x < x_{exp} | \theta = \theta_3) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta_3) dx \simeq 0$$

# DEFINIZIONE DI LIMITE SUPERIORE PER UN PARAMETRO

Non sappiamo se  $\theta$  e' realizzato nei dati, solo fondo  $\Rightarrow \theta=0$



Se la nostra misura  $x = x_{exp}$

Possiamo tranquillamente escludere  $\theta_1$  perche' la prob di osservare valori minori o uguali a  $x_{exp}$  nell'ipotesi  $\theta=\theta_1$  e' piccolissima

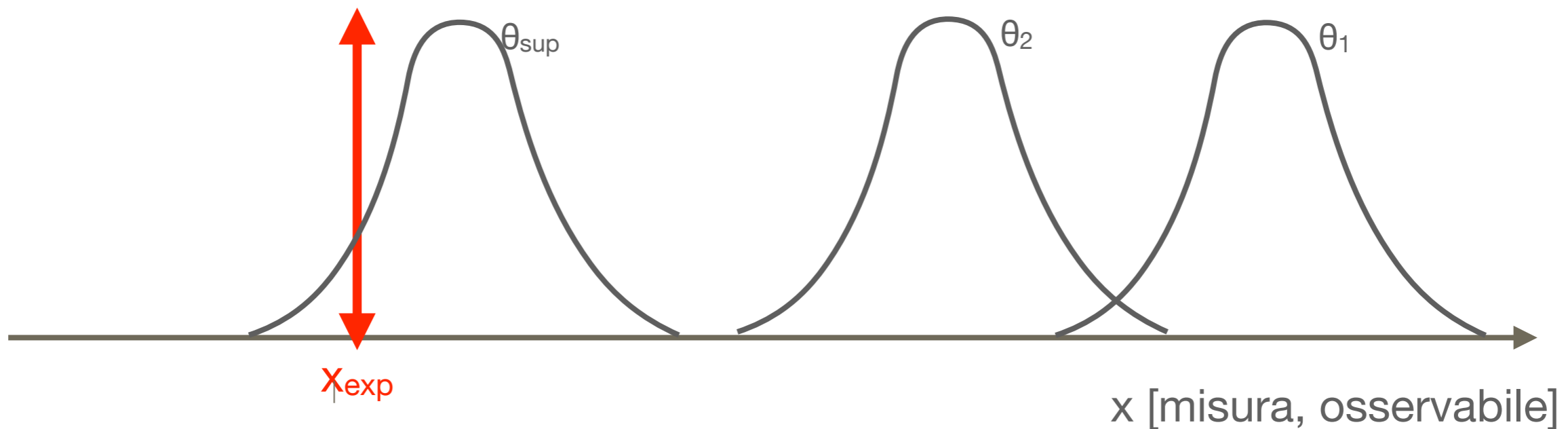
Allo stesso modo possiamo escludere  $\theta_2, \theta_3 < \theta_1$  perche'

$$p(x < x_{exp} | \theta = \theta_3) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta_3) dx \simeq 0$$

Fino a quali valori di  $\theta$  posso fare questa affermazione ?

# DEFINIZIONE DI LIMITE SUPERIORE PER UN PARAMETRO

Non sappiamo se  $\theta$  e' realizzato nei dati, solo fondo  $\Rightarrow \theta=0$



Se la nostra misura  $x = x_{exp}$

Scegliamo  $\theta_{sup}$  tale che  $p(x < x_{exp} | \theta = \theta_{sup}) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta_{sup}) dx = 10\%$

Allora per ogni  $\theta > \theta_{sup}$  la probabilita' di un risultato  $x < x_{exp}$  e' minore del 10%. Percio' posso dire che  $\theta_{sup}$  definito da questa condizione e' il limite superiore per  $\theta$  compatibile con la mia misura  $x_{exp}$  **al 90% di C.L.**

---

# CASO GAUSSIANO

---

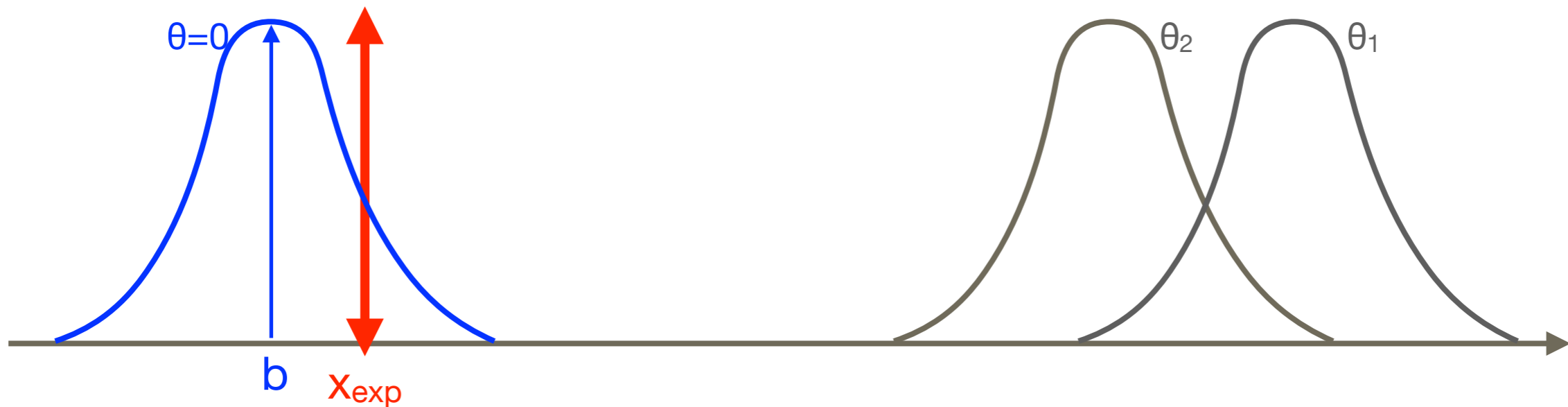
---

# CASO POISSONIANO

---



# BACKGROUND



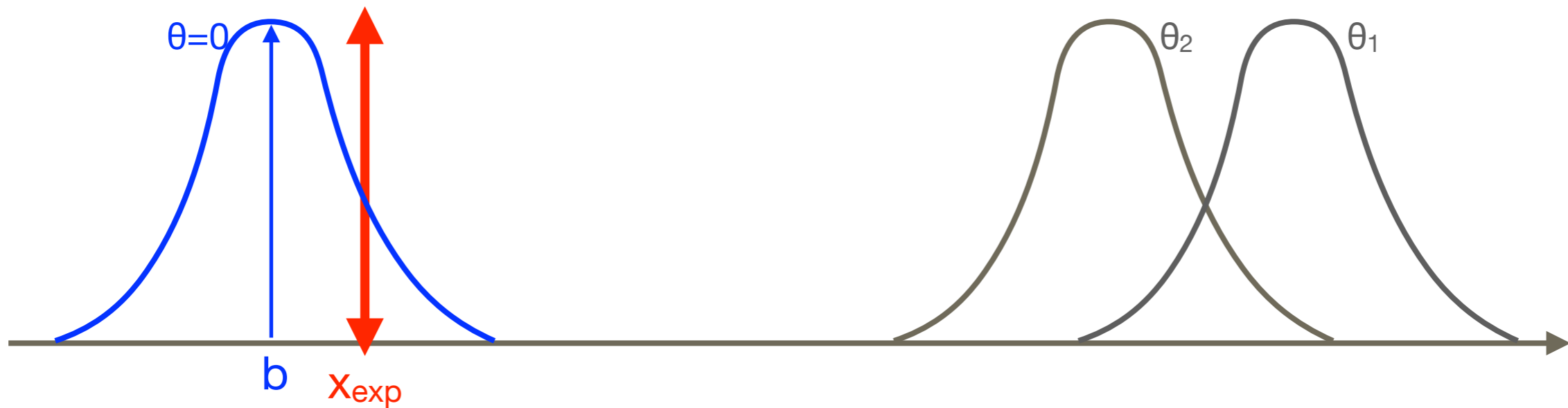
Molto frequentemente la misura  $x = x_{exp} = n_b + n_s$

$n_b$  ha un valore di aspettazione uguale a  $b$ , ma fluttua secondo una pdf, la pdf corrispondente ad assenza di segnale,  $f(x | \theta = 0)$

Le nostre  $f(x | \theta)$  descrivono in generale la probabilita' di  $x$  in presenza di un segnale  $s(\theta)$  e di un background che ha valore di aspettazione  $b$

Se nella realta'  $\theta=0$ , ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la  $f(x | \theta = 0)$

# BACKGROUND



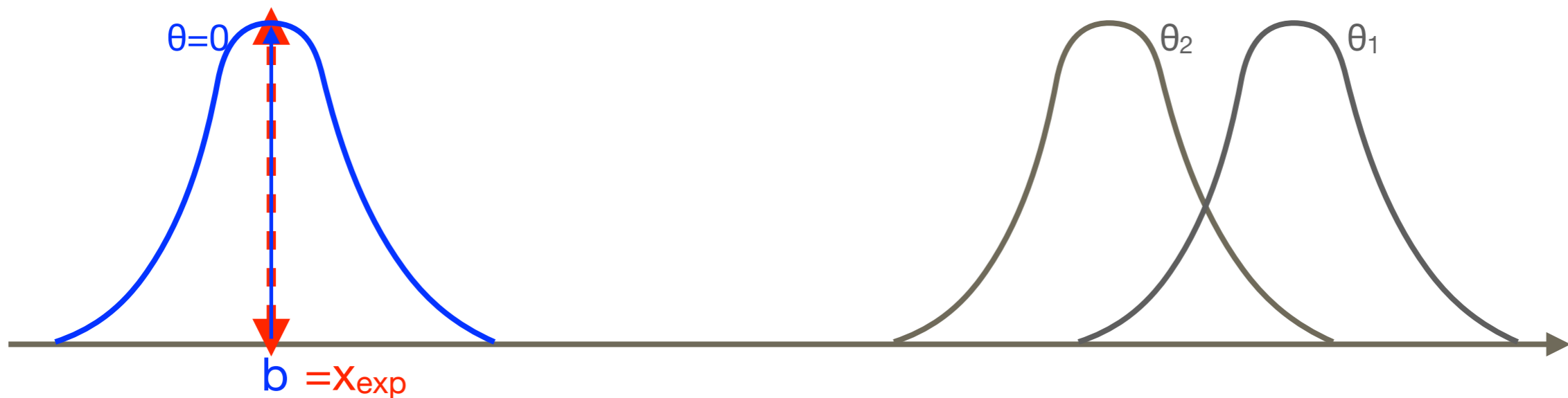
La misura  $x = x_{exp} = n_b + n_s$

Consideriamo il caso in cui il segnale non sia realizzato  $\rightarrow$  la mia misura fluttuerà secondo la  $f(x | \theta = 0)$

Se immagino di ripetere N volte la misura, qual è la distribuzione del limite  $\theta_{sup}$  che otterrò ?

In quale frazione degli esperimenti 0 (valore di  $\theta$  che corrisponde ad assenza di segnale) sarà  $< \theta_{sup}$  ?  $\Rightarrow$  vedere caso gaussiano, poissoniano, ecc

# BACKGROUND



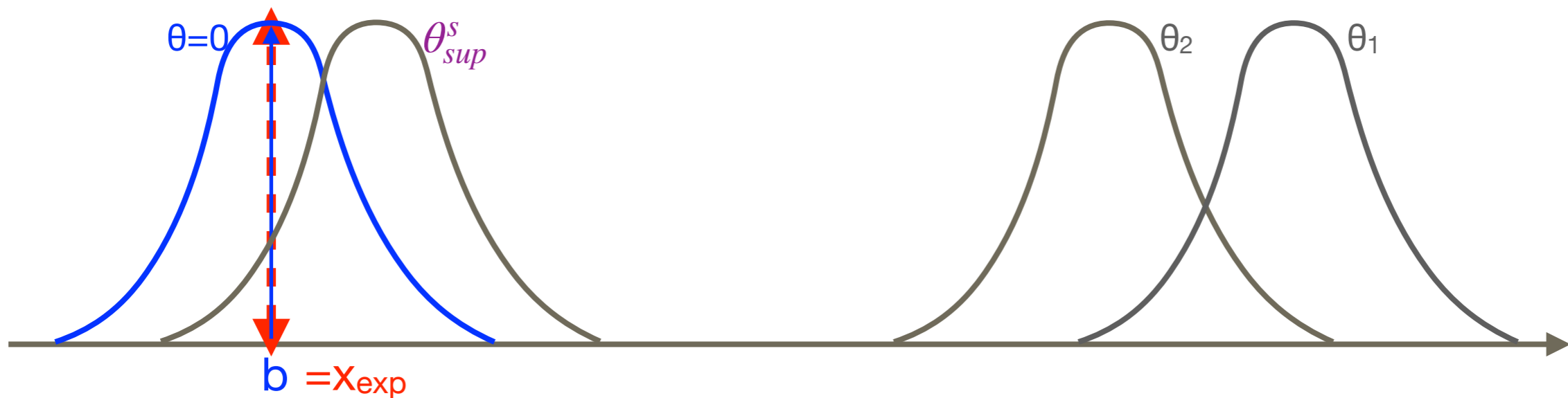
La misura  $x = x_{exp} = n_b + n_s$

Se nella realta'  $\theta=0$ , ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la  $f(x | \theta = 0)$

Se immagino di ottenere  $x_{exp} = b$  qual e' il limite  $\theta_{sup}$  che otterrò ?

# BACKGROUND

$$p(x < b | \theta = \theta_{sup}^s) = \int_{-\infty}^b f(x; \theta_{sup}^s) dx = 10\%$$



La misura  $x = x_{exp} = n_b + n_s$

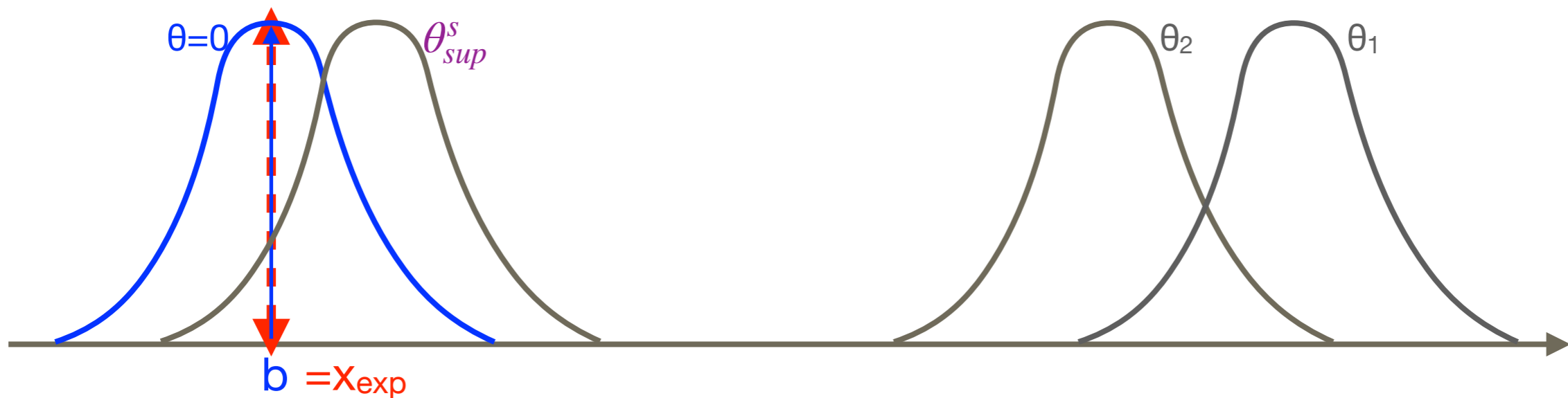
Se nella realta'  $\theta=0$ , ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la  $f(x | \theta = 0)$

Se immagino di ottenere  $x_{exp} = b$  qual e' il limite  $\theta_{sup}$  che otterrò ?

Chiamo questo valore  $\theta_{sup}^s$ , si tratta del **limite di sensibilita'** del mio esperimento (determinato dal background) e corrisponde [vedremo con un toy MC] al limite atteso, nell'ipotesi di solo background (assenza di segnale,  $\theta=0$ )

# BACKGROUND

$$p(x < b | \theta = \theta_{sup}^s) = \int_{-\infty}^b f(x; \theta_{sup}^s) dx = 10\%$$



La misura  $x = x_{exp} = n_b + n_s$

Se nella realta'  $\theta=0$ , ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la  $f(x | \theta = 0)$

Se immagino di ottenere  $x_{exp} = b$  il limite e'  $\theta_{sup}^s$

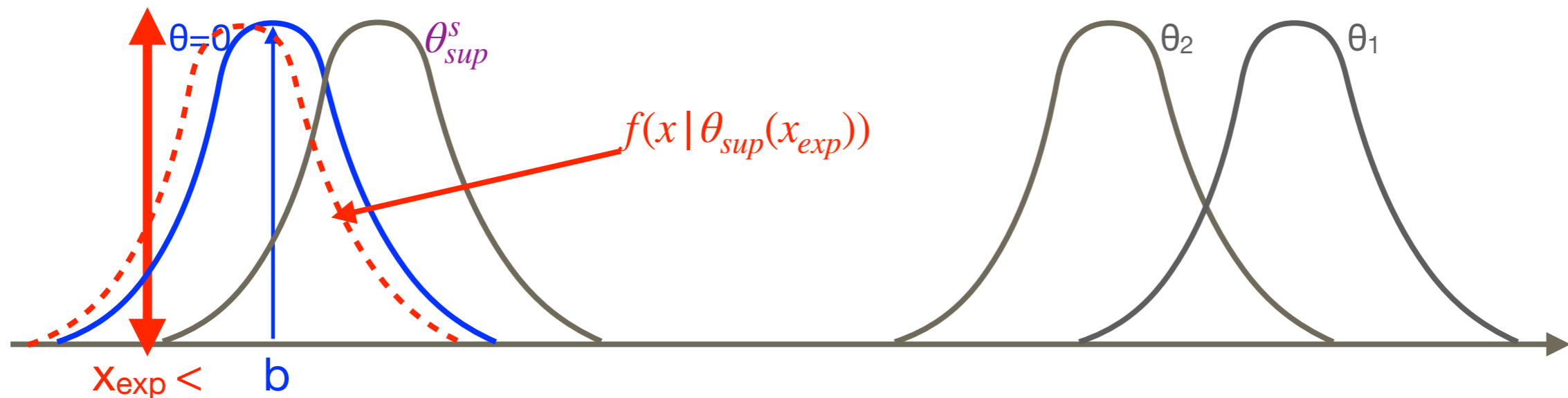
NOTA:

se, per effetto delle fluttuazioni statistiche di  $n_b$ ,  $x_{exp} > b$ ,  $\theta_{sup} > \theta_{sup}^s$

**se, per effetto delle fluttuazioni statistiche di  $n_b$ ,  $x_{exp} < b$ ,  $\theta_{sup} < \theta_{sup}^s$**

# BACKGROUND

$$p(x < b | \theta = \theta_{sup}^s) = \int_{-\infty}^b f(x; \theta_{sup}^s) dx = 10\%$$



La misura  $x = x_{exp} = n_b + n_s$

Se nella realta'  $\theta=0$ , ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la  $f(x | \theta = 0)$

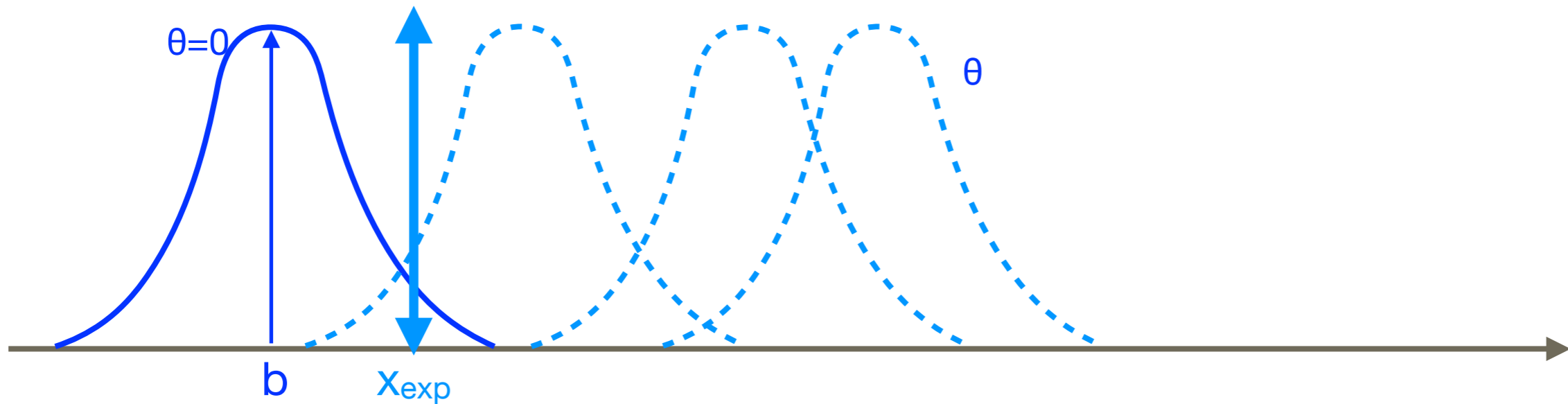
Se immagino di ottenere  $x_{exp} = b$  il limite e'  $\theta_{sup}^s$

NOTA:

se, per effetto delle fluttuazioni statistiche di  $n_b$ ,  $x_{exp} < b$ ,  $\theta_{sup} = \theta_{sup}^s(x_{exp}) < \theta_{sup}^s$

**Ha senso fisicamente ottenere un limite migliore, piu' stringente, di quello di sensibilità ? E' prudente quotare come risultato del mio esperimento un limite piu' stringente, di quello di sensibilità ?**

# METODO CLS [ZECH]



La misura  $x = x_{exp} = n_b + n_s$  Siamo nel caso  $\theta=0$ , ossia il segnale non e' realizzato

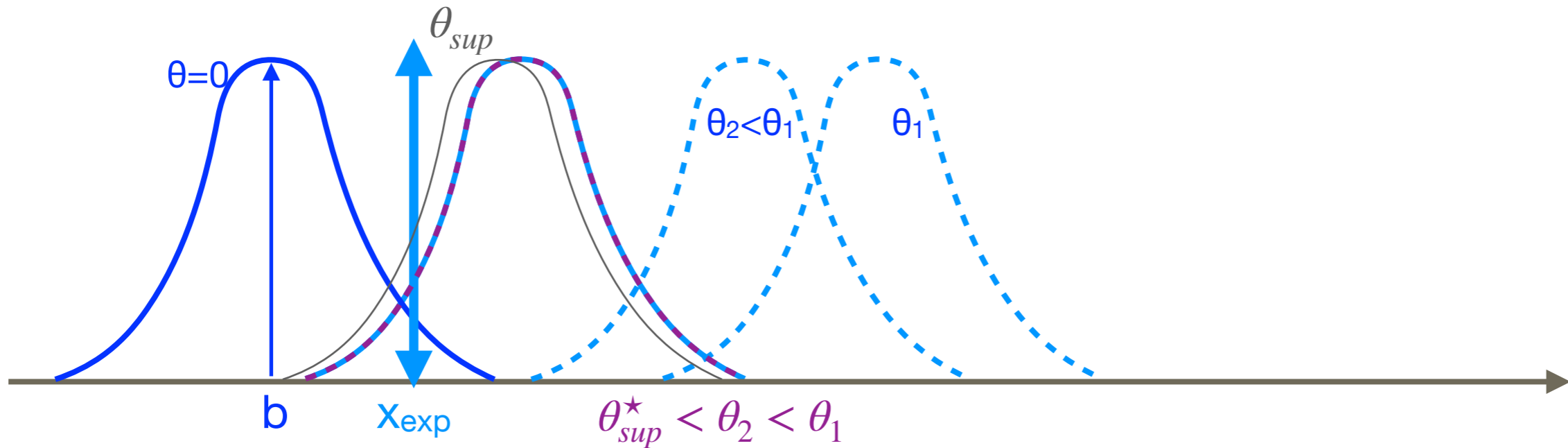
Consideriamo

$$CL_b = p(x < x_{exp} | \theta = 0) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta = 0) dx$$

$$CL_{s+b} = p(x < x_{exp} | \theta) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta) dx \quad \lllll \text{dipende da } \theta$$

Definiamo  $CLS = CL_{s+b}/CL_b$

# METODO CLS



La misura  $x = x_{exp} = n_b + n_s$  Siamo nel caso  $\theta=0$ , ossia il segnale non e' realizzato

Consideriamo

$$CL_b = p(x < x_{exp} | \theta = 0) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta = 0) dx$$

$$CL_{s+b} = p(x < x_{exp} | \theta) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta) dx$$

Definiamo  $CLS = CL_{s+b}/CL_b$

Ricordiamo che  $\theta_{sup}$  e' definito da

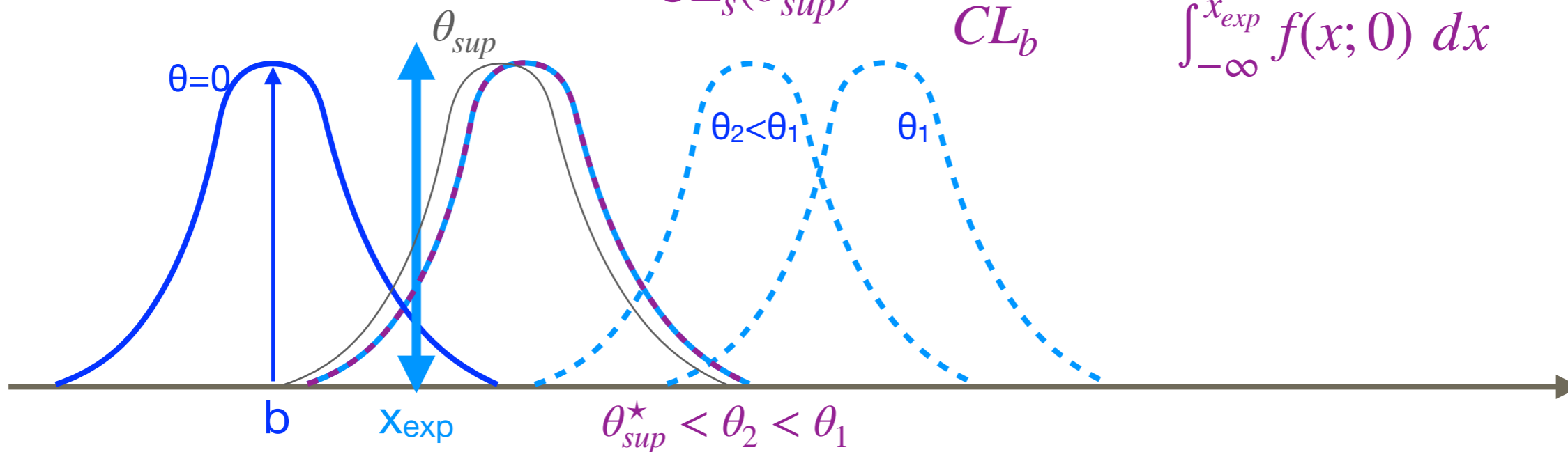
$$CL_{s+b}(\theta_{sup}) = P(x < x_{exp} | \theta_{sup}) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta_{sup}) dx = 10\%$$



# METODO CLS

definiamo

$$CL_s(\theta_{sup}^*) = \frac{CL_{s+b}}{CL_b} = \frac{\int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta_{sup}^*) dx}{\int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; 0) dx} = 10\%$$



La misura  $x = x_{exp} = n_b + n_s$

Siamo nel caso  $\theta=0$ , ossia il segnale non e' realizzato

Consideriamo

$$CL_b = p(x < x_{exp} | \theta = 0) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta = 0) dx$$

$$CL_{s+b} = p(x < x_{exp} | \theta) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta) dx$$

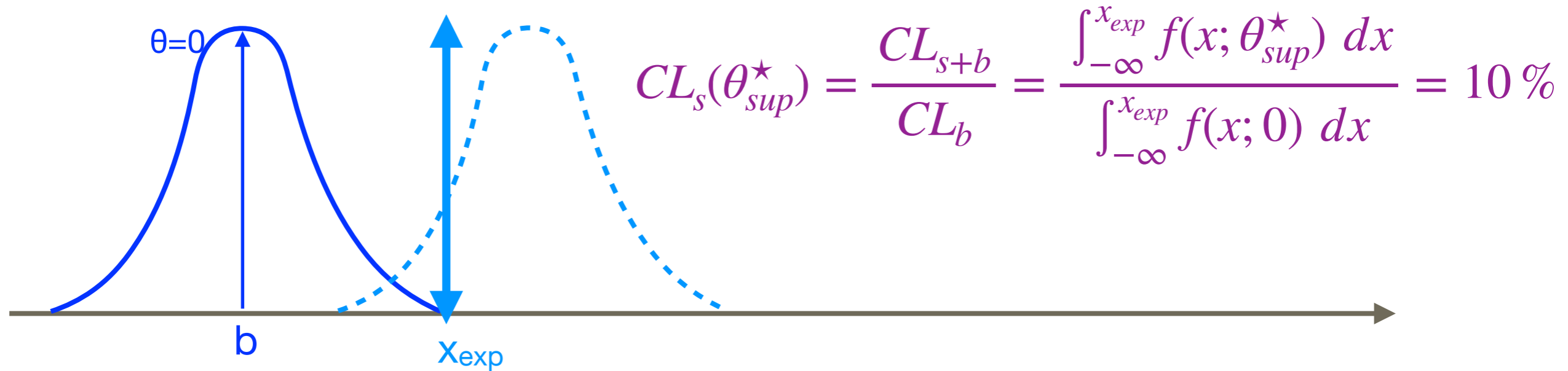
Definiamo  $CLS = CL_{s+b}/CL_b$

Ricordiamo che  $\theta_{sup}$  e' definito da

$$CL_{s+b}(\theta_{sup}) = P(x < x_{exp} | \theta_{sup}) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta_{sup}) dx = 10\%$$

**NOTA:**  $\theta_{sup} < \theta_{sup}^* < \theta_2 < \theta_1$

# METODO CLS



La misura  $x = x_{exp} = n_b + n_s$

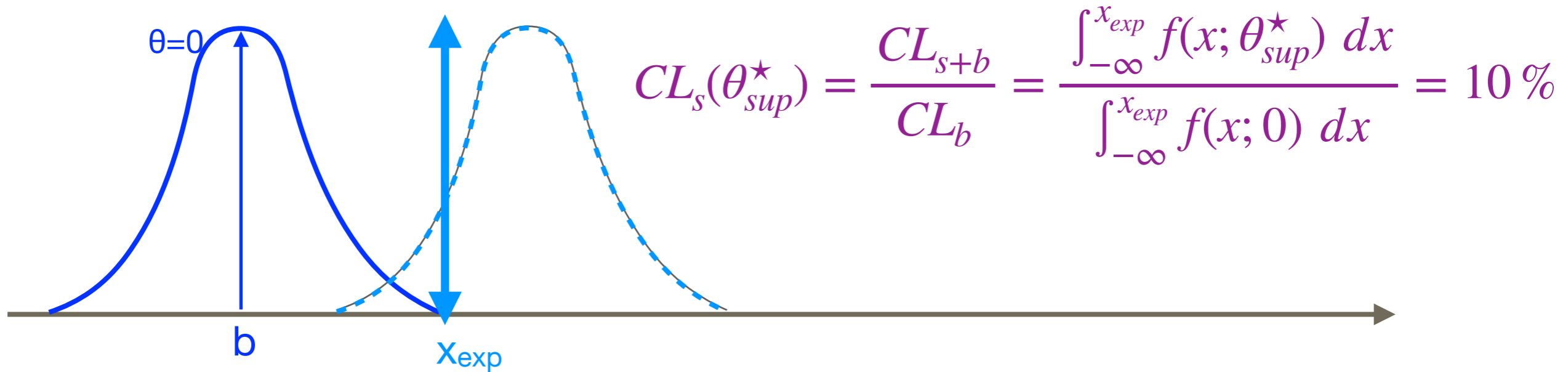
Siamo nel caso  $\theta=0$ , ossia il segnale non e' realizzato  
Consideriamo il valore in figura di  $x_{exp}$

Consideriamo

$$CL_b = p(x < x_{exp} | \theta = 0) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta = 0) dx \sim 1$$

$$CL_{s+b}(\theta_{sup}^*) = p(x < x_{exp} | \theta_{sup}^*) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta_{sup}^*) dx \sim CL_s(\theta_{sup}^*) \implies \theta_{sup} \sim \theta_{sup}^*$$

# METODO CLS



La misura  $x = x_{exp} = n_b + n_s$

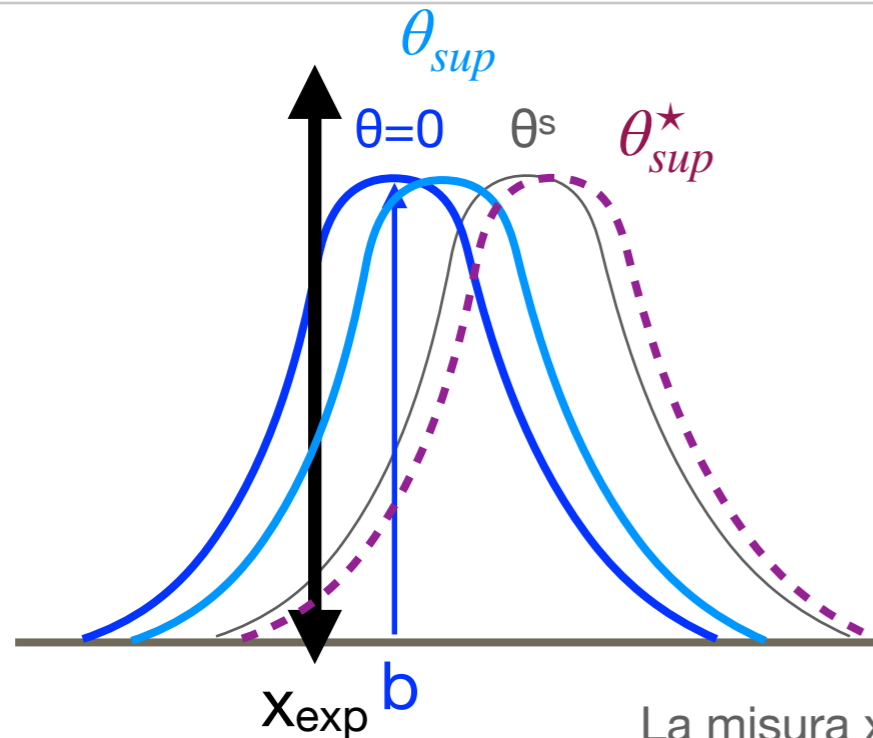
Siamo nel caso  $\theta=0$ , ossia il segnale non e' realizzato  
Consideriamo il valore in figura di  $x_{exp}$

Consideriamo

$$CL_b = p(x < x_{exp} | \theta = 0) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta = 0) dx \sim 1$$

$$CL_{s+b}(\theta_{sup}^*) = p(x < x_{exp} | \theta) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta) dx \sim CL_s(\theta_{sup}^*) \implies \theta_{sup} \sim \theta_{sup}^*$$

# METODO CLS



$$CL_s(\theta_{sup}^*) = \frac{CL_{s+b}}{CL_b} = \frac{\int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta_{sup}^*) dx}{\int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; 0) dx} = 10\%$$

Consideriamo il valore in figura di  $x_{exp}$

La misura  $x = x_{exp} = n_b + n_s$  Siamo nel caso  $\theta=0$ , ossia il segnale non e' realizzato

Consideriamo

$$CL_b = p(x < x_{exp} | \theta = 0) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta = 0) dx < 1, \text{ per esempio in figura 0.2}$$

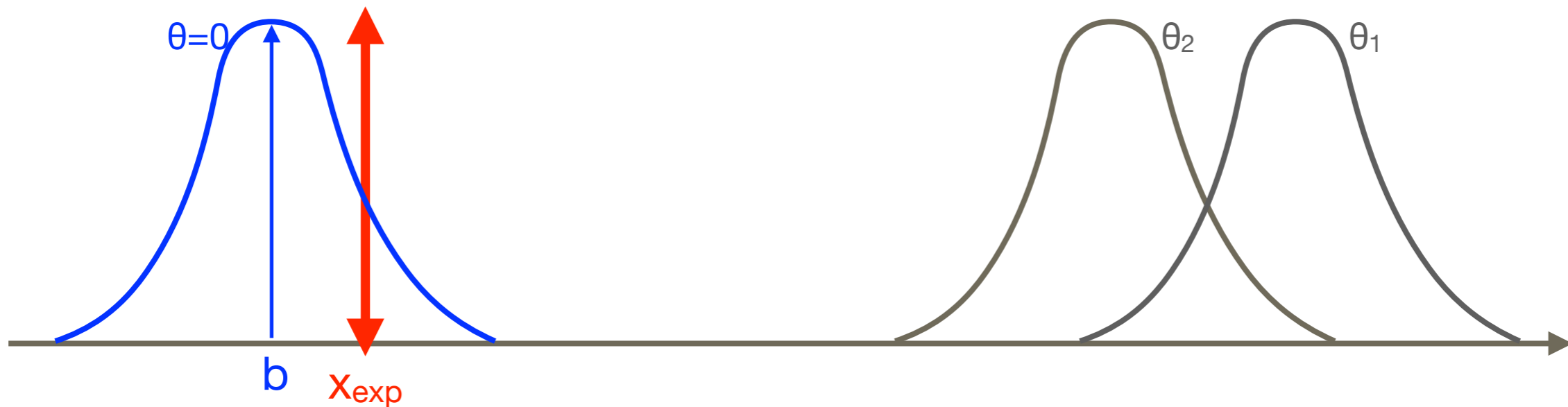
$$CL_{s+b}(\theta_{sup}) = p(x < x_{exp} | \theta_{sup}) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta_{sup}) dx = 0.1 \quad \text{inoltre} \quad p(x < x_{exp} = b | \theta^s) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta^s) dx = 0.1$$

$$CL_{s+b}(\theta_{sup}^*) = p(x < x_{exp} | \theta_{sup}^*) = \int_{-\infty}^{x_{exp}} f(x; \theta_{sup}^*) dx \sim 0.2 \times CL_s(\theta_{sup}^*) = 0.2 \times 0.1 = 2\%$$

$\theta_{sup} < \theta^s$  situazione non fisica, risultato migliore del limite di sensibilità

$\theta^s < \theta_{sup}^*$  situazione prudente, il risultato  $\theta_{sup}^*$  e' tendenzialmente (non sempre) peggiore del limite (classico) di sensibilità

# METODO CLS



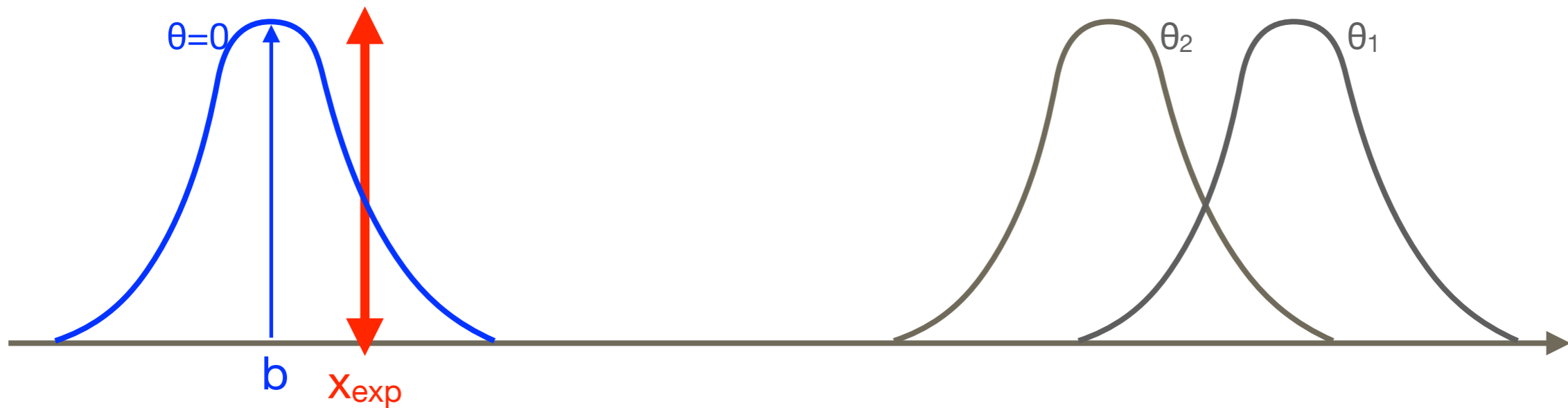
La misura  $x = x_{exp} = n_b + n_s$

Se nella realta'  $\theta=0$ , ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la  $f(x | \theta = 0)$

Se immagino di ripetere N volte la misura,

- qual e' la distribuzione del limite  $\theta_{sup}$  che otterrò ?
- qual e' la distribuzione del limite  $\theta_{sup}^*$  che otterrò ?
- in quale frazione degli esperimenti 0 (valore di  $\theta$  che corrisponde ad assenza di segnale) sara'  $< \theta_{sup}$  ?
  - => vedere caso gaussiano, poissoniano, ecc
- in quale frazione degli esperimenti 0 (valore di  $\theta$  che corrisponde ad assenza di segnale) sara'  $< \theta_{sup}^*$  ?
  - => vedere caso gaussiano, poissoniano, ecc

# METODO CLs VS METODO CLASSICO



La misura  $x = x_{exp} = n_b + n_s$

Se nella realta'  $\theta=0$ , ossia il segnale non e' realizzato, la mia misura fluttuerà secondo la  $f(x | \theta = 0)$

Per diverse misure  $x_{exp}$  produrre curve di  $\theta_{sup}^*$  vs  $\theta_{sup}$  per  $b=2$ ,

$b=5$ ,

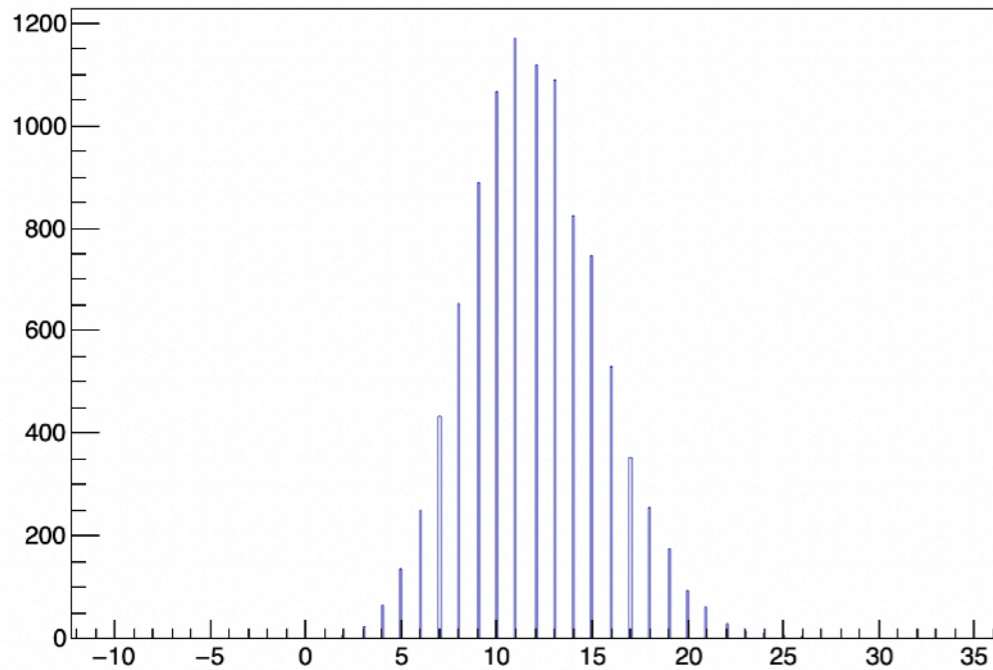
$b=10, b=30, b=50$

# ESERCIZIO

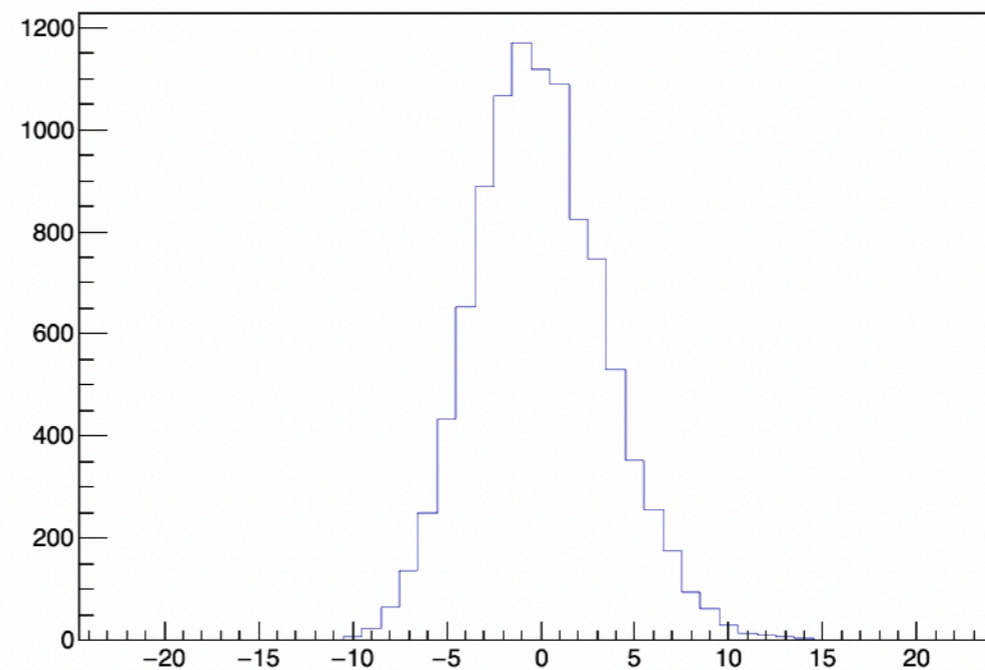
```

root [1] .x LimiteAttesoPoisson.C
Nbackground, CL 12 0.9      Limite atteso  5.782
NCov      0.9088
NCov CLs  1
root [2] .ls
OBJ: TH2F      hbox      : 0 at: 0x12abbd800
OBJ: TH1F      hDato  Misure : 0 at: 0x1448192c0
OBJ: TH1F      hBestSign  Segnale = misura - fondo atteso : 0 at: 0x144819a20
OBJ: TH1F      hUpLim  Limite : 0 at: 0x144819e10
OBJ: TH1F      hUpLimCLs  Limite CLs : 0 at: 0x14481a200
OBJ: TH2D      hLimVsCLs  Limite CLs vs Limite std : 0 at: 0x12aa74c00
OBJ: TH2D      hLimVsData  Limite std vs segnale-misurato : 0 at: 0x12ad17c00
OBJ: TH2D      hLimCLsVsData  Limite CLs vs segnale-misurato : 0 at: 0x12aa6a000
root [3] hDato->Draw
    
```

Misure



Segnale = misura - fondo atteso

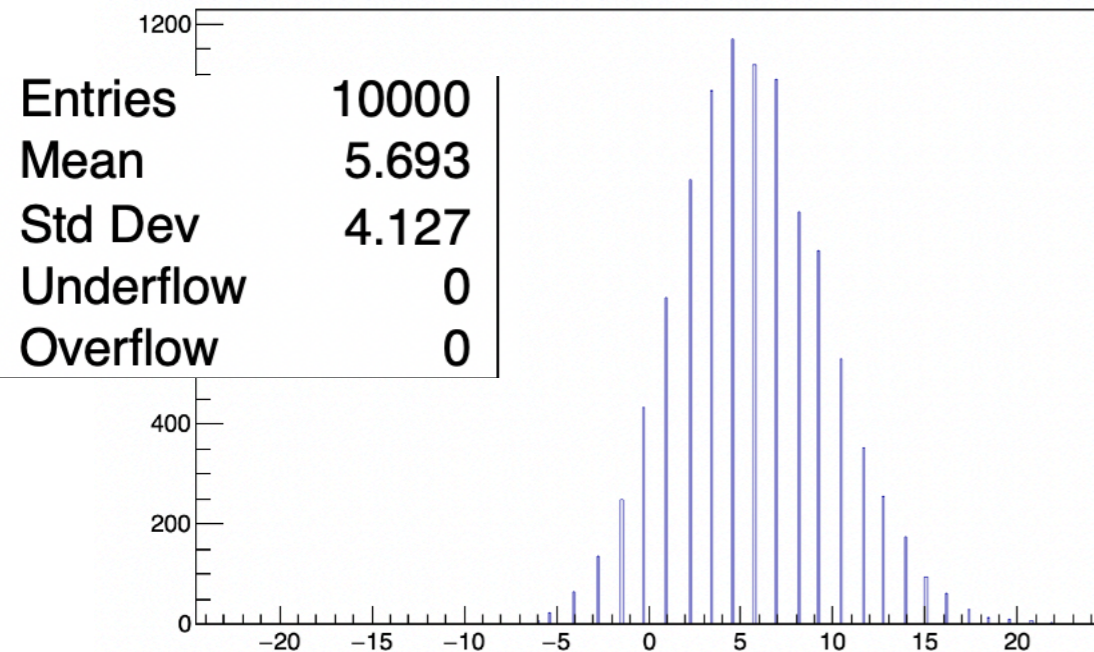


# ESERCIZIO

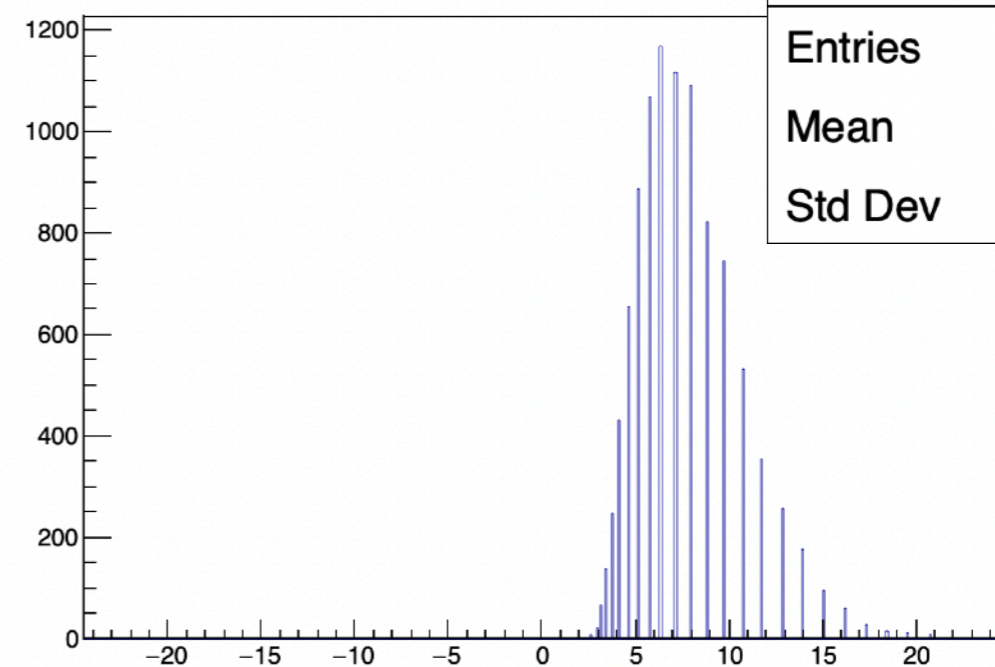
```

root [1] .x LimiteAttesoPoisson.C
Nbackground, CL 12 0.9      Limite atteso  5.782
NCov      0.9088
NCov CLs  1
root [2] .ls
OBJ: TH2F      hbox      : 0 at: 0x12abbd800
OBJ: TH1F      hDato  Misure : 0 at: 0x1448192c0
OBJ: TH1F      hBestSign  Segnale = misura - fondo atteso : 0 at: 0x144819a20
OBJ: TH1F      hUpLim  Limite : 0 at: 0x144819e10
OBJ: TH1F      hUpLimCLs  Limite CLs : 0 at: 0x14481a200
OBJ: TH2D      hLimVsCLs  Limite CLs vs Limite std : 0 at: 0x12aa74c00
OBJ: TH2D      hLimVsData  Limite std vs segnale-misurato : 0 at: 0x12ad17c00
OBJ: TH2D      hLimCLsVsData  Limite CLs vs segnale-misurato : 0 at: 0x12aa6a000
root [3] hDato->Draw
    
```

Limite



Limite CLs

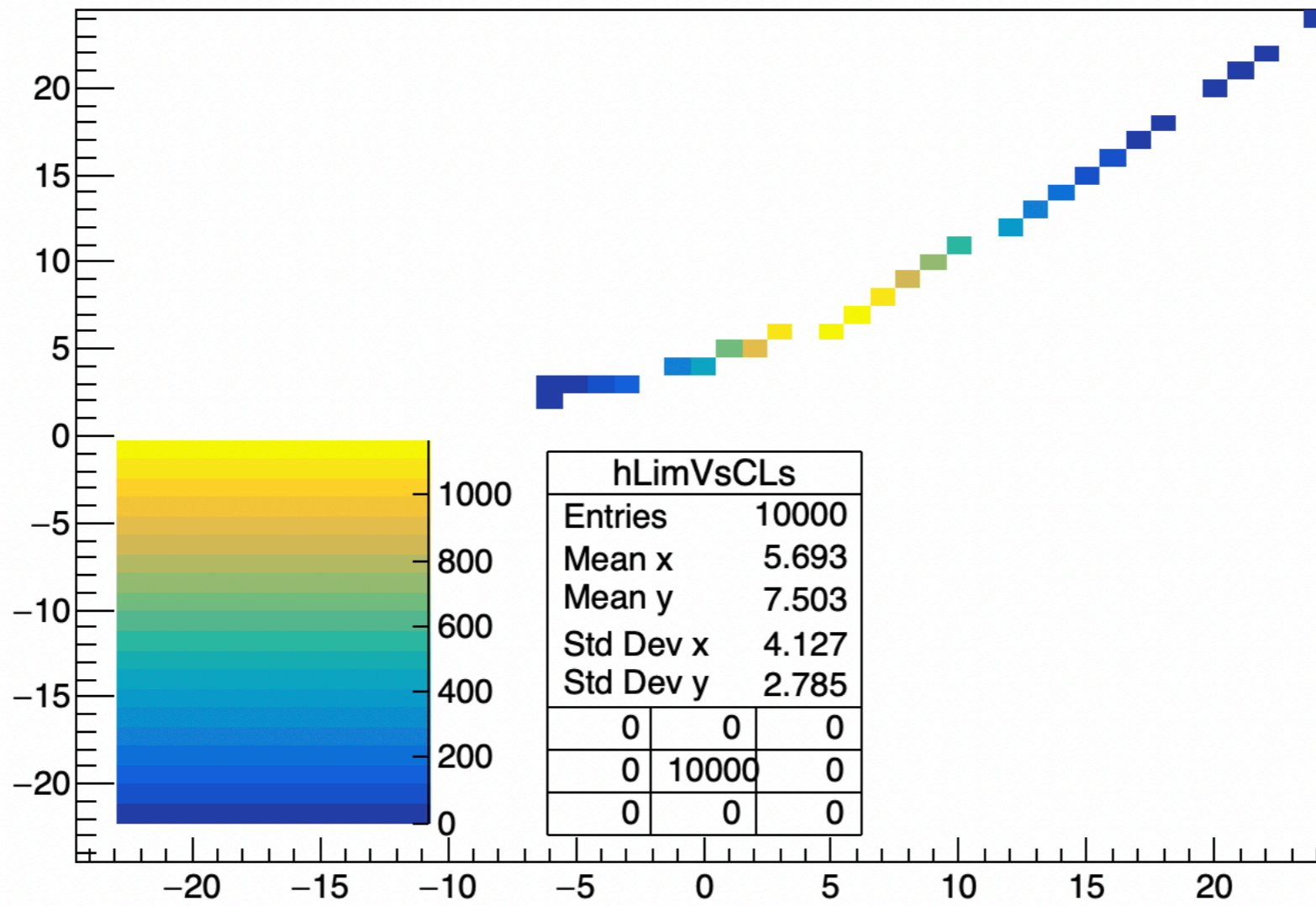


hUpLimCLs

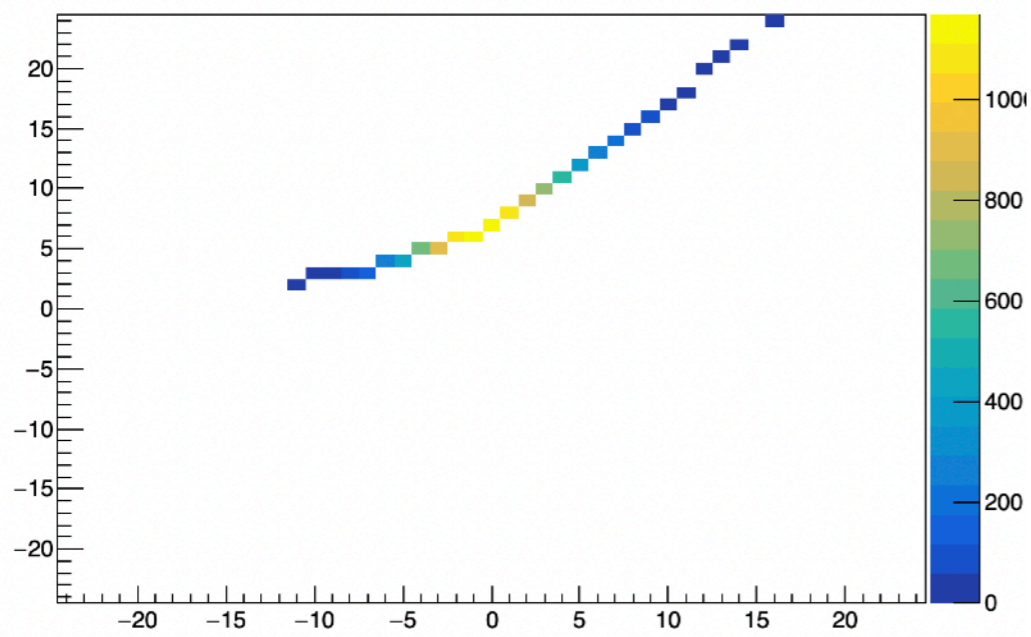
Entries	10000
Mean	7.503
Std Dev	2.785



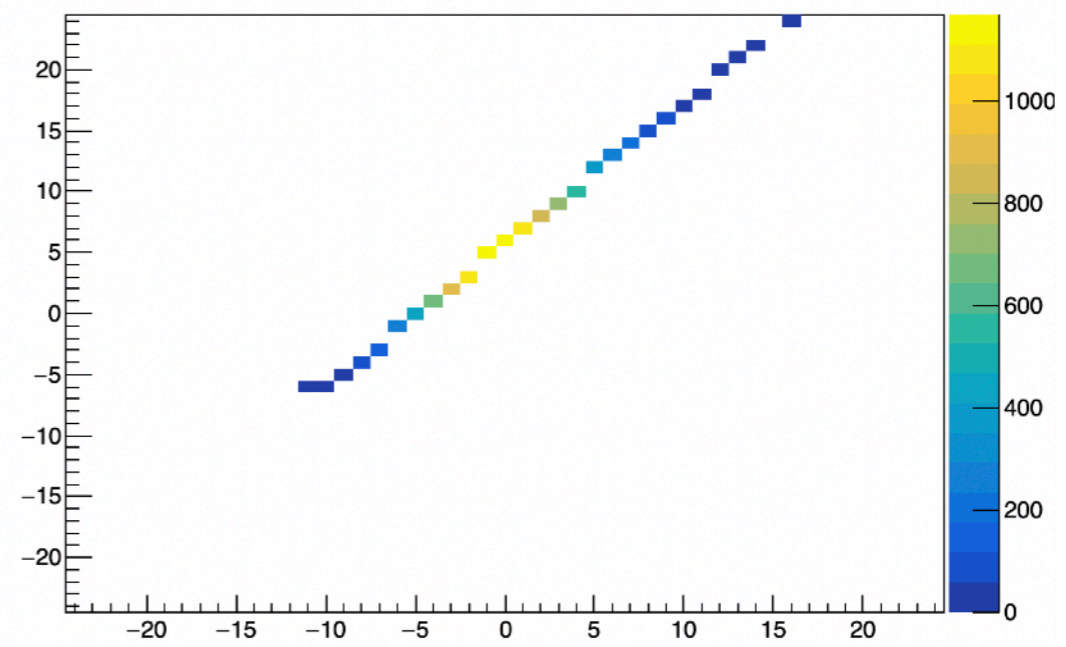
### Limite CLs vs Limite std



Limite CLs vs segnale-misurato



Limite std vs segnale-misurato



---

# SCOPERTA O LIMITE ?

---

Intervallo di confidenza o limite superiore ?

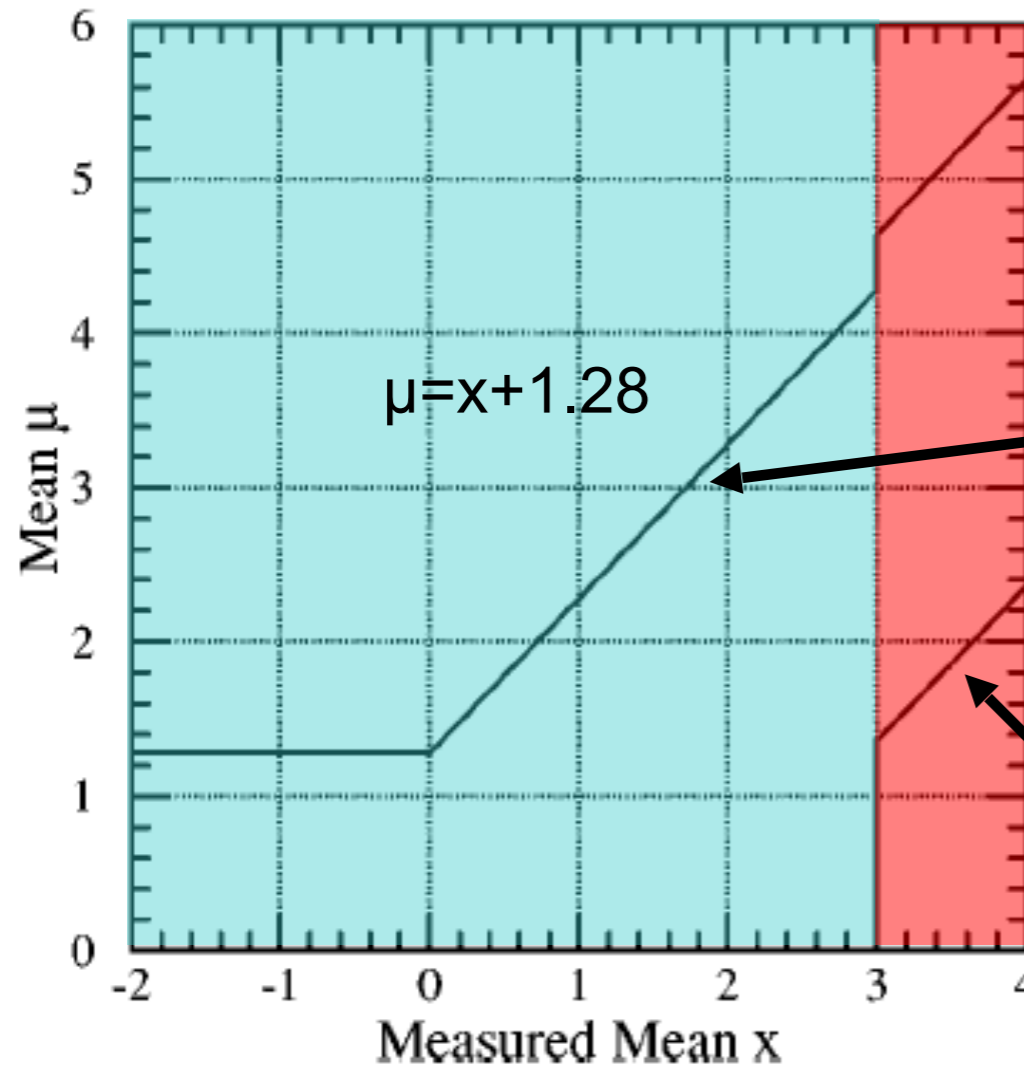
# INCONSISTENZA

Prima opzione:

Parliamo di scoperta (e determiniamo un intervallo di confidenza) se  $x > b+3\sigma$

Parliamo di assenza di segnale (e determiniamo un limite) se  $x < b+3\sigma$

# LIMITE O SCOPERTA ?



Measured Mean  
 $X = \text{Osservazione} - \text{fondo}$

$$\int_{-\infty}^{x_1(\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx = 1 - \alpha = 0.1 \Rightarrow x_1(\mu) = \mu - 1.28$$

$$x_2(\mu) = \infty$$

$\mu=x+1.28$

$$\int_{-\infty}^{x_1(\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx = \frac{1 - \alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow x_1(\mu) = \mu - 1.65$$

$$\int_{-\infty}^{x_2(\mu)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}} dx = \frac{1 + \alpha}{2} = 0.95 \Rightarrow x_2(\mu) = \mu + 1.65$$

$\mu=x+1.65$

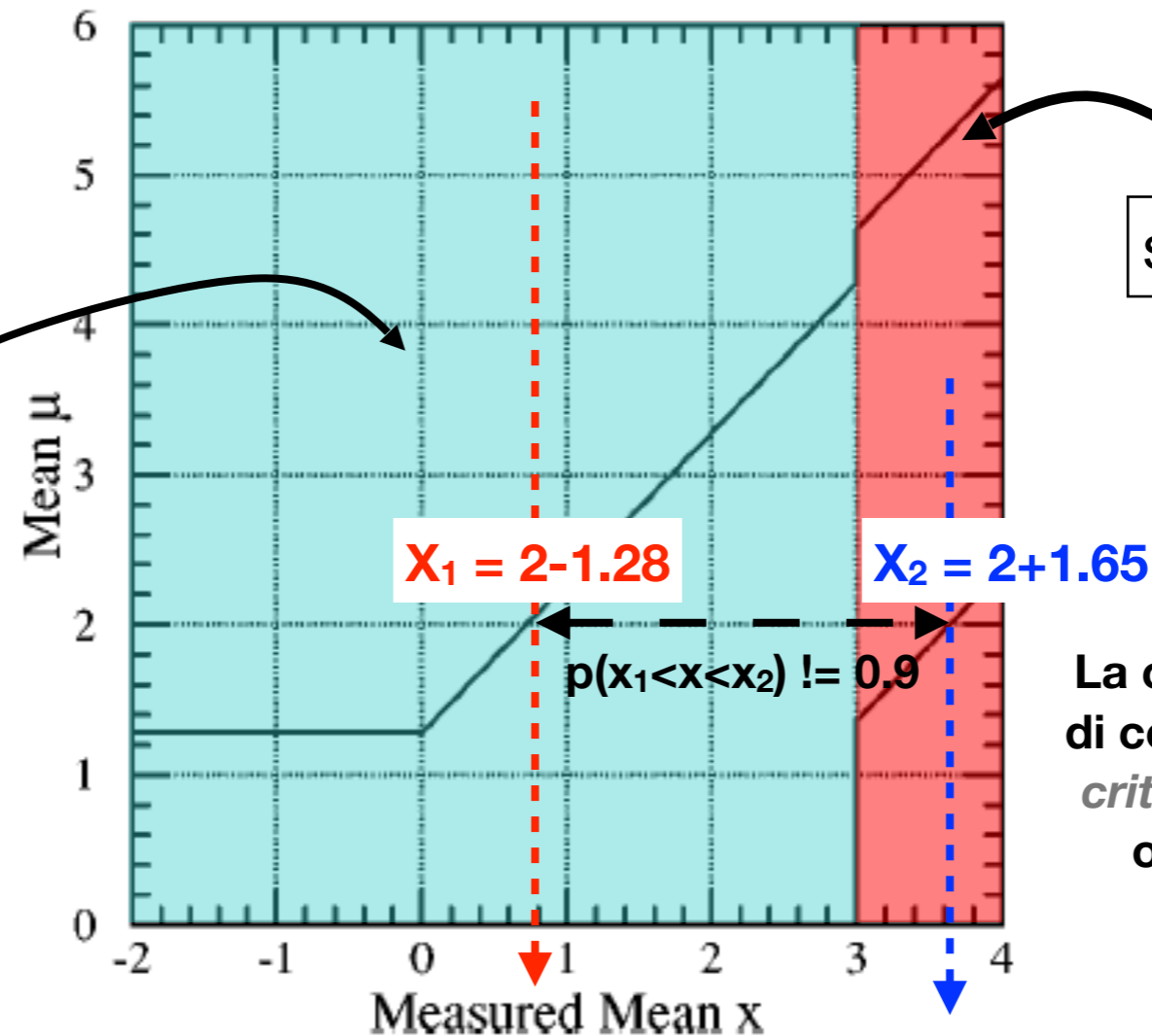
$\mu=x-1.65$

# LIMITE O SCOPERTA ?

Convertiamo l'affermazione precedente in un diagramma alla Neyman che identifichi la banda di confidenza.

Measured Mean  
 $X = \text{Osservazione} - \text{fondo}$

Upper limit



scoperta

La costruzione della banda di confidenza *non rispetta il criterio generale richiesto*, ossia  $p(x_1 < x < x_2) = 0.9$

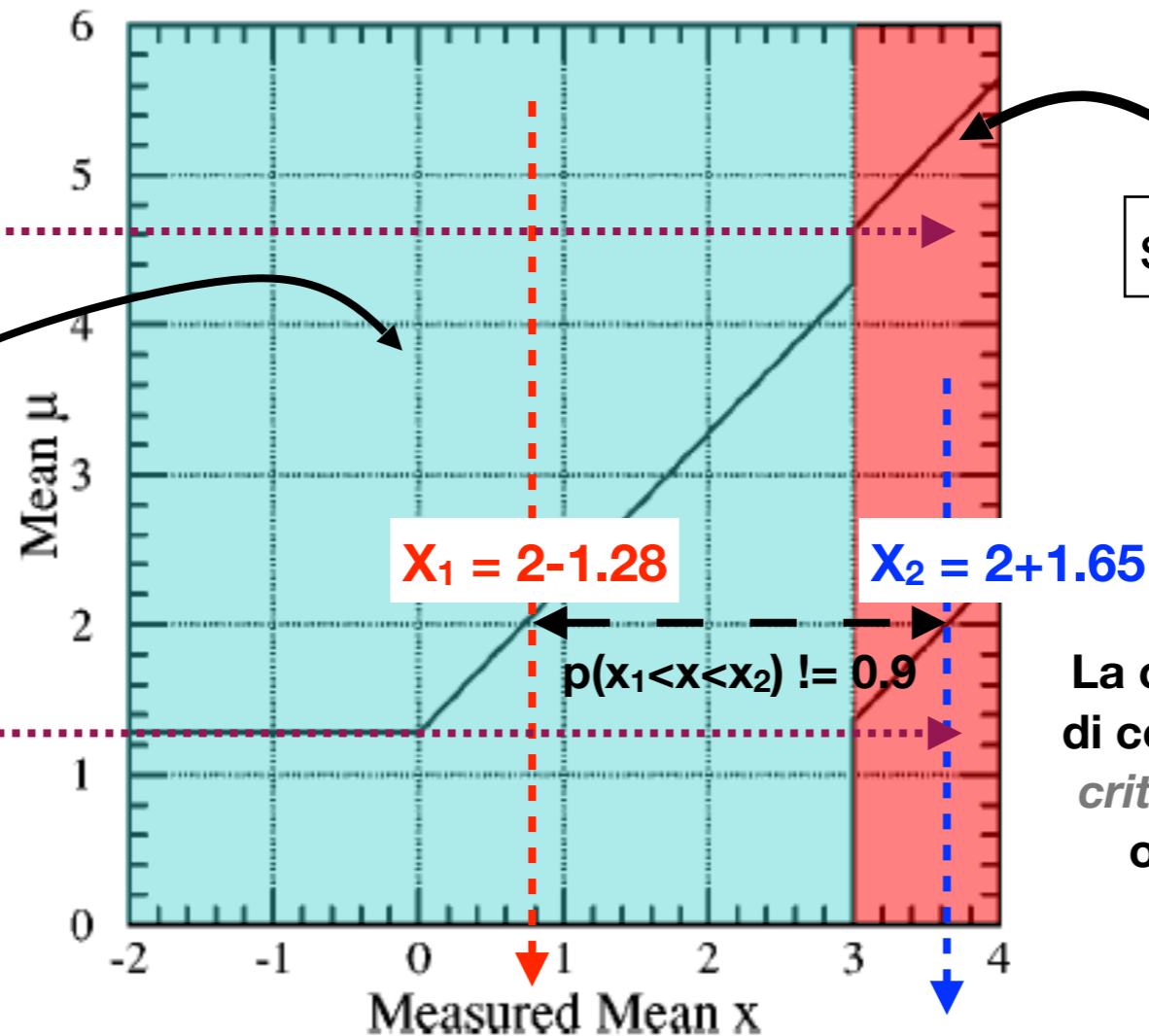
Si vede come gli intervalli di confidenza ottenuti non soddisfano le richieste.  
**Se per esempio il valore vero fosse  $\mu=2$ , l'intervallo identificato  $(2-1.28, 2+1.65)$  non contiene il richiesto 90% di probabilità.**

# LIMITE O SCOPERTA ?

Convertiamo l'affermazione precedente in un diagramma alla **Neyman** che identifichi la banda di confidenza.

Measured Mean  
 $X = \text{Osservazione} - \text{fondo}$

Upper limit



La costruzione della banda di confidenza *non rispetta il criterio generale richiesto*, ossia  $p(x_1 < x < x_2) = 0.9$

***l'intervallo di  $x$  identificato non contiene il 90% di probabilità come e' richiesto***

**NOTA: Questo succede per ogni  $\mu$  compreso tra 1.28 e 4.65**

# LIMITE O SCOPERTA ?

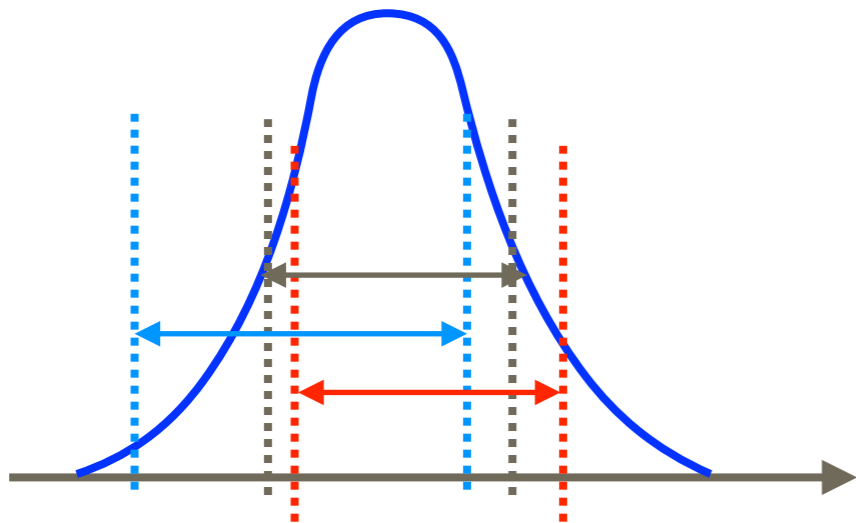
The Neyman confidence interval construction does not specify how you should draw, at fixed  $\mu$ , the interval over the measured value that contains 90% of the probability content.

There are various different prescriptions:

- 1) add all parameter values greater than or less than a given value (upper limit or lower limit)
- 2) draw a central region with equal probability of the measurement falling above the region as below
- 3) starting with the parameter value which has maximum probability, keep adding points from more probable to less probable until the region contains 90% of the probability
- 4) The Feldman-Cousins prescription



# INTERVALLI DI CONFIDENZA ALLA NEYMAN



Per esempio

$$P(x_{1,1} < x < x_{1,2}) = P(x_{2,1} < x < x_{2,2}) = P(x_{3,1} < x < x_{3,2})$$

Quale di questi intervalli scegliamo ?

# INTERVALLI DI CONFIDENZA E LIMITI

Una soluzione più generale secondo la scuola frequentista a questo problema è stata proposta da G.R. Feldman e R.D. Cousins (Phys. Rev. D 57, 3873-3889 (1998)).

La proposta di F & C consiste nell'**utilizzare un rapporto di Likelihood per costruire la banda di confidenza**.

Una volta individuata la banda si potrà agire nella maniera tradizionale.

Dato un valore sperimentale individuare la o le sue intersezioni con la banda:

- se l'intersezione è una sola allora pongo un limite
- se sono due faccio l'annuncio della scoperta.

