



FISICA

CdS Scienze Biologiche

Stefania Spagnolo

Dip. di Matematica e Fisica "Ennio De Giorgi"

<http://www.dmf.unisalento.it/~spagnolo>

stefania.spagnolo@le.infn.it

(please, usate **oggetto/subject: CdS Biologia**)

Diario del programma e delle lezioni svolte

http://www.dmf.unisalento.it/~spagnolo/Fis_ScienzeBiologiche_2017-18.htm



Fluidi

Serway, Jewett, "Principi di Fisica"

*M. Taiuti, M.T. Tuccio "Appunti di Fisica per Biologia" in
<http://www.fisica.unige.it/~biologia/NOfisica.html> (Università di Genova)*

M. De Palma, <http://www.ba.infn.it/~depalma/lezioni/> (INFN Bari)

FLUIDI

- idrostatica e idrodinamica dei fluidi ideali
- fluidi reali, viscosità, tensione superficiale e capillarità
- applicazioni ed esercizi

FLUIDI

TRE STATI DI AGGREGAZIONE per la materia:

* solidi

- dall'esperienza: volume e forma circa costanti nel tempo

* liquidi

- volume costante, forma dipende dal contenitore

* gas

- forma e volume variabili a seconda delle condizioni

La classificazione non è banale e spesso dipende dalle condizioni di temperatura e pressione - *cambiamenti di stato* -

FLUIDI: liquidi e gas

Un fluido è un insieme di molecole che sono sistemate in modo casuale e vengono tenute insieme da deboli forze di coesione e da forze esercitate dalle pareti del contenitore. Sia i liquidi che i gas sono fluidi.

PROPRIETÀ DEI FLUIDI

Una massa M di fluido possiede un volume V .

Inoltre se, a parità di condizioni, consideriamo una massa $2M$ dello stesso fluido, questa occuperà un volume $2V$.

* **Densità (di massa) del fluido** = (per definizione)
 $= \rho = M/V$

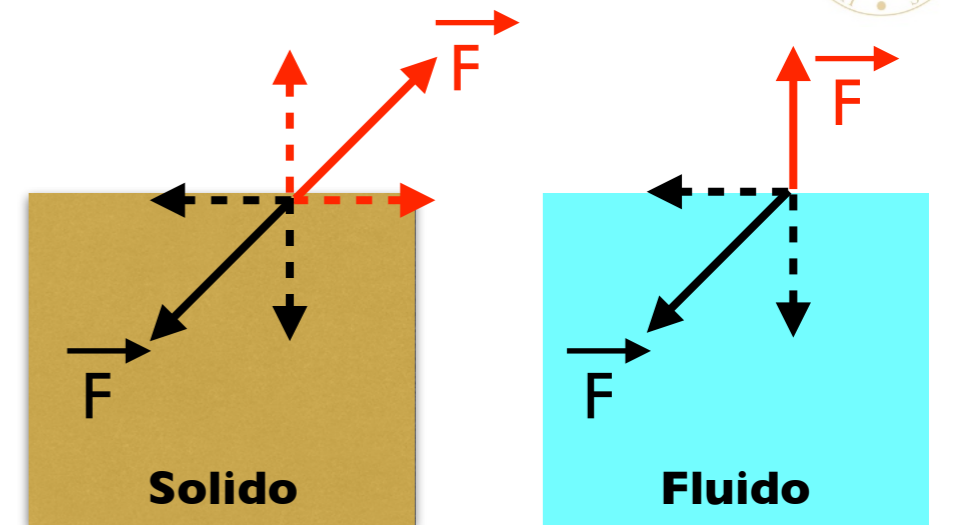
■ unità kg/m^3 oppure g/cm^3 ($1\text{g/cm}^3 = 1000\text{kg/m}^3$);

■ $\rho = \text{costante}$ a parità di condizioni

Quindi, il solo tipo di forza che può esistere in un fluido è quella perpendicolare alla superficie. Per esempio, la forza esercitata da un fluido su un oggetto è sempre perpendicolare alle superfici dell'oggetto, come viene mostrato in Figura 15.1.

La forza che un fluido esercita su una superficie ha origine dall'urto delle molecole del fluido con la superficie. Ciascuna collisione dà luogo a una inversione della componente del vettore velocità della molecola perpendicolare alla superficie. Dal teorema dell'impulso e dalla terza legge di Newton, ciascuna collisione produce una forza sulla superficie. Ogni secondo avviene un enorme numero di queste forze impulsive, che danno luogo a una forza macroscopica costante sulla superficie. Questa forza si distribuisce su tutta l'area della superficie ed è in relazione con una nuova grandezza chiamata *pressione*.

Una forza (*di taglio*) parallela a una qualunque superficie di fluido ideale non trova resistenza da parte del fluido



\vec{F} esercitata sul corpo (solido o fluido)
 \vec{F} con cui il corpo (solido o fluido) si oppone alla forza esterna

In ogni punto sulla superficie dell'oggetto la forza esercitata dal fluido è perpendicolare alla superficie dell'oggetto.

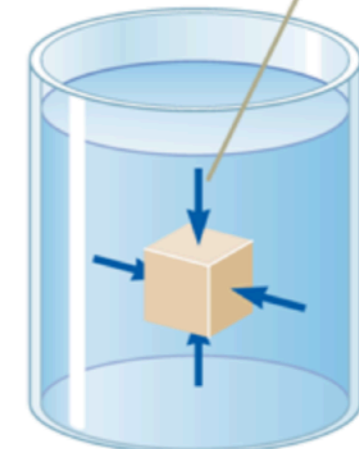


FIGURA 15.1 Le forze esercitate da un fluido sulla superficie di un oggetto sommerso (le forze sui lati anteriore e posteriore non sono mostrate).

PROPRIETÀ DEI FLUIDI

La **pressione** è definita come il rapporto $p = F_{\perp}/S$ tra la componente della forza ortogonale alla superficie e la superficie su cui la forza è applicata. La pressione è quindi una grandezza scalare che ci dice quale può essere la forza esercitata dal fluido su una superficie (anche immaginaria in mezzo al fluido!)

Può variare da punto a punto. Nel sistema **SI** si misura in **Pascal** ($1\text{Pa} = 1\text{N}/\text{m}^2$). Altre unità di misura utilizzate nella pratica sono l'**atmosfera** (atm), il **bar** con il sottomultiplo **millibar** (mbar) ed il **torr**. Sono legate tra loro dalla seguente relazione: $1\text{atm} = 760\text{torr} = 1013\text{mbar} = 1.013 \cdot 10^5\text{Pa}$. Si noti che $1\text{mbar} = 1\text{hPa}$.

Principio di Pascal: se in un punto di un fluido la pressione p cambia di una quantità Δp , questa variazione si trasmette in ogni altro punto del fluido:

* $p_1 \rightarrow p_1 + \Delta p \Rightarrow p_2 \rightarrow p_2 + \Delta p$

Legge di Stevino: la pressione in un fluido dipende dalla profondità a cui viene misurata:

* $p_1 - p_2 = d_{12} \rho g = \rho g (y_2 - y_1) \Rightarrow p + \rho g y = \text{costante}$
 y misurato lungo un asse che punta verso l'alto

Principio di Archimede: un corpo (di volume V) immerso in un fluido (di densità ρ) è soggetto a una forza verso l'alto

* $F = \rho V_{\text{imm}} g$
 V_{imm} è il volume immerso nel fluido

In ogni punto sulla superficie dell'oggetto la forza esercitata dal fluido è perpendicolare alla superficie dell'oggetto.

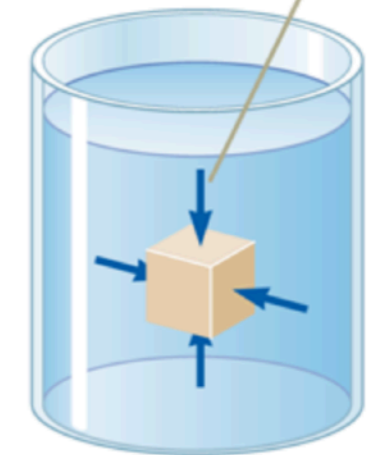
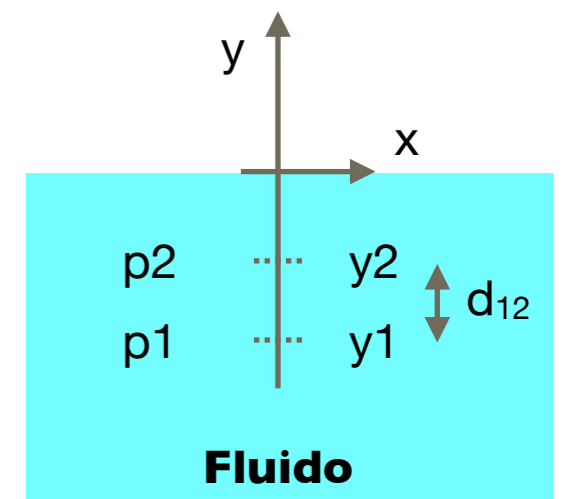


FIGURA 15.1 Le forze esercitate da un fluido sulla superficie di un oggetto sommerso (le forze sui lati anteriore e posteriore non sono mostrate).



LEGGE DI STEVINO

Vediamo come discende dalle leggi della meccanica già noti

Il blocchetto grigio *di fluido* è in equilibrio (in quiete)

* la risultante delle forze che agiscono su di esso deve essere nulla; considerando le forze lungo y

- forza peso del blocchetto stesso: $-mg \hat{y} = -\rho AL g \hat{y}$
- Forza normale alla superficie sup.: $-P_0 A \hat{y}$
- Forza normale sulla sup. inf.: $P_1 A \hat{y}$

● dalla condizione di equilibrio abbiamo

$$\checkmark \quad P_1 - P_0 = \rho g L$$

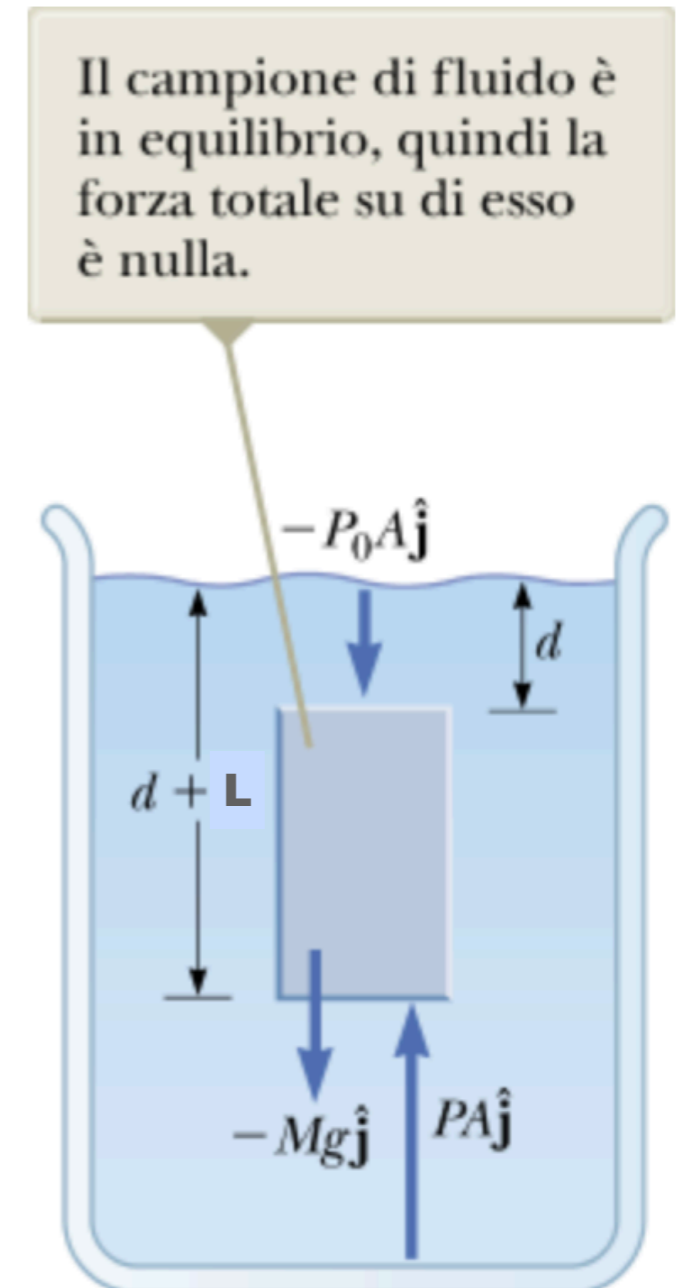


FIGURA 15.4 Nella figura è indicato un campione di fluido all'interno di un volume di fluido più ampio.

PRINCIPIO DI ARCHIMEDE

Vediamo come discende dalle leggi della meccanica già note

Il blocchetto grigio di fluido è in equilibrio (in quiete)

* la risultante delle forze che agiscono su di esso deve essere nulla; considerando le forze lungo y

■ forza peso del blocchetto stesso: $-mg \hat{y} = -\rho AL g \hat{y}$

■ forza di galleggiamento = **risultante delle forze dovute agli urti delle molecole di liquido sulla superficie superiore e sulla superficie inferiore**

● $\vec{B} = -P_0 A \hat{y} + P_1 A \hat{y} = (\text{equilibrio}) = \rho AL g \hat{y}$

■ B non dipende da “cosa” occupa il volumetto

● Se sostituiamo il blocchetto di fluido con un uguale volume di ferro o di aria, la forza di galleggiamento sarà invariata

$$F_{\text{galleggiamento}} = \rho_{\text{fluido}} V_{\text{imm}} g$$

La forza di galleggiamento sul cubo è il risultato delle forze esercitate dall'acqua sulla parte superiore ed inferiore del cubo.

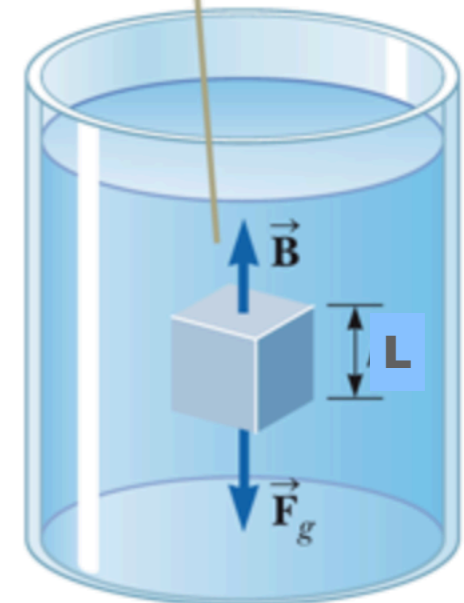
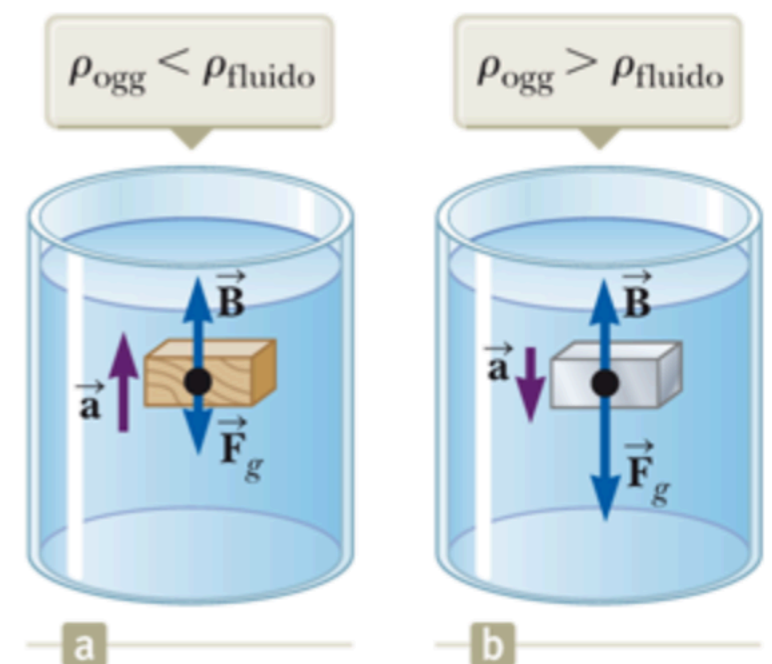


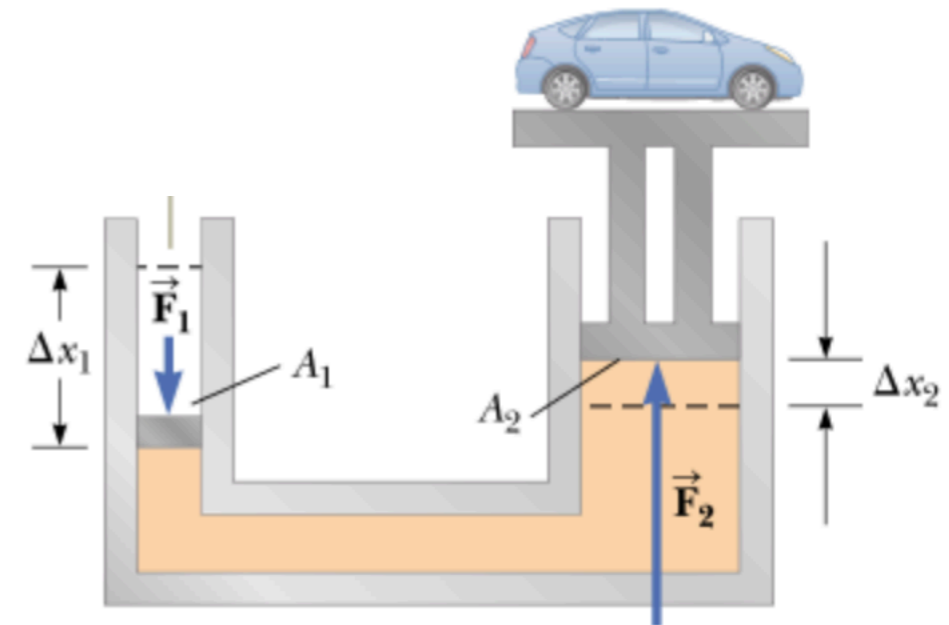
FIGURA 15.9 Le forze esterne che agiscono sul cubo immerso sono le forze gravitazionali F_g e quella di galleggiamento B .



ESEMPI

Pressa idraulica:

- * esercitando una forza F_1 su una superficie A_1 di fluido si varia la pressione del fluido (in ogni punto) di una quantità pari a $P_1 = F_1/A_1$
- di conseguenza nel punto 2, la superficie $A_2 > A_1$ esercita una forza verso l'esterno $F_2 > F_1$



$$F_1 = \left(\frac{A_1}{A_2} \right) F_2$$

$$V_1 = V_2 \rightarrow A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

Il volume di fluido spostato nei due pistoni è uguale

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{F_1 \Delta x_1}{F_2 \Delta x_2} = \left(\frac{F_1}{F_2} \right) \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} \right) = \left(\frac{A_1}{A_2} \right) \left(\frac{A_2}{A_1} \right) = 1$$

Il lavoro compiuto dalla forza 1 (dall'esterno all'interno del sistema) è uguale a quello compiuto dalla forza 2 (cons. energia)

ESEMPI

Barometro di Torricelli

è costituito da un tubo di vetro di altezza superiore ad 1 metro, riempito di mercurio e posto in verticale in una vasca colma di mercurio e con l'estremità superiore sigillata in modo che non ci sia contatto diretto tra il mercurio contenuto nel tubo e l'atmosfera. Per conoscere l'altezza cui si dispone il livello del mercurio nel tubo, è necessario applicare la legge di Stevino fra i due punti ① e ② dove la pressione del liquido è nota. Il punto ① è la superficie dove il mercurio è in contatto con i vapori di mercurio (altro fluido) dove la pressione è pari alla tensione di

vapore e pertanto talmente piccola da poter essere trascurata ($p_1 = 0\text{Pa}$) mentre il punto ② è quello in contatto con l'aria

(altro fluido) e pertanto la pressione è pari a quella atmosferica ($p_2 = p_0$). Pertanto:

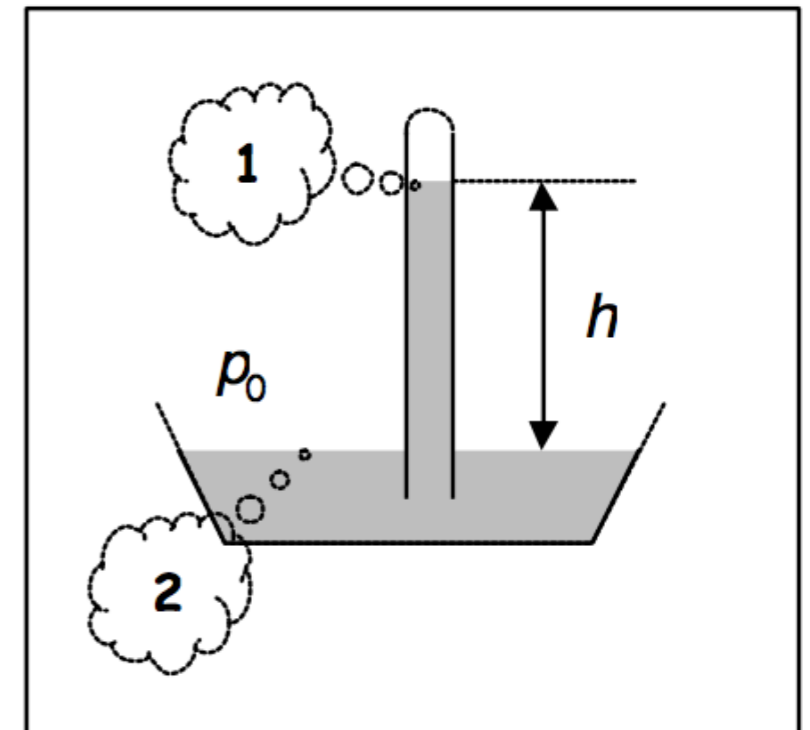
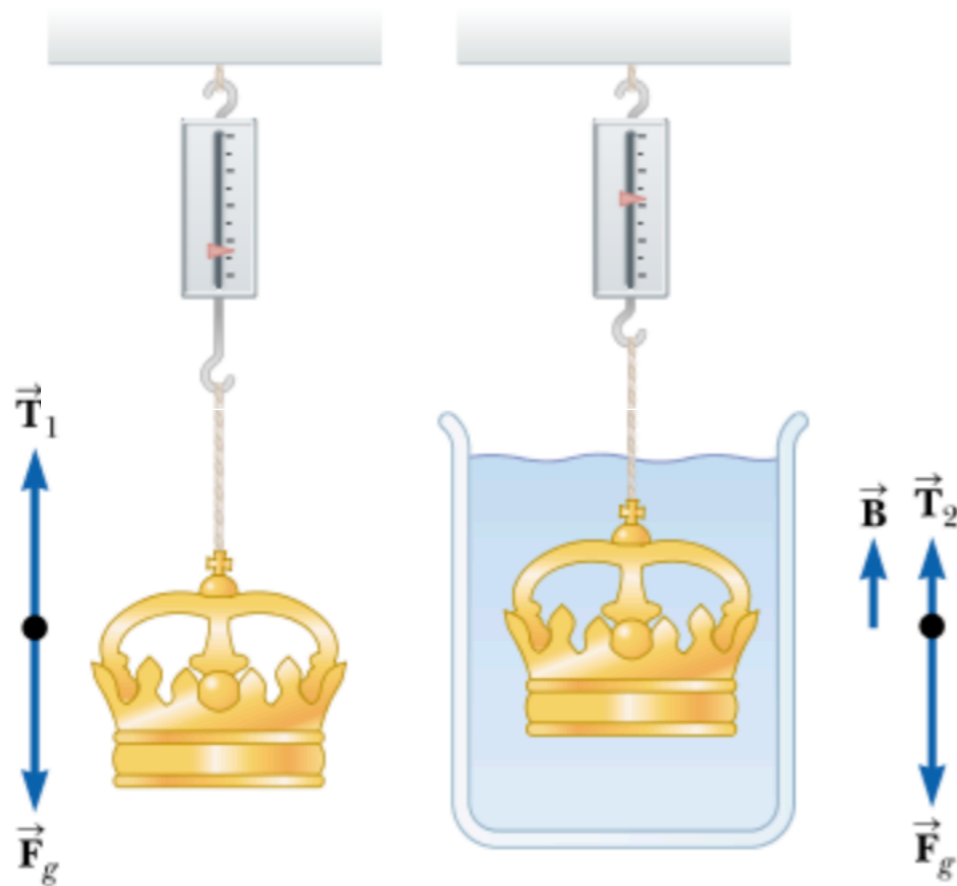


Fig. 21. Problema 4.

$$p_2 = p_1 + \rho_{Hg} g(h_1 - h_2) \text{ da cui } h = \frac{p_2 - p_1}{\rho_{Hg} g} = \frac{1.013 \cdot 10^5 \text{Pa} - 0\text{Pa}}{1.36 \cdot 10^4 \text{kg/m}^3 \times 9.8 \text{m/s}^2} = 0.760\text{m}$$

ESEMPI



Misure di densità di corpi dalla forma complessa

- 1) misura la massa con una bilancia in aria m_1
- 2) misura la massa del corpo immerso $\rightarrow m_2$

chiamo B la forza di galleggiamento
e T la tensione della bilancia (corrispondente alle
lettura $\Rightarrow T = m_{\text{lettura}} g$);

- a) $m_1 g - T_1 = 0$
- b) $m_1 g - T_2 - B = 0$ cioè $T_1 - T_2 = B$
- c) ma per Archimede $B = \rho(\text{H}_2\text{O}) V_{\text{corona}} g$
da c) e b) determino $V_{\text{corona}} = (T_1 - T_2) / \rho(\text{H}_2\text{O})g$
 $\rho(\text{corona}) = T_1 / g V_{\text{corona}} = T_1 \rho(\text{H}_2\text{O}) / (T_1 - T_2)$

ESEMPI

Forza sulla diga esercitata dall'acqua

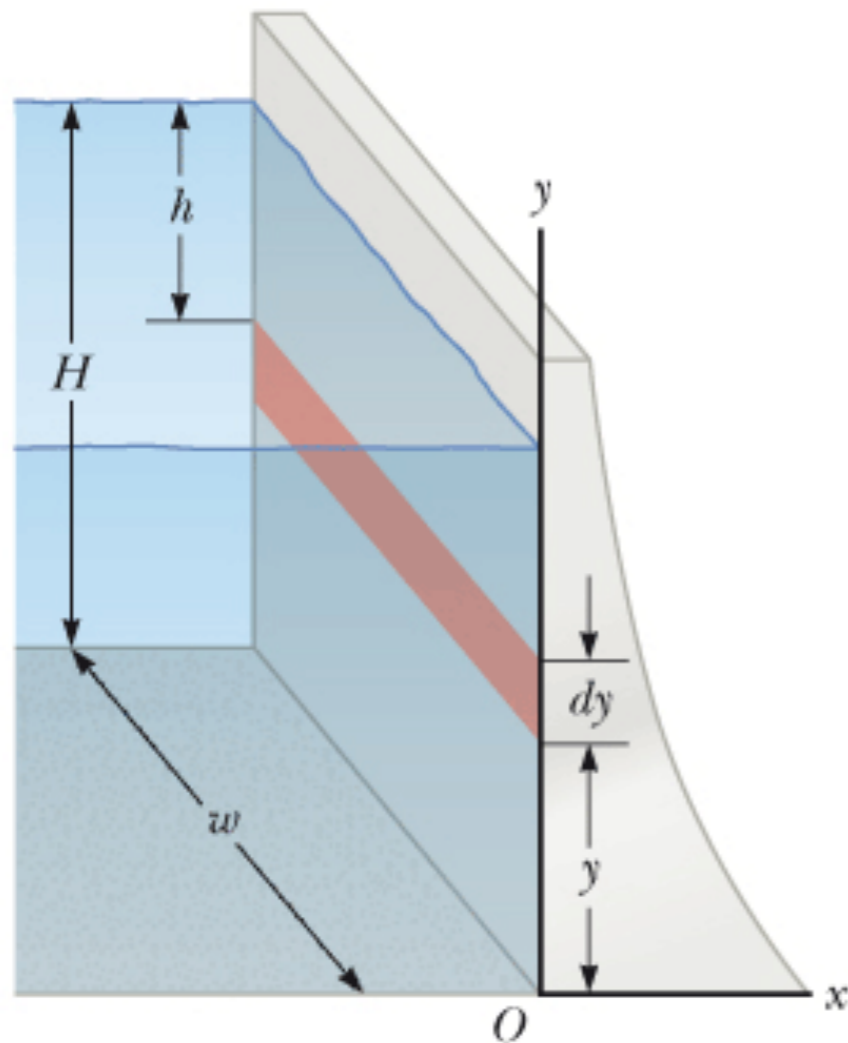


Figura 15.6 (Esempio 15.2)
 L'acqua esercita una forza su una diga.

1) P varia con h ,

su una fascia di larghezza w (larghezza della diga) e di altezza infinitesima dy alla profondità y la pressione è

$P = P_0 + \rho g y$ ($w dy$) con P_0 pressione atmosferica, P_0 è esercitata sia a dex che a sin. della diga quindi è bilanciata e può essere trascurata in questo calcolo.

$$F = \int \rho g w y dy \text{ tra } 0 \text{ e } h$$

$$= \rho g w h^2/2$$



Siccome la pressione varia linearmente con la profondità, **la pressione media è la pressione alla profondità media** e **pressione media per profondità totale è uguale all'integrale della pressione su tutta la profondità**

$(\rho g h/2) h w = F$

stesso risultato

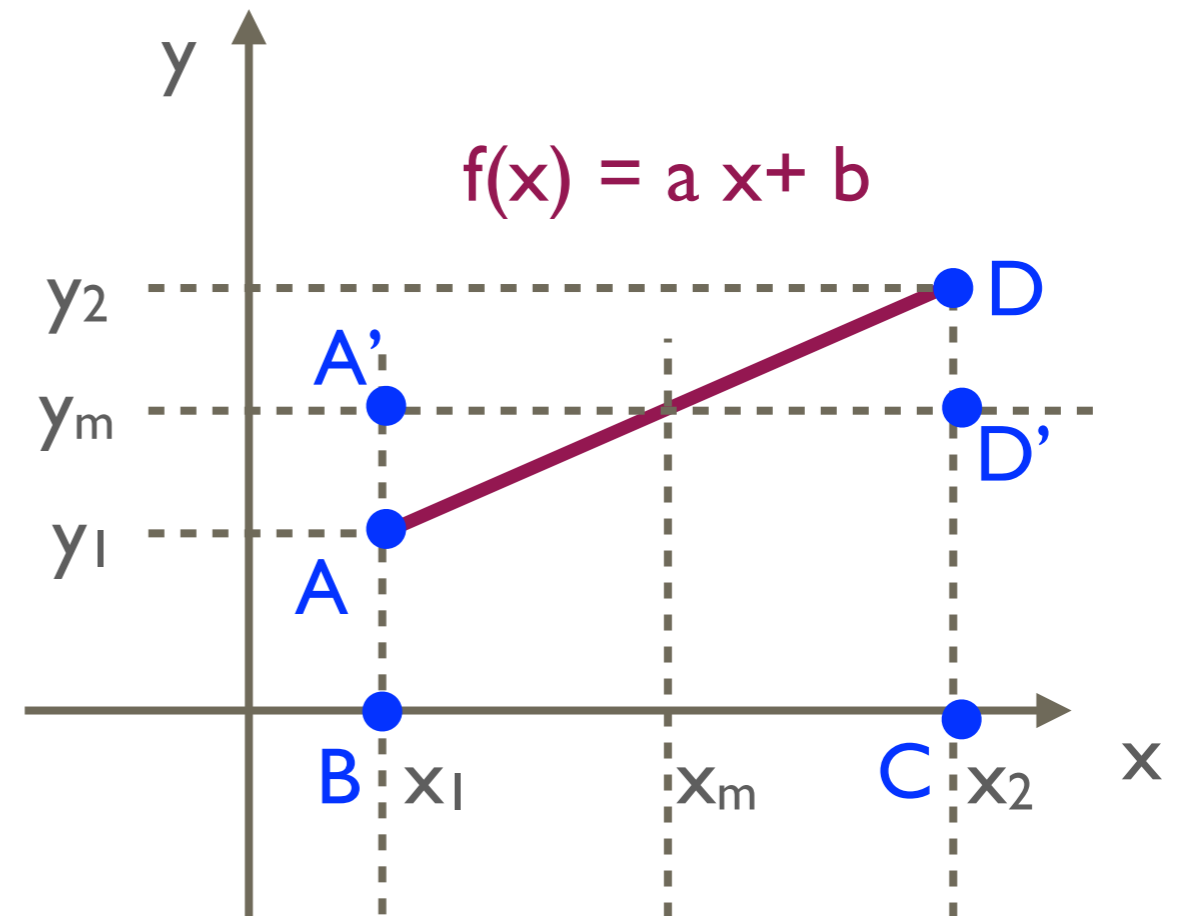
INTEGRALI DI FUNZIONI LINEARI SENZA CALCOLO INTEGRALE

$$y_m = (y_2 + y_1) / 2$$

$$x_m = (x_2 + x_1) / 2$$

$$y_m = f(x_m)$$

il valore medio di una funzione lineare su un'intervallo è uguale al valore della funzione in corrispondenza del punto medio dell'intervallo



$\int f(x) dx = \text{area del parallelogramma } ABCD$

il rettangolo $A'B'CD'$ ha area uguale all'area di $ABCD$

l'integrale di una funzione lineare in un intervallo è uguale al prodotto del valore medio della funzione per l'ampiezza dell'intervallo

ESERCIZI

Esercizi

2. Calcolare la differenza di pressione tra p_A nel volume in figura 20 e quella atmosferica sapendo che l'altezza della colonna di acqua è $h = 10\text{cm}$ e che l'estremità superiore del tubo è aperta.

Soluzione: non appena conosciamo il valore della pressione in un punto ① della colonna d'acqua, potremo applicare la legge di Stevino. Questo punto è la superficie dove l'acqua è in contatto con l'atmosfera per cui $p_1 = p_0$. Quindi

$$p_A + \rho g h_2 = p_0 + \rho g h_1$$

$$p_A - p_0 = \rho g h = 10^3 \text{kg/m}^3 \times 9.8 \text{m/s}^2 \times 0.1 \text{m} = 908 \text{Pa}$$

La differenza $p_A - p_0$ è detta anche pressione relativa (del volume A rispetto all'atmosfera) e diversamente dalla pressione assoluta può assumere anche valori negativi.

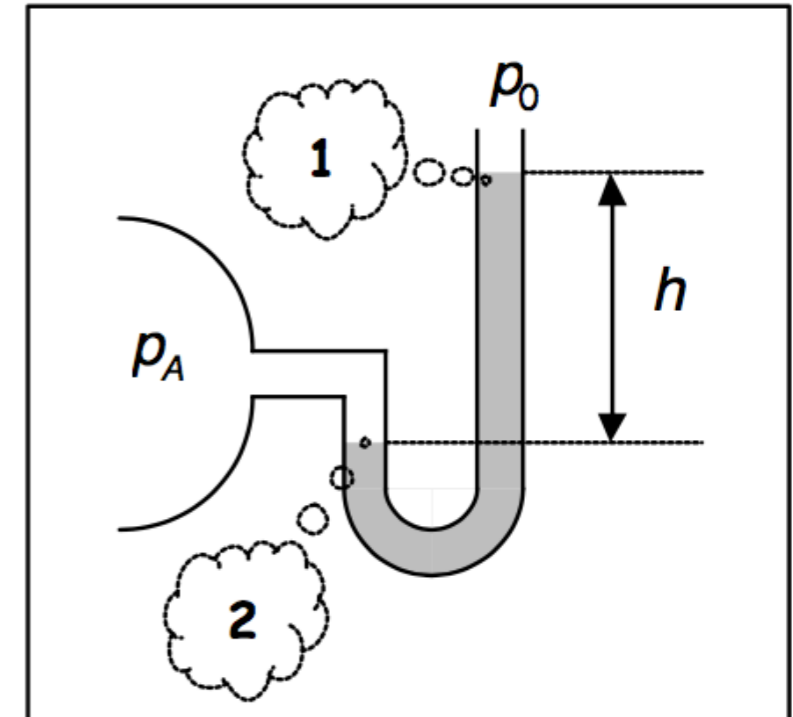


Fig. 20. Problema 2.

ESERCIZI

Esercizi

6. Spiegare il significato del prodotto pV per un fluido incompressibile (densità costante).

Soluzione: dimostriamo che pV rappresenta il lavoro necessario per svuotare il volume V . Consideriamo per semplicità un fluido a pressione p posto all'interno di un volume V di forma cubica. Immaginiamo inoltre che allo scorrere della superficie S il fluido possa fuoriuscire attraverso la superficie opposta mantenendo costante la pressione idrostatica p . Per svuotare il volume V dal fluido è necessario, quindi, esercitare sulla superficie S una forza \vec{F} tale da annullare l'effetto pS della pressione ($F = pS$) e fare in modo che la parete S possa scorrere per il tratto l fino a raggiungere la parete opposta. Il lavoro compiuto dalla forza \vec{F} è quindi pari a $L = Fl = pSl = pV$.

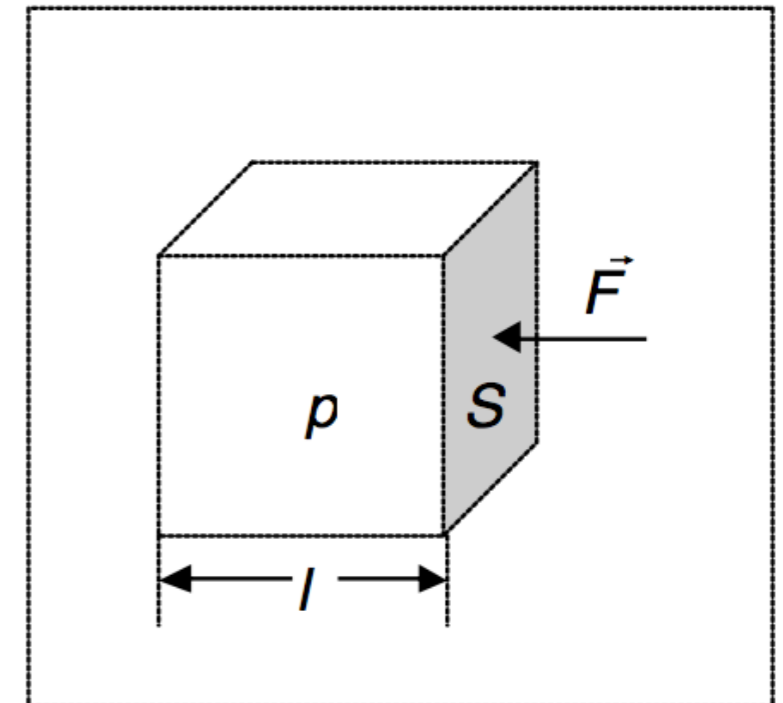


Fig. 22. Problema 6.

ESERCIZI

Esercizi

9. Sapendo che un blocco di ghiaccio immerso in acqua galleggia e che la frazione del volume che rimane immersa è $\frac{11}{12}$, calcolare la densità del ghiaccio ρ_{gh} .

Soluzione: posto V il volume del blocco di ghiaccio, l'equilibrio delle forze a cui è soggetto si può scrivere come la somma vettoriale della forza peso e della spinta di Archimede generata dalla parte di ghiaccio immersa nell'acqua $\vec{P} + \vec{F}_A = 0$ da cui

$$\rho V_{im} g - \rho_{gh} V g = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{gh} = \rho \frac{V_{im}}{V} = 1 \text{g/cm}^3 \times \frac{11}{12} = 0.92 \text{g/cm}^3$$

7. In una persona in posizione eretta, fissata l'altezza del cuore (e dell'aorta) come l'origine delle coordinate, si assuma che i piedi si trovino a circa $h_p = 135 \text{cm}$ sotto il cuore e la parte più alta della testa si trovi a circa $h_f = 45 \text{cm}$ sopra. Assumendo che la pressione relativa al livello dell'aorta sia 100 Torr e che la densità del sangue sia $\rho = 1.05 \text{g/cm}^3$ calcolare la pressione relativa al livello dei piedi e quella a livello della testa.

Soluzione: applicando la legge di Stevino con $p = p_{aorta} + \rho g(h_{aorta} - h)$ si verifichi che

$$p_{piedi} = p_{aorta} + \rho g h_p = 203 \text{Torr} \quad \text{e} \quad p_{testa} = p_{aorta} - \rho g h_f = -65 \text{Torr}.$$

ESERCIZI

Esercizi

11. Una sfera di metallo di massa $m=1\text{kg}$ e densità $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{kg/m}^3$ è completamente immersa in acqua, ancorata al fondo di un recipiente mediante una molla di costante elastica $k = 250 \text{N/m}$. Calcolare la spinta di Archimede, valutare se la molla è compressa o allungata e determinare lo spostamento dalla posizione di equilibrio.

Soluzione: noto il volume, ottenuto come $V = \frac{m}{\rho} = \frac{1\text{kg}}{7.8 \cdot 10^3 \text{kg/m}^3} = 1.28 \cdot 10^{-4} \text{m}^3$, si può ricavare la spinta di Archimede $F_A = \rho_{\text{fluido}} Vg = 1.25 \text{N}$. Perché la sfera sia ferma occorre che la risultante delle forze sia nulla: $\vec{F}_A + \vec{P} + \vec{F}_{\text{molla}} = 0$. Scelta come positiva la direzione rivolta verso l'alto dell'asse verticale, l'espressione precedente diventa $F_A - mg + kx = 0$ da cui si ricava $x = -3.4 \text{cm}$, Quindi la molla è compressa ed il modulo $|x| = 3.4 \text{cm}$ rappresenta lo scostamento dalla posizione di equilibrio.

DINAMICA DEI FLUIDI IDEALI

Definizione di fluidi ideali:

- * assenza di attrito viscoso
 - gli strati di fluido scorrono l'uno sull'altro senza attrito (no dissipazione di energia)
- * fluido incomprimibile
 - densità costante
- * flusso laminare o stazionario
 - i cammini seguiti dalle particelle di fluido non si intersecano; le velocità in ogni punto sono costanti nel tempo
- * flusso irrotazionale
 - una piccola ruota a pale collocata nel fluido (in qualsiasi punto) non ruota attorno al suo asse

Un fluido ideale in movimento può essere immaginato costituito da tante lamine sottili in grado di scorrere l'una sull'altra senza attrito.

Il movimento del fluido è sempre parallelo alla superficie delle lamine.

Esempi:

- in un fiume il movimento dell'acqua, supposta un fluido ideale, può essere scomposto nello scorrimento di tante lamine orizzontali sovrapposte che si muovono parallele al letto del fiume;
- in un condotto di sezione cilindrica il movimento può essere scomposto in tante lamine circolari concentriche con raggio crescente a partire dall'asse centrale del condotto che si muovono parallele all'asse del condotto.

DINAMICA DEI FLUIDI IDEALI

In ogni punto lungo il cammino la velocità della particella è tangente alla linea di flusso.

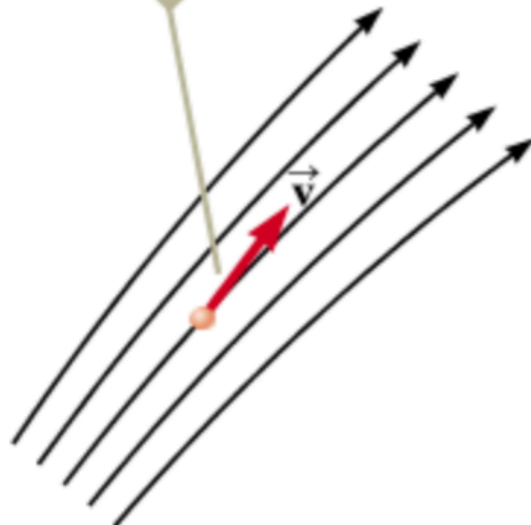
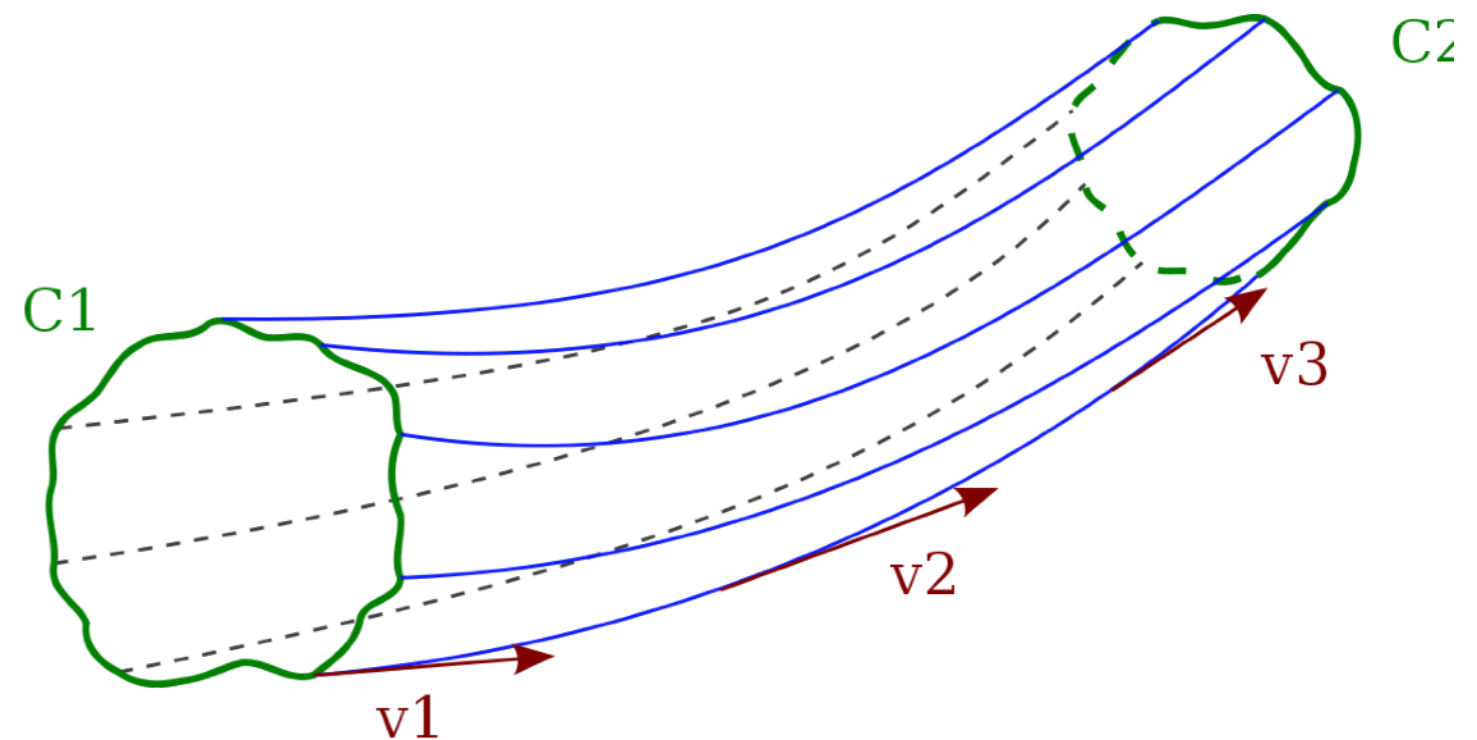


FIGURA 15.16 Una particella in flusso laminare segue le linee di flusso.

Linea di flusso

o *linea di corrente* = curva che in ogni punto è tangente al vettore velocità in quel punto

superficie formata da una serie di linee di flusso



Tubo di flusso

DINAMICA DEI FLUIDI IDEALI

Due equazioni valide per i Fluidi Ideali

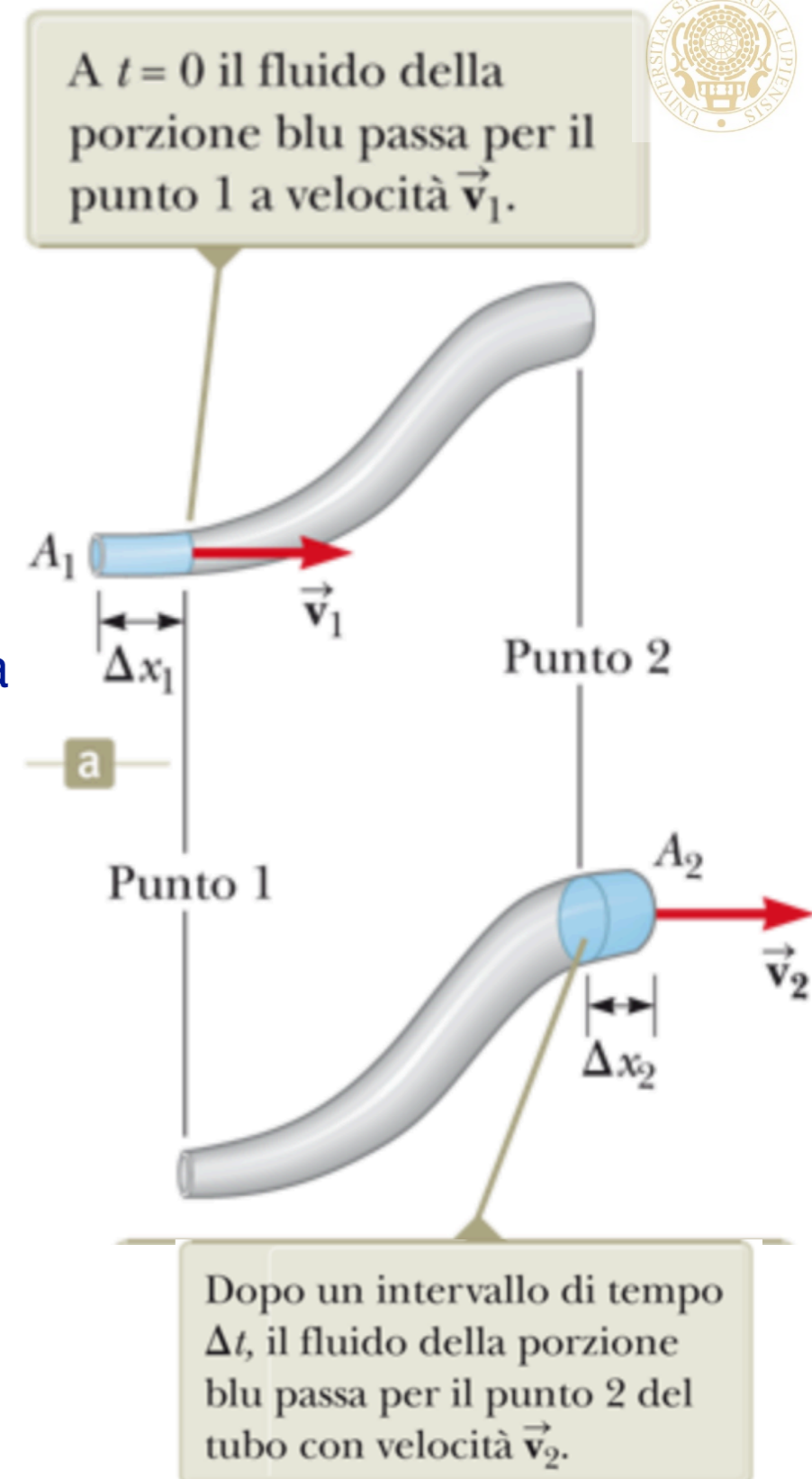
* **L'equazione di continuità** stabilisce che la quantità di fluido che attraversa nell'unità di tempo una qualunque sezione S del condotto (portata), è costante

- **portata volumetrica:** $Q = Sv = \text{costante}$; Q nel sistema SI si misura in m^3/s
- **portata massica:** $Q_m = \rho Sv = \text{costante}$; Q_m nel sistema SI si misura in kg/s
 - ρ è la densità del fluido

* **L'equazione di Bernoulli:**

$$p + (1/2) \rho v^2 + \rho g y = \text{costante}$$

- **pressione (p), quota (y) misurata lungo un asse che punta verso l'alto e velocità del fluido sono correlati**
 - discende dalla conservazione dell'energia



DINAMICA DEI FLUIDI IDEALI

Attenzione

* *L'equazione di continuità* stabilisce che la quantità di fluido che attraversa nell'unità di tempo una qualunque sezione S del condotto (portata), è costante

■ **portata volumetrica:** $Q = Sv = \text{costante}$; Q nel sistema SI si misura in m^3/s

■ **portata massica:** $Q_m = \rho Sv = \text{costante}$; Q_m nel sistema SI si misura in kg/s

● ρ è la densità del fluido

volume o massa (equivalente ρ costante)

non definizioni ma espressioni che consentono il calcolo in casi semplici: **v costante sulla sezione**

Definizione di portata

la **quantità** di fluido che attraversa nell'unità di tempo una qualunque sezione S del condotto

DINAMICA DEI FLUIDI IDEALI

* L'equazione di Bernoulli:

$$p + (1/2) \rho v^2 + \rho g y = \text{costante}$$

* consideriamo una quantità di fluido ideale che occupa un tratto di un tubo di flusso e nel tempo Δt si sposta lungo il tubo di flusso (dalla configurazione 1, si passa alla 2)

■ le forze esterne che compiono lavoro sul sistema sono

● $P_1 A_1 \hat{x}$ e $-P_2 A_2 \hat{x}$

● Il lavoro compiuto è $W = P_1 A_1 v_1 \Delta t - P_2 A_2 v_2 \Delta t$

■ La variazione di K è

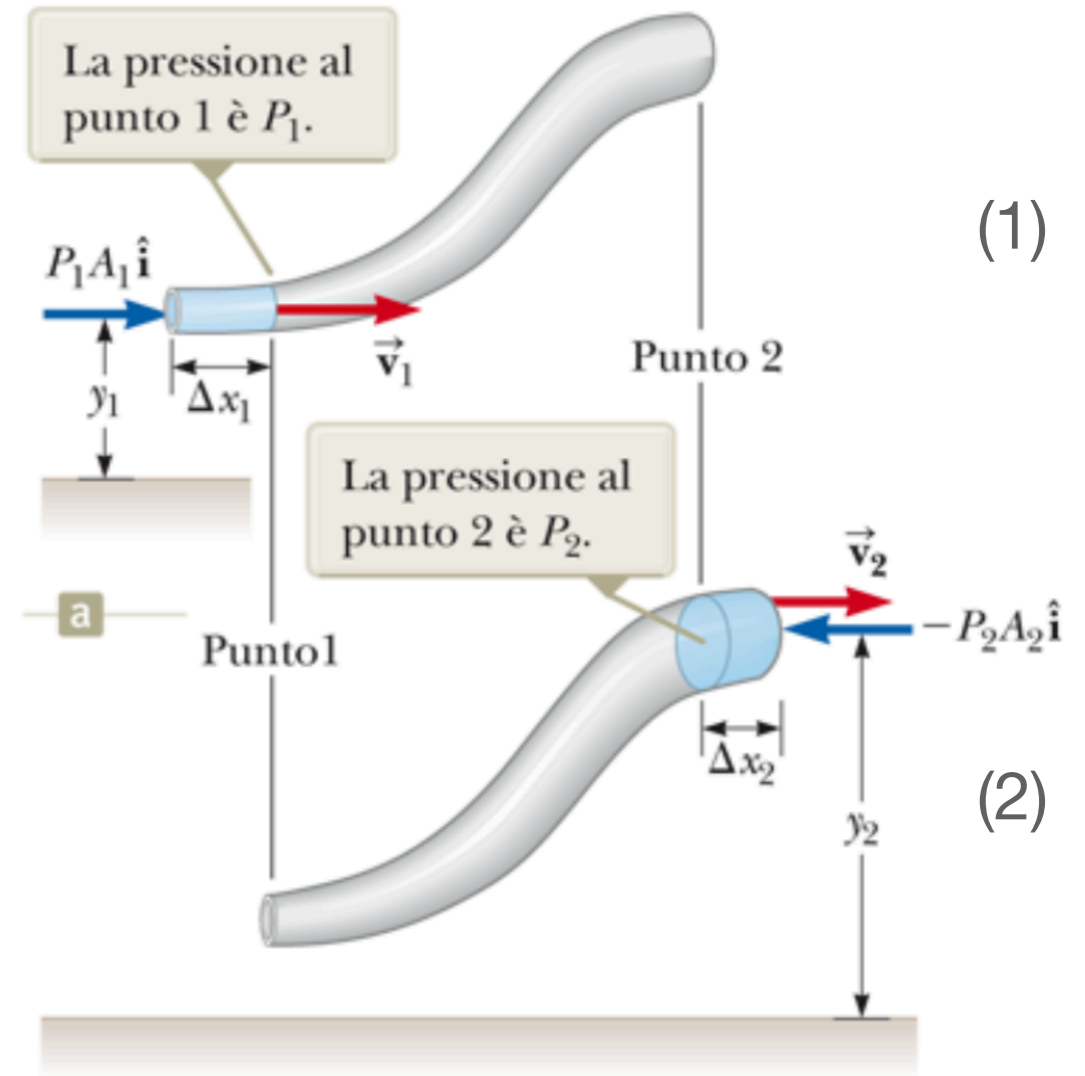
● $(1/2) \rho [- A_1 v_1 \Delta t v_1^2 + A_2 v_2 \Delta t v_2^2]$

■ La variazione di energia potenziale

● $\rho g [A_2 v_2 \Delta t y_2 - A_1 v_1 \Delta t y_1]$

* $W_{\text{esterne}} = \Delta E = \Delta K + \Delta U$

usando eq. continuità
 $AV = \text{cost}$



$$p_1 - p_2 = (1/2) \rho v_2^2 - (1/2) \rho v_1^2 + \rho g y_2 - \rho g y_1$$

$$p_1 + (1/2) \rho v_1^2 + \rho g y_1 = \text{costante}$$

↓ se $v = 0$

$$p_1 + \rho g y_1 = \text{costante} \quad \text{Stevino}$$

DINAMICA DEI FLUIDI IDEALI

Esercizi

1. Calcolare la velocità v con cui l'acqua inizia ad uscire dal foro di scarico di una vasca da bagno dove il livello iniziale dell'acqua è $h = 30\text{cm}$.

Soluzione: dobbiamo applicare l'equazione di Bernoulli sul punto ① dello scarico ed in un altro punto ② della vasca dove conosciamo il valore per p , v e h . Il punto ② in questione è il livello superiore dell'acqua dove $p_2 = p_0$, $h_2 = h$ e $v_2 = 0$ perché non appena l'acqua inizia a defluire dal fondo, quella posta sulla superficie è ancora praticamente ferma. Al punto ① vale invece $h_1 = 0$, $v_1 = v$ e $p_1 = p_0$ perché la superficie del fronte d'acqua che sta uscendo dallo scarico si trova in diretto contatto con l'atmosfera. Quindi:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$p_0 + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 + \rho g h \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \text{m/s}^2 \times 30 \cdot 10^{-2} \text{m}} = 2.425 \text{m/s}$$

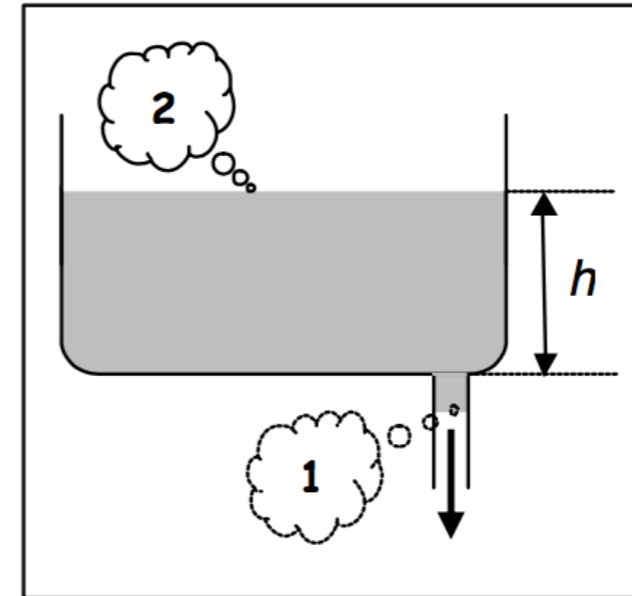


Fig. 23. Problema 1.

Osserva due palloncini di elio galleggiare l'uno accanto all'altro alle estremità di due cordicelle a cui sono legati. Le superfici dei due palloncini sono separate da 1-2 cm. Soffia attraverso il piccolo spazio tra i palloncini. Che cosa succede ai palloncini? **(a)** Si muovono l'uno verso l'altro. **(b)** Si muovono allontanandosi l'uno dall'altro. **(c)** Non si influenzano tra di loro.

DINAMICA DEI FLUIDI IDEALI

Esercizi

5. Spiegare qualitativamente cosa succede quando in un'arteria è presente un aneurisma.

Soluzione: in presenza di un aneurisma la sezione dell'arteria S_2 è maggiore di quella naturale S_1 e dovendosi conservare la portata dell'arteria, la velocità v_2 sarà minore di quella naturale v_1 ($v_2 = \frac{S_1}{S_2}v_1$). Supponiamo per semplicità che l'arteria sia orizzontale. In queste condizioni la pressione sanguigna p_2 all'altezza dell'aneurisma sarà maggiore di quella naturale p_1 in accordo all'equazione di Bernoulli $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$. Pertanto, nel punto dove c'è l'aneurisma, può rompersi la parete dell'arteria.

3. In un adulto normale a riposo, la velocità media del sangue attraverso l'aorta è $v_0 = 33\text{ cm/s}$. Calcolare la portata attraverso un'aorta di $r = 9\text{ mm}$.

Soluzione: $Q = S_0 v_0 = \pi R^2 v_0 = 3.14 \times (0.9\text{ cm})^2 \times 33\text{ cm/s} = 84\text{ cm}^3/\text{s} \approx 5\text{ litri/min}$

Dall'aorta il sangue fluisce nelle arterie maggiori, poi in quelle più piccole e infine nei capillari. Ad ogni stadio successivo ciascuno di questi vasi si divide in molti vasi più piccoli e il flusso di sangue si ripartisce fra questi in modo che la portata totale sia costante. Se conosciamo la sezione complessiva di tutte le arterie S_{arterie} e di tutti i capillari $S_{\text{capillari}}$ dovrà valere la relazione: $Q = S_0 v_0 = S_{\text{arterie}} v_{\text{arterie}} = S_{\text{capillari}} v_{\text{capillari}}$. Pertanto il sangue si muove più lentamente verso la periferia perché la sezione complessiva dei vasi sanguigni è maggiore. Se per esempio la sezione totale di tutte le arterie è 20 cm^2 e di tutti i capillari è 0.25 m^2 possiamo ricavare la velocità del sangue $v_{\text{arterie}} = Q / S_{\text{arterie}} = 4.2\text{ cm/s}$ e $v_{\text{capillari}} = Q / S_{\text{capillari}} = 0.33\text{ mm/s}$.

in un singolo capillare di raggio $r = 20\text{ }\mu\text{m}$ avremo $Q = \pi r^2 v_{\text{capillari}} = 4.1 \cdot 10^{-7}\text{ cm}^3/\text{s}$.



Fluidi reali

viscosità, turbolenza, fenomeni dissipativi

FLUIDI REALI

I fluidi (definizione) non dovrebbero presentare resistenza al moto di scorrimento; invece nei fluidi reali tale resistenza è osservata

una forma d'attrito interno, detta **viscosità**, fra strati adiacenti di fluido si oppone allo scorrimento dell'uno sull'altro;

anche in regime laminare

Anche in questo caso il movimento del

fluido è sempre parallelo alla superficie delle lamine ma stavolta, proprio a causa della

presenza dell'attrito nel movimento sarà speso del lavoro. L'intensità di queste forze

d'attrito può essere espressa secondo la seguente espressione: $F = \eta \frac{dv}{dy} \Delta S$ dove ΔS

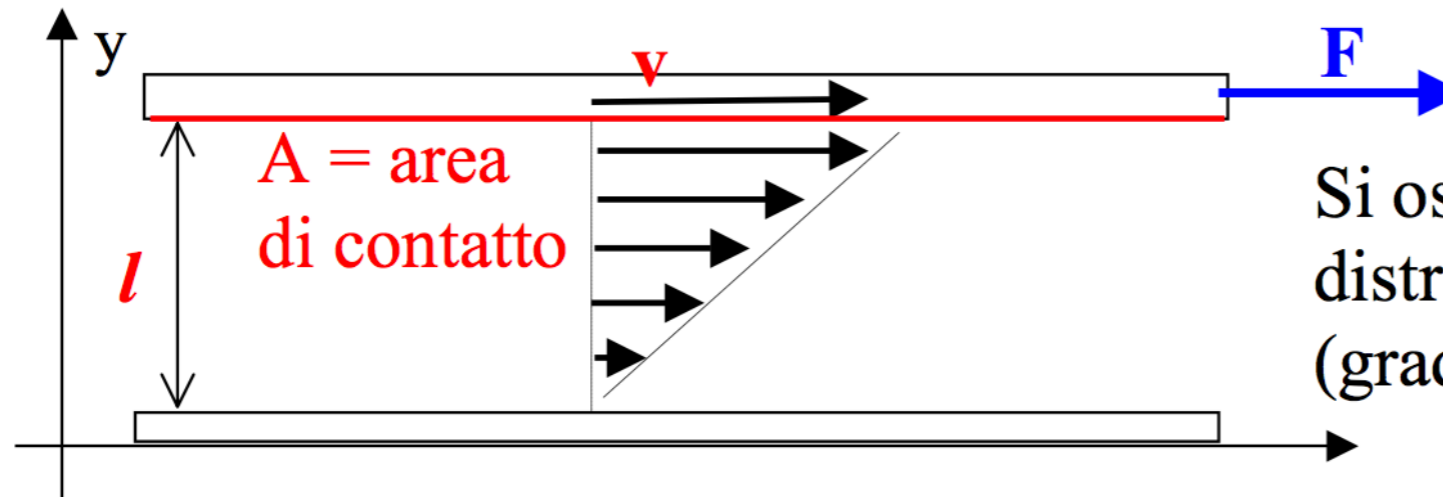
è la superficie di contatto fra due lamine contigue, $\frac{dv}{dy}$ il gradiente di velocità fra le

due lamine ed infine η la **viscosità** del fluido. La viscosità viene misurata in Pa·s nel

SI oppure in **poise (P)** nel sistema **CGS** ($1\text{Pa} \cdot \text{s} = 10 \text{ P}$).

FLUIDI REALI - VISCOSITÀ

Consideriamo due lastre di vetro, una fissa e l'altra in moto con velocità costante v , al cui interno si trova un fluido reale.



Si osserva una distribuzione di velocità (gradiente di velocità)

Per $v = \text{costante}$, bisogna applicare $F = \text{costante}$ e risulta $F \propto \frac{vA}{l}$ con una proporzionalità η che dipende al fluido interposto.

$$\eta = \frac{Fl}{Av} \quad \text{ovvero} \quad F_v = \eta \frac{Av}{l} \quad \text{o più in generale} \quad F_v = \eta A \frac{dv}{dy}$$

dove si assume che η sia **indipendente** da v .

VISCOSITÀ

Il coefficiente di viscosità (η) dipende fortemente dalla temperatura

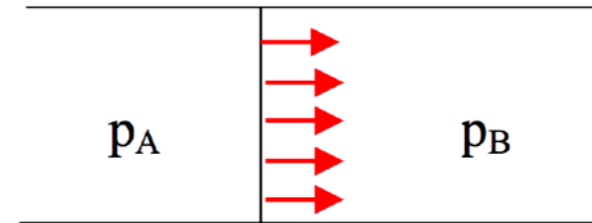
Fluido	T ($^{\circ}$ C)	η (Kg/ms)
Acqua	0	$1.8 \cdot 10^{-3}$
Acqua	20	$1.0 \cdot 10^{-3}$
Acqua	100	$0.3 \cdot 10^{-3}$
Glicerina	20	$830 \cdot 10^{-3}$
Olio motore	30	$250 \cdot 10^{-3}$
Alcool	20	$1.2 \cdot 10^{-3}$

la viscosità del sangue $\eta = 4.75 \cdot 10^{-2}$ P

Esistono **importanti differenze** nel moto di un fluido reale rispetto a quello di un fluido ideale prodotte dalla viscosità

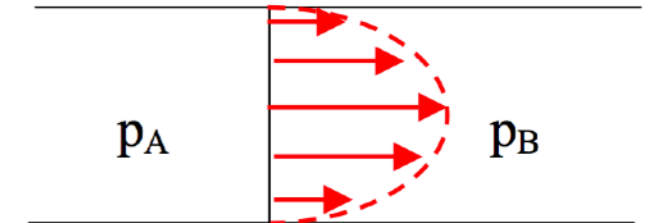
Consideriamo un tubo orizzontale a sezione A costante

un fluido ideale



v costante nella sezione A
 $p_A = p_B$ costante

un fluido reale



v variabile nella sezione A
 $p_A > p_B$



$$F_V = \eta A \frac{dv}{dr}$$

il movimento può essere scomposto in tante lamine circolari concentriche con raggio crescente a partire dall'asse centrale del condotto che si muovono parallele all'asse del condotto. A causa della maggiore superficie di contatto la forza d'attrito sarà maggiore verso le pareti del condotto quindi la velocità sarà maggiore verso il centro del condotto.

L'espressione della portata

$$Q = v A$$

perde validità

VISCOSITÀ

Calcoliamo la portata Q

Consideriamo un cilindro di raggio R lungo L , in cui scorre un fluido in moto **laminare e stazionario**. La velocità in esso ha una distribuzione con $v(R)=0$, $v(0)=V_{max}$.

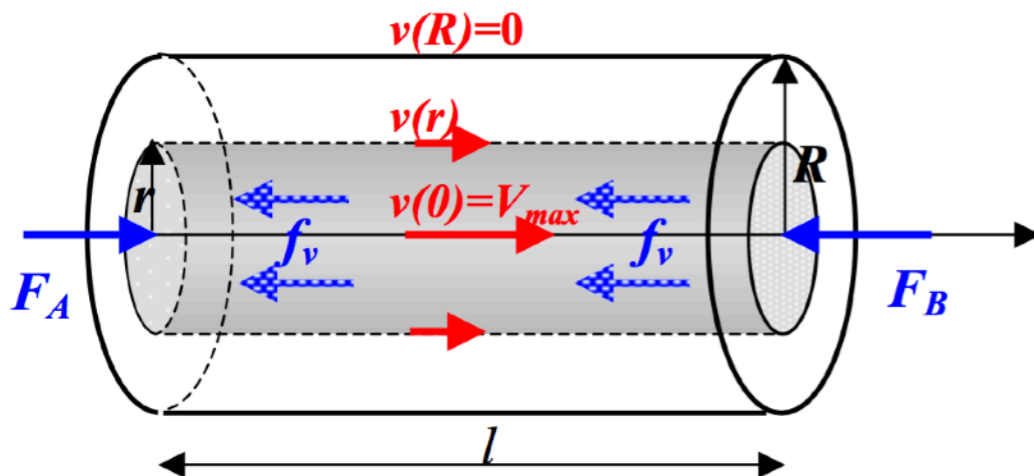
Stazionario $\Rightarrow v(r) = cost \Rightarrow \vec{F}_{est}^R = 0$

Per una porzione di fluido in un cilindro di raggio $r < R$ abbiamo $\vec{F}_{est}^R = \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_V = 0$; essendo tutte le forze parallele (all'asse), diviene: $F_A - F_B - F_V = 0$

$$\pi r^2 (p_A - p_B) + \eta 2\pi r \cdot l \frac{dv}{dr} = 0$$

$$dv = -\frac{(p_A - p_B)}{2\eta l} \cdot r dr$$

$$v(r) = \frac{(p_A - p_B)}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

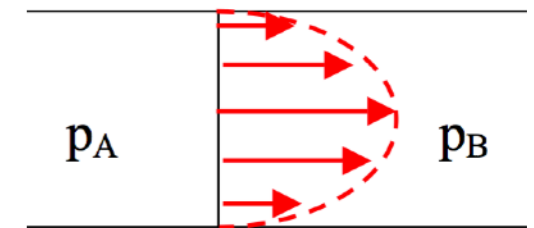


$$F_A = p_A \cdot \pi r^2$$

$$F_B = p_B \cdot \pi r^2$$

$$F_V = \eta A \frac{dv}{dr} \text{ con } A = 2\pi r \cdot l$$

<0 perché v
diminuisce
con r

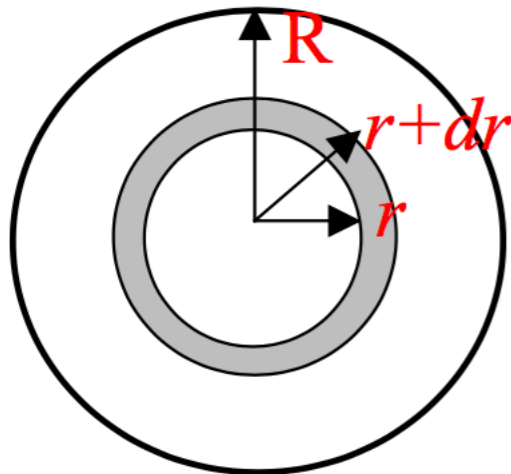


andamento
parabolico di
v con r

VISCOSITÀ

Poiseuille (Parigi, 22 aprile 1799 – Parigi, 26 dicembre 1869) è stato un medico, fisiologo e fisico francese.

al raggio r ($0 < r < R$) Possiamo calcolare pertanto la portata come velocità per area $\Rightarrow dQ = v(r) \cdot dA$



La portata totale si ottiene sommando tutti i contributi dQ al variare di r da 0 ad $R \Rightarrow$

$$Q = \sum dQ = \int_0^R dQ$$

$$Q = \int_0^R \frac{(p_A - p_B)}{4\eta l} (R^2 - r^2) \cdot 2\pi r \cdot dr = \frac{\pi(p_A - p_B)}{2\eta l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr$$

$$\text{calcolando } \int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \int_0^R R^2 r dr - \int_0^R r^3 dr = \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} = \frac{R^4}{4}$$

$$Q = \frac{\pi R^4 (p_A - p_B)}{8\eta l}$$

LEGGE DI POISEUILLE

valida in regime laminare

Per mantenere in movimento un fluido reale con portata Q costante, è necessario fare un lavoro, occorre cioè mantenere una differenza di pressione fra i punti d'ingresso e d'uscita.

Nel caso di un condotto cilindrico orizzontale di raggio costante R e lunghezza l la portata del condotto è legata alla differenza di pressione Δp agli estremi del condotto

FLUIDI REALI

Si definisce *perdita di carico* di un condotto la *variazione di pressione per unità di lunghezza* del condotto

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{8\eta Q}{\pi R^4}$$

Talvolta si utilizza la definizione di *resistenza di un condotto* dalla quale discende:

$$R = \frac{8\eta l}{\pi R^4}$$

* $\Delta p = R Q$

Ricordando che per far passare un volume V entro il condotto è necessario spendere un lavoro pari a $L = \Delta p V$ ed una potenza (Lavoro per unità di tempo) pari a $P = \Delta p V / t$, è chiaro che la potenza può essere espressa come

* $P = \Delta p Q$ **variazione di pressione per portata**

LIMITE DI TURBOLENZA

L'approssimazione a regime laminare è valida nei fluidi viscosi quando la velocità è molto bassa, all'aumentare della velocità gli strati di fluido si mescolano tra loro in moto vorticoso dando luogo ad un regime turbolento.

Per stabilire se un fluido reale in movimento possa essere considerato in regime lami-

nare occorre calcolare il **numero di Reynolds** $N_R = \frac{2\rho\bar{v}R}{\eta}$ dove $\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2}$ è la velocità

media del fluido di densità ρ e viscosità η nel condotto cilindrico di raggio R , e verificare che sia $N_R < 1000$. Per valori maggiori a 3000 il moto è sicuramente turbolento mentre per valori intermedi il regime è instabile.

FLUIDI REALI

Esercizi

1. Un fluido di densità $\rho = 1.0 \text{g/cm}^3$ e viscosità $\eta = 0.1 \text{P}$ scorre in un condotto di raggio costante $R = 1 \text{cm}$. Calcolare la portata sapendo che la differenza di altezza tra le due colonne poste ad una distanza $l = 30 \text{cm}$ è $h = 3 \text{cm}$.

Soluzione: trattandosi di un fluido viscoso dobbiamo applicare l'equazione di Hagen-Poiseuille, sapendo inoltre che la differenza di pressione fra i due punti vale:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \rho g h.$$

$$Q = \frac{\pi R^4}{8 \eta l} \Delta p = \frac{\pi (1 \text{cm})^4}{8 \cdot 0,1 \text{P} \times 30 \text{cm}} 1.0 \text{g/cm}^3 \times 9.8 \cdot 10^2 \text{cm/s}^2 \times 3 \text{cm} = 384.8 \text{cm}^3/\text{s} = 0.38 \text{litri/s}$$

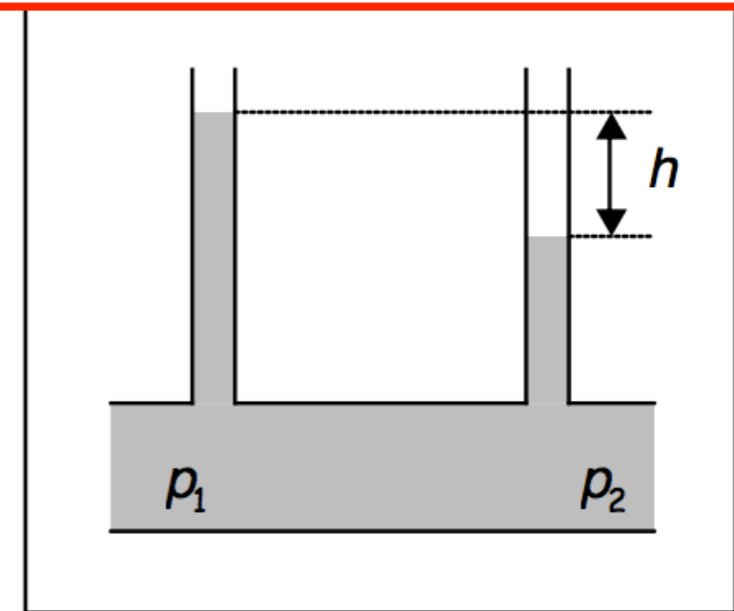


Fig. 25. Problema 1.

FLUIDI REALI

Esercizi

3. Calcolare la caduta di pressione e la perdita di carico in un capillare di lunghezza $L = 1\text{ cm}$ e raggio $R = 20\mu\text{m}$. Si assuma la portata volumetrica del capillare $Q = 4.1 \cdot 10^{-7}\text{ cm}^3/\text{s}$ e la viscosità del sangue $\eta = 4.75 \cdot 10^{-2}\text{ P}$.

Soluzione: la caduta di pressione si ottiene applicando l'equazione di Hagen-Poiseuille (passando al sistema **SI**):

$$\Delta p = \frac{8\eta LQ}{\pi R^4} = \frac{8 \times 4.75 \cdot 10^{-3}\text{ Pa} \cdot \text{s} \times 0.01\text{ m} \times 4.1 \cdot 10^{-13}\text{ m}^3/\text{s}}{\pi \times (20 \cdot 10^{-6}\text{ m})^4} = 3.1 \cdot 10^2\text{ Pa} \approx 2.3\text{ Torr};$$

mentre la perdita di carico è data da $\left. \frac{\Delta p}{L} \right|_{\text{capillare}} = \frac{3.1 \cdot 10^2\text{ Pa}}{0.01\text{ m}} = 3.1 \cdot 10^4\text{ Pa/m}$

0.3 Torr;

Aorta

$1.53 \cdot 10^2\text{ Pa/m}$

2. Approssimando l'aorta di un adulto a riposo come un cilindro lungo $L = 30\text{ cm}$ di raggio $R = 9\text{ mm}$, si calcoli la caduta di pressione nel sangue quando attraversa l'aorta e la perdita di carico nell'aorta. Si assuma la viscosità del sangue $\eta = 4.75 \cdot 10^{-2}\text{ P}$ e la portata del sangue nell'aorta $Q = 83\text{ cm}^3/\text{s}$.

Soluzione: la caduta di pressione si ottiene applicando l'equazione di Hagen-Poiseuille (passando al sistema **SI**):

$$\Delta p = \frac{8\eta LQ}{\pi R^4} = \frac{8 \times 4.75 \cdot 10^{-3}\text{ Pa} \cdot \text{s} \times 0.3\text{ m} \times 83 \cdot 10^{-6}\text{ m}^3/\text{s}}{\pi \times (9 \cdot 10^{-3}\text{ m})^4} = 45.9\text{ Pa} \approx 0.3\text{ Torr};$$

mentre la perdita di carico è data da $\left. \frac{\Delta p}{L} \right|_{\text{aorta}} = \frac{45.9\text{ Pa}}{0.3\text{ m}} = 1.53 \cdot 10^2\text{ Pa/m}$

oppure $\left. \frac{\Delta p}{L} \right|_{\text{aorta}} = \frac{0.3\text{ Torr}}{30\text{ cm}} = 0.01\text{ Torr/cm}$.

$$R_{\text{capillare}} = \left. \frac{\Delta p}{Q} \right|_{\text{capillare}} \gg R_{\text{aorta}} = \left. \frac{\Delta p}{Q} \right|_{\text{aorta}}$$

1 bar	750,0637556 torr
1 atmosfera	760 torr
1 torr	133,322 Pa

FLUIDI REALI

Esercizi

5. Calcolare il numero di Reynolds per il sangue che scorre con velocità media $\bar{v} = 10 \text{ cm/s}$ in un'arteria di raggio $R = 2 \text{ mm}$. Densità del sangue a 37° $\rho = 1.05 \text{ g/cm}^3$ e viscosità $\eta = 4.75 \cdot 10^{-2} \text{ P}$

Soluzione: è sufficiente applicare la definizione di N_R

$$N_R = \frac{2\rho\bar{v}R}{\eta} = \frac{2 \times 1.05 \text{ g/cm}^3 \times 10 \text{ cm/s} \times 0.2 \text{ cm}}{4.75 \cdot 10^{-2} \text{ P}} \approx 88$$

con flusso laminare.

6. Calcolare il numero di Reynolds nell'ipotesi che nell'arteria dell'esercizio precedente sia presente una stenosi che riduca il raggio dell'arteria a $R' = 0.2 \text{ mm}$.

Soluzione: occorre anzitutto ricalcolare la velocità media del sangue nell'ipotesi che la portata dell'arteria sia costante:

$$\bar{v}'\pi R'^2 = \bar{v}\pi R^2 \Rightarrow \bar{v}' = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 \bar{v} = \left(\frac{2 \text{ mm}}{0.2 \text{ mm}}\right)^2 \times 10 \text{ cm/s} = 10^3 \text{ cm/s}$$

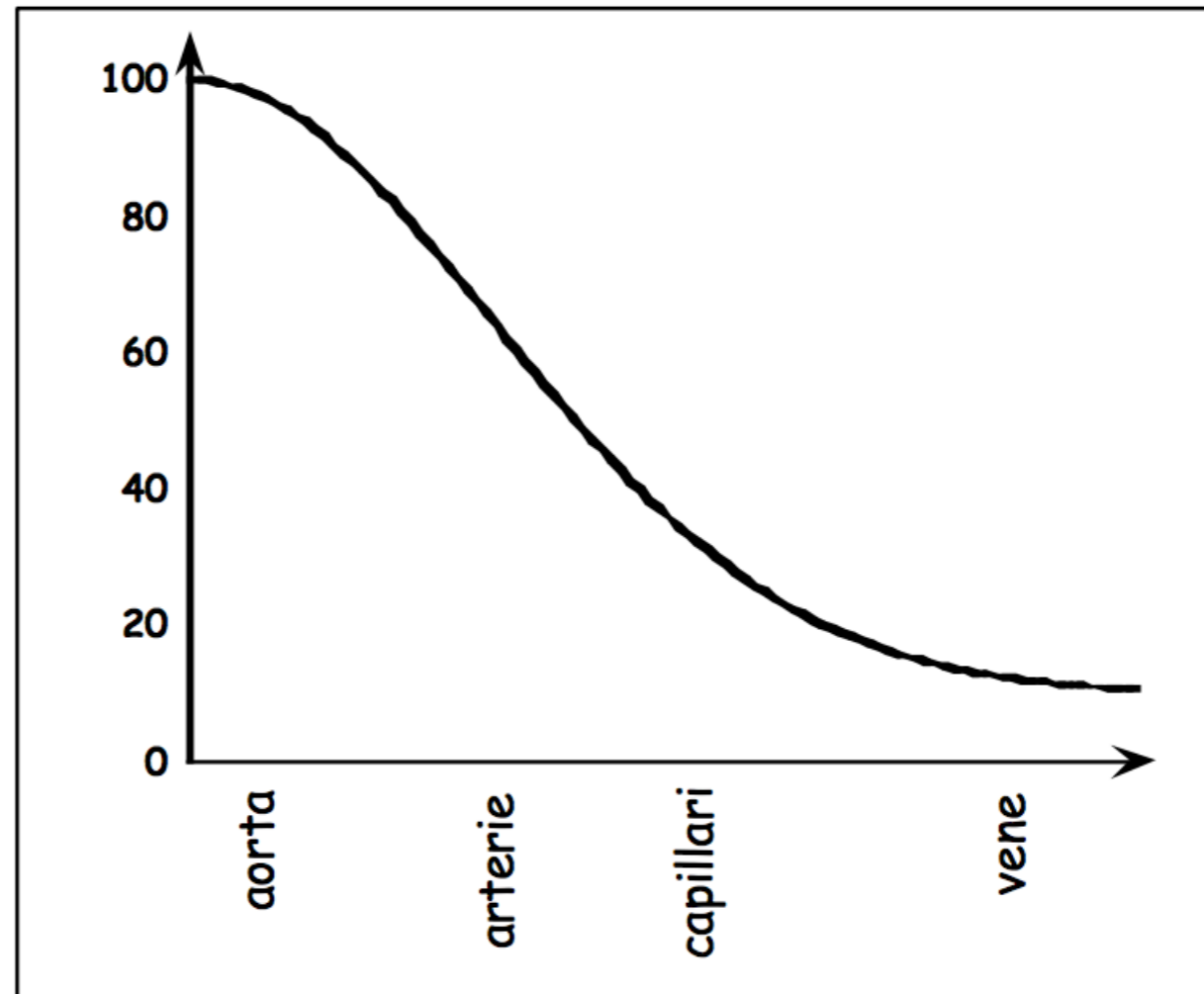
è quindi applicare la definizione di N_R

$$N_R = \frac{2\rho\bar{v}'R'}{\eta} = \frac{2 \times 1.05 \text{ g/cm}^3 \times 10^3 \text{ cm/s} \times 0.02 \text{ cm}}{4.75 \cdot 10^{-2} \text{ P}} \approx 884$$

con flusso prossimo ad essere turbolento.

OSSERVAZIONI SULLA CIRCOLAZIONE SANGUIGNA

Nel tratto dell'aorta c'è una caduta di pressione molto piccola: come i dati dell'esempio 2 se la pressione del sangue è 100 Torr, quando entra nell'aorta provenendo dal ventricolo sinistro, essa si è ridotta di soli 0.3 Torr quando il sangue arriva alle arterie maggiori. Ma mano a mano che il sangue procede verso i vasi più periferici, questi hanno via via raggi sempre più piccoli e quindi la caduta di pressione sarà sempre maggiore. Nella figura è rappresentata schematicamente la variazione di pressione del sangue nei vari distretti. Vediamo dal grafico che quando il sangue entra nelle vene la pressione è di soli 10 Torr con una caduta di pressione totale su tutto il circolo pari a:



$$\Delta p = 100 \text{ Torr} - 10 \text{ Torr} = 90 \text{ Torr} = 1.2 \cdot 10^4 \text{ Pa.}$$

Con questi dati possiamo calcolare la resistenza totale di tutto il sistema circolatorio aorta-

$$\text{arterie - arterioli - capillari: } R = \frac{\Delta p}{Q} = \frac{1.2 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}}{83 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}} = 1.44 \cdot 10^8 \text{ N s / m}^5$$

OSSERVAZIONI SULLA CIRCOLAZIONE SANGUIGNA

Si noti che se la resistenza del circuito aumenta (ricordando che $R = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$, questo può avvenire sia per un aumento della viscosità η che per una diminuzione del raggio R del condotto) allora, per mantenere normale il flusso di sangue, la pressione sanguigna deve aumentare (ipertensione) con conseguente aumento del lavoro richiesto al cuore. Infatti, possiamo dimostrare semplicemente che il lavoro fatto dal cuore dipende dalla pressione sanguigna, calcolando la potenza sviluppata dal cuore. La potenza può essere espressa come prodotto della velocità media con cui il sangue esce dal cuore per la forza media esercitata dal cuore sul sangue quando viene pompato fuori e la forza come prodotto della pressione p esercitata dal cuore per la sezione S dell'aorta:

$P = Fv_{\text{media}} = pSv_{\text{media}} = pQ$ da cui si vede chiaramente che il lavoro fatto dal cuore in 1s cresce al crescere della pressione sanguigna.

Si verifichi che in un adulto con $p = 100 \text{ Torr}$ e $Q = 83 \text{ cm}^3/\text{s}$ si ha $P = 1.1 \text{ W}$.

MOTO NEI FLUIDI REALI

Effetto della viscosità sul moto di un corpo all'interno di un fluido reale

Forza di Stokes:

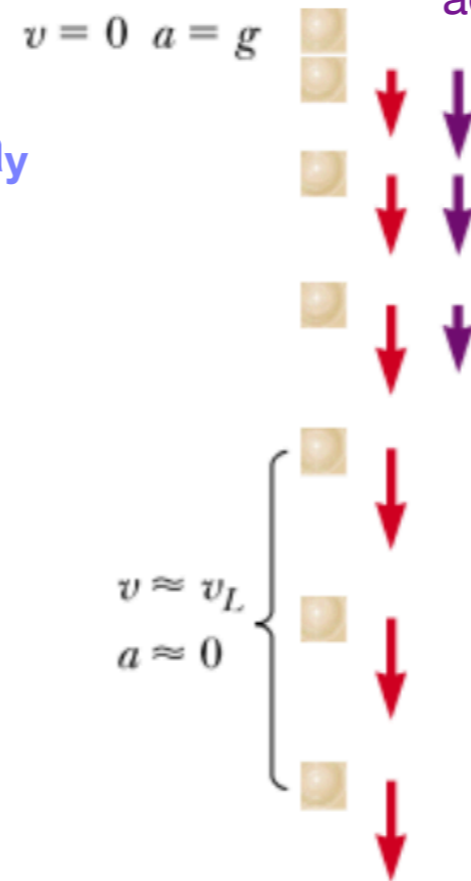
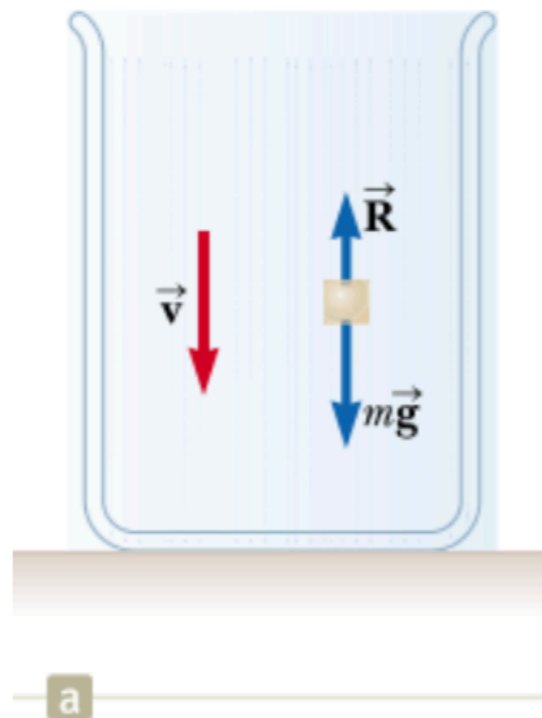
- * La **forza di Stokes** è la forza che un fluido reale di viscosità η oppone ad un corpo in movimento con velocità v in regime laminare. Questa forza dipende dalle dimensioni e dalla forma del corpo: **nel caso in cui il corpo abbia forma sferica con raggio r** vale: $F_S = 6\pi r \eta v$

FORZE

$$\text{Forza d'attrito viscoso: } \vec{F} = -b\vec{v}$$

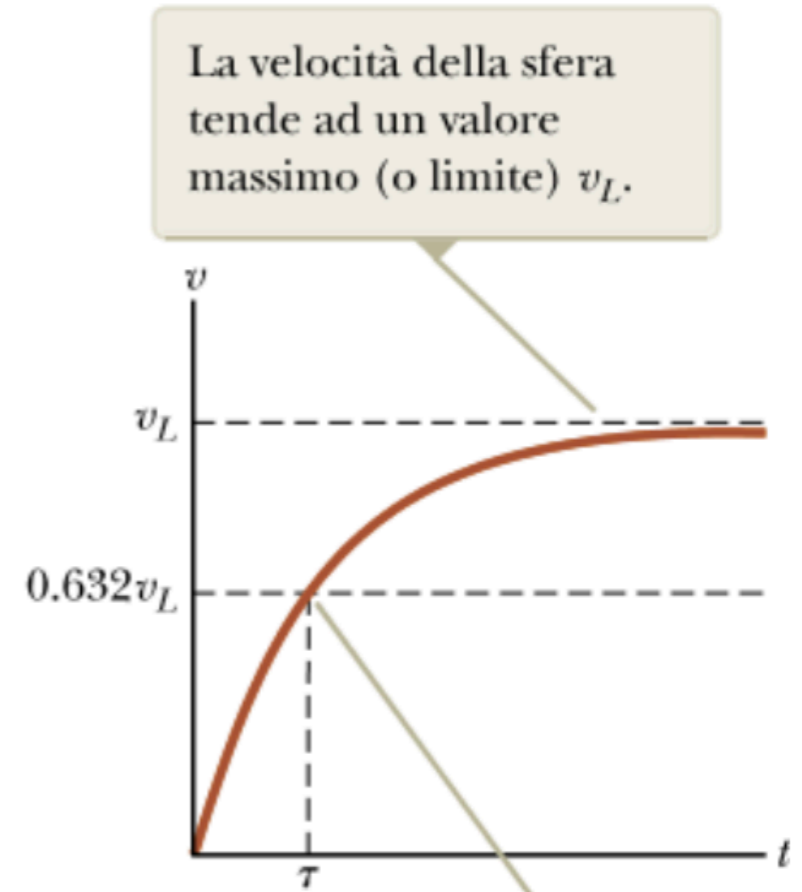
pallina che cade in un fluido (liquido o gas)

- * v parte dal valore iniziale 0
- * aumenta (a causa di g)
- * quando v aumenta, diminuisce a_y



vettore accelerazione
il modulo diminuisce fino ad annullarsi

vettore velocità
il modulo aumenta e raggiunge un valore limite



La velocità della sfera tende ad un valore massimo (o limite) v_L .

La costante di tempo τ è il tempo in corrispondenza al quale la sfera raggiunge la velocità $0.632 v_L$.

$$\vec{F} = m\vec{g} - b\vec{v} = m d\vec{v}_y/dt$$

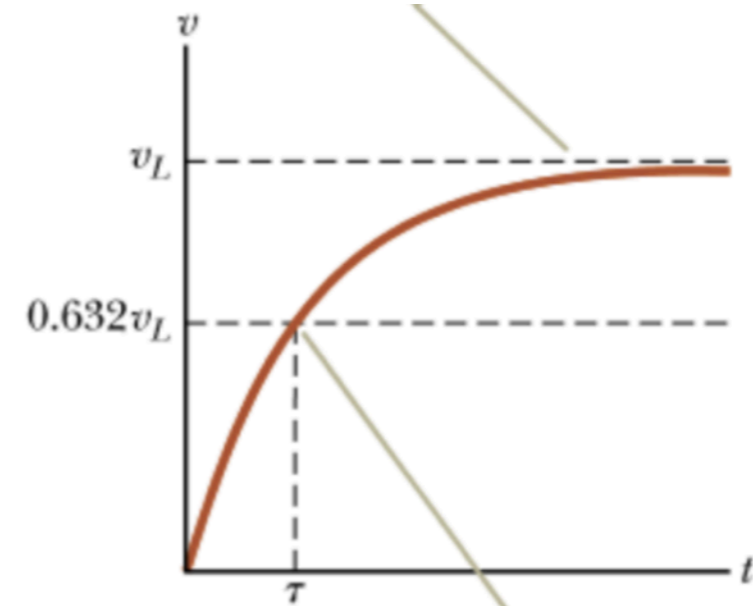
FORZE

$$\text{Forza d'attrito viscoso: } \vec{F} = -b \vec{v}$$

pallina che cade in un fluido (liquido o gas)

$$\vec{F} = m\vec{g} - b\vec{v} = m d\vec{v}_y/dt$$

proiettando sull'asse y (orientato verso l'alto):



* $-mg - b v = m dv/dt \Rightarrow dv / (bv + mg) = -dt/m$

* $(1/b) \ln (bv + mg) = -t/m$

* $(bv + mg)/mg = \exp(-tb/m)$

* $v(t) = (mg/b) (\exp (-bt/m) - 1)$

* **NOTA** $v(0) = 0$

* $v(\text{inf}) \rightarrow -mg/b$ [rivolta verso il basso naturalmente]

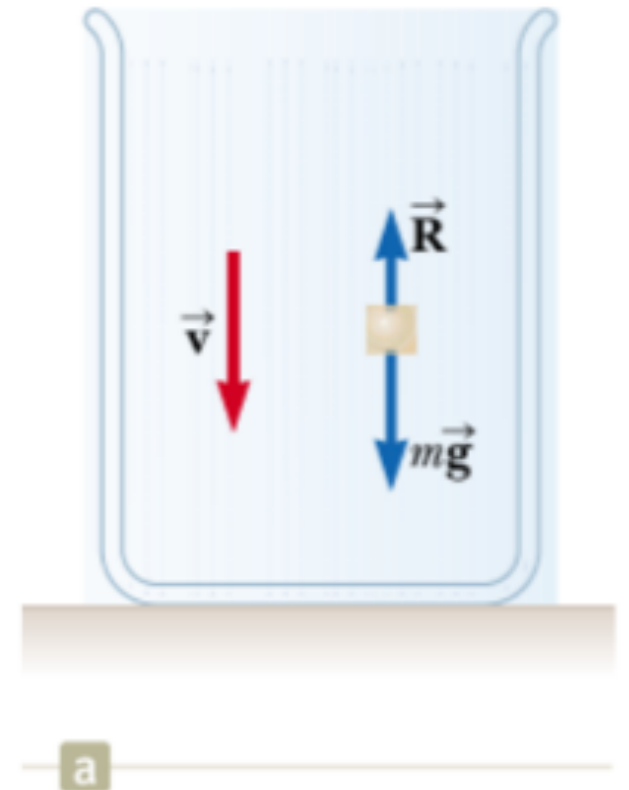
MOTO NEI FLUIDI REALI

Adesso possiamo trattare questo problema con maggiore precisione:

$$* \sum F = 0 \Rightarrow P - F_{\text{galleggiamento}} - F_{\text{attr. viscoso}} = 0$$

$$* \Rightarrow \rho V g - \rho' V g - 6\pi r \eta v = 0$$

- infatti $F_{\text{galleggiamento}} = \rho' V g$ [verso l'alto]
 - dove (ρ' è la densità del fluido)
- $F_{\text{attr. viscoso}} = F_{\text{Stokes}} = 6\pi r \eta v$ [verso l'alto]



$$\vec{F} = m\vec{g} - b\vec{v} = m \frac{d\vec{v}_y}{dt}$$

$$v_s = \frac{V(\rho - \rho')g}{6\pi\eta r}$$

Velocità limite
velocità di sedimentazione

MOTO NEI FLUIDI REALI

Lo stesso principio può essere usato per la **centrifuga**. Immaginiamo dei corpuscoli di forma sferica in sospensione in un liquido posto in una provetta in rotazione intorno ad un asse verticale con velocità angolare ω . In questo caso, trascurando la forza peso, si può dimostrare che il corpuscolo in sospensione ad una distanza R dall'asse di

rotazione è soggetto ad una forza centripeta $F_C = \rho'V\omega^2R$ ed applicando il Primo Principio della Dinamica si ottiene:

$$F_C + F_s = M\omega^2R \Rightarrow \rho'V\omega^2R + 6\pi r\eta v_s = \rho V\omega^2R \Rightarrow v_s = \frac{V(\rho - \rho')\omega^2R}{6\pi r\eta}$$

simile alla velocità di sedimentazione nel campo gravitazionale dove al posto di g si deve sostituire l'accelerazione centripeta ω^2R .

MOTO NEI FLUIDI REALI

Esercizi

1. Approssimando un globulo rosso ad una sferetta di raggio $r = 2 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$ e densità $\rho = 1.3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, determinare il tempo necessario affinché si abbia un sedimento di 1mm nel plasma ($\rho_0 = 1.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) alla temperatura $T = 37^\circ \text{C}$ (coefficiente di viscosità $\eta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$): a) nel campo gravitazionale, b) in una centrifuga in cui l'accelerazione è $a = 3 \cdot 10^5 g$.

Soluzione: lo spessore s del sedimento è funzione della velocità di sedimentazione v_s e del tempo t secondo la formula $s = v_s t$. Nel caso a) avremo $v_s = \frac{V(\rho - \rho_0)g}{6\pi\eta r}$ per cui:

$$t = \frac{s}{v_s} = \frac{6\pi\eta r s}{\frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)g} = \frac{9 \times 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} \times 10^{-3} \text{ m}}{2 \times 4 \cdot 10^{-12} \text{ cm} \times (1.3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 - 1.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3) \times 9.8 \text{ m/s}^2} = 1530 \text{ s},$$

mentre nel caso b) avremo $v_s = \frac{V(\rho - \rho_0)\omega^2 R}{6\pi r \eta} = \frac{V(\rho - \rho_0)a}{6\pi r \eta}$ da cui

$$t = \frac{6\pi\eta r s}{\frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)a} = \frac{9 \times 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s} \times 10^{-3} \text{ m}}{2 \times 4 \cdot 10^{-12} \text{ cm} \times (1.3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 - 1.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3) \times 3 \cdot 10^5 \times 9.8 \text{ m/s}^2} = 5.1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

MOTO NEI FLUIDI REALI

Esercizi

2. Una sfera d'alluminio di densità $\rho = 2.7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ cade in un recipiente contenente olio lubrificante ($\rho_0 = 1.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ e $\eta = 0.6 \text{ Pa} \cdot \text{s}$) raggiungendo la velocità limite $v = 12 \text{ cm/s}$.

Soluzione: la velocità limite della sfera è data dall'espressione $v_s = \frac{V(\rho - \rho')g}{6\pi\eta r}$, il volume è legato al raggio della sfera da $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, per cui il raggio della sfera vale

$$r = \sqrt{\frac{9\eta v_s}{2(\rho - \rho')g}} = \sqrt{\frac{9 \times 0.6 \text{ Pa} \cdot \text{s} \times 0.12 \text{ m/s}}{2 \times (2.7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 - 1.0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3) \times 9.8 \text{ m/s}^2}} = 4.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

FENOMENI DI SUPERFICIE

Le superfici di separazione fra mezzi diversi - ad esempio tra due liquidi non miscibili o tra un liquido e un gas - possiedono particolari proprietà che danno luogo ad effetti detti fenomeni di superficie. Questi sono essenzialmente dei fenomeni molecolari dovuti alle forze di coesione (forze di attrazione che esistono fra le molecole e che agiscono entro un raggio di azione dell'ordine di 10^{-9} m).

Consideriamo per esempio due molecole poste in un liquido in posizione diversa rispetto alla superficie di separazione liquido-aria, come riportato in figura 26: quella immersa in profondità nel liquido (1) è soggetta alle forze attrattive da parte di tutte le altre molecole che la circondano e che si trovano dentro la sfera il cui raggio è pari al raggio d'azione della forza di coesione. Poiché queste forze sono esercitate da tutte le direzioni ed hanno in media la stessa intensità, la risultante è nulla e la molecola può muoversi liberamente all'interno del volume.

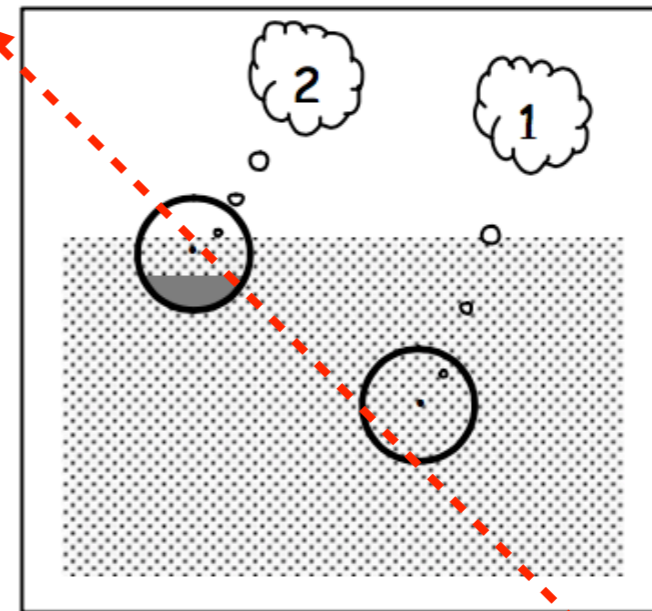


Fig. 26. Effetto di superficie. Le molecole considerate nel testo si trovano al centro dei circoletti.

~10 raggi atomici

FENOMENI DI SUPERFICIE

Sulla molecola 2 invece le forze di coesione non sono bilanciate

-> Il risultato è una forza attrattiva F che agisce su tutta la superficie S del liquido

possiamo definire una pressione superficiale

come $p_{sup} = F / S$

A causa delle forze di coesione e della superficie di separazione liquido-aria, ***il liquido viene a trovarsi in uno stato di compressione.***

Volendo aumentare la superficie libera di un liquido sarà necessario far passare un certo numero di molecole dall'interno alla superficie, vincendo le forze di attrazione esercitate dalle altre molecole; occorre quindi ***compiere un lavoro che si traduce in aumento di energia del sistema.*** Questo meccanismo ci fa capire come ***l'aumento di superficie libera di un liquido non possa mai avvenire spontaneamente.*** Al contrario, la tendenza spontanea di un liquido è di ridurre la propria superficie libera.

Una goccia tende ad assumere la forma sferica (trascurando la gravità) perché questo è il solido che presenta la minore superficie a parità di volume contenuto ed alla superficie minore compete un'energia minore.

TENSIONE SUPERFICIALE

Energia totale di un liquido

$$E_{tot} = E_V + E_S = E_V + \tau S$$

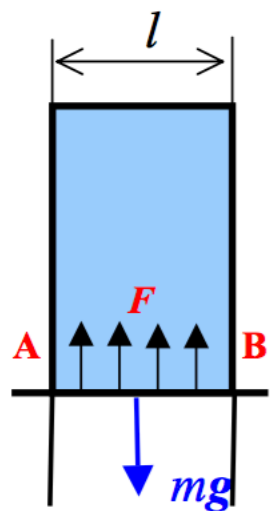
$$(1) \quad W = \tau \cdot \Delta S$$

τ = TENSIONE SUPERFICIALE J/m²

L'aumento della superficie libera (ΔS) di un liquido non può avvenire spontaneamente ma serve il lavoro (W) di una forza esterna

Definizione operativa di τ

Usiamo delle pellicole liquide che si possono ottenere, con un telaietto rettangolare rigido, da un liquido a bassa tensione superficiale, ad esempio acqua saponata. Se il lato AB è mobile (di massa m relativamente piccola) si osserva una variazione della superficie della pellicola fino a raggiungere una condizione di equilibrio.



Se il telaietto è posto verticale, all'equilibrio si ha $\Rightarrow \vec{F} + m\vec{g} = 0$

Questo suggerisce l'esistenza di forze, tangenti alla superficie libera e proporzionali al contorno, spiegabili in termini di tensione superficiale τ .

$$\tau = \frac{F}{L} \quad (2) \text{ con } L = \text{contorno} = 2l \Rightarrow \tau = \frac{F}{2l}$$

della superficie deformata per effetto di forze applicate dall'esterno

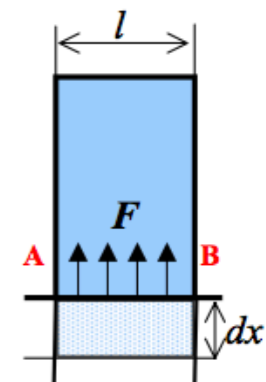
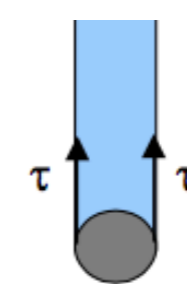
2 definizioni equivalenti di τ infatti

$$dW = F \cdot dx = 2l \cdot \tau \cdot dx = \tau \cdot 2(l \cdot dx)$$

$$l \cdot dx = dA \text{ variazione di una superficie}$$

$$2 \cdot dA = dS \text{ variazione totale della super.}$$

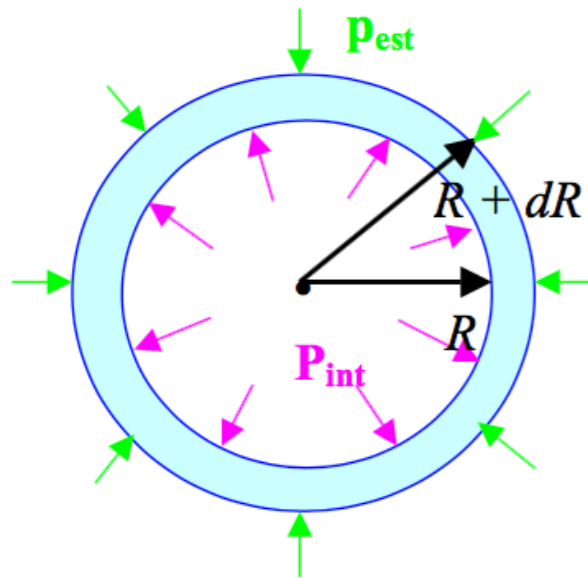
$$dW = \tau \cdot 2 \cdot dA = \tau \cdot dS \Rightarrow \tau = \frac{dW}{dS}$$



più in generale $dF = \tau dl$
 dF forza infinitesima lungo il tratto infinitesimo dl del contorno

TENSIONE SUPERFICIALE - LEGGE DI LAPLACE

Consideriamo una lamina liquida sferica di raggio R e spessore dR (una bolla di sapone). La pressione esterna e la tensione superficiale per la (1) tendono a contrarre la bolla. Per l'equilibrio è necessario una pressione interna che deve tendere ad espandere la bolla, quindi



$$p_{int} > p_{est} \Rightarrow (p_{int} - p_{est}) > 0$$

Il lavoro delle forze di pressione per una espansione di dR è:

$$dW_p = F_p \cdot dR = (p_{int} - p_{est}) \cdot S \cdot dR$$

$$S = 4 \pi R^2 \Rightarrow$$

$$dW_p = (p_{int} - p_{est}) \cdot 4 \pi R^2 \cdot dR (> 0)$$

$$dW_\tau = \tau \cdot dS (< 0)$$

$$S_{sfera\ int.} \approx S_{sfera\ est.} \approx 4 \pi R^2 \Rightarrow dS = dS_{sfera\ int.} + dS_{sfera\ est.} = 2 \cdot d(4 \pi R^2)$$

$$dW_\tau = \tau \cdot dS = \tau \cdot 2 \cdot d(4 \pi R^2) = \tau \cdot 2 \cdot 8 \pi R \cdot dR = 16 \pi \cdot \tau \cdot R dR.$$

All'equilibrio il lavoro totale deve essere nullo $\Rightarrow |dW_\tau| = |dW_p| \Rightarrow$

Chiamiamo **pressione di contrattilità** la differenza di pressione $p_c = p_{int} - p_{est}$

$$p_{int} - p_{est} = \frac{4\tau}{R}$$

(sfera cava di fluido)

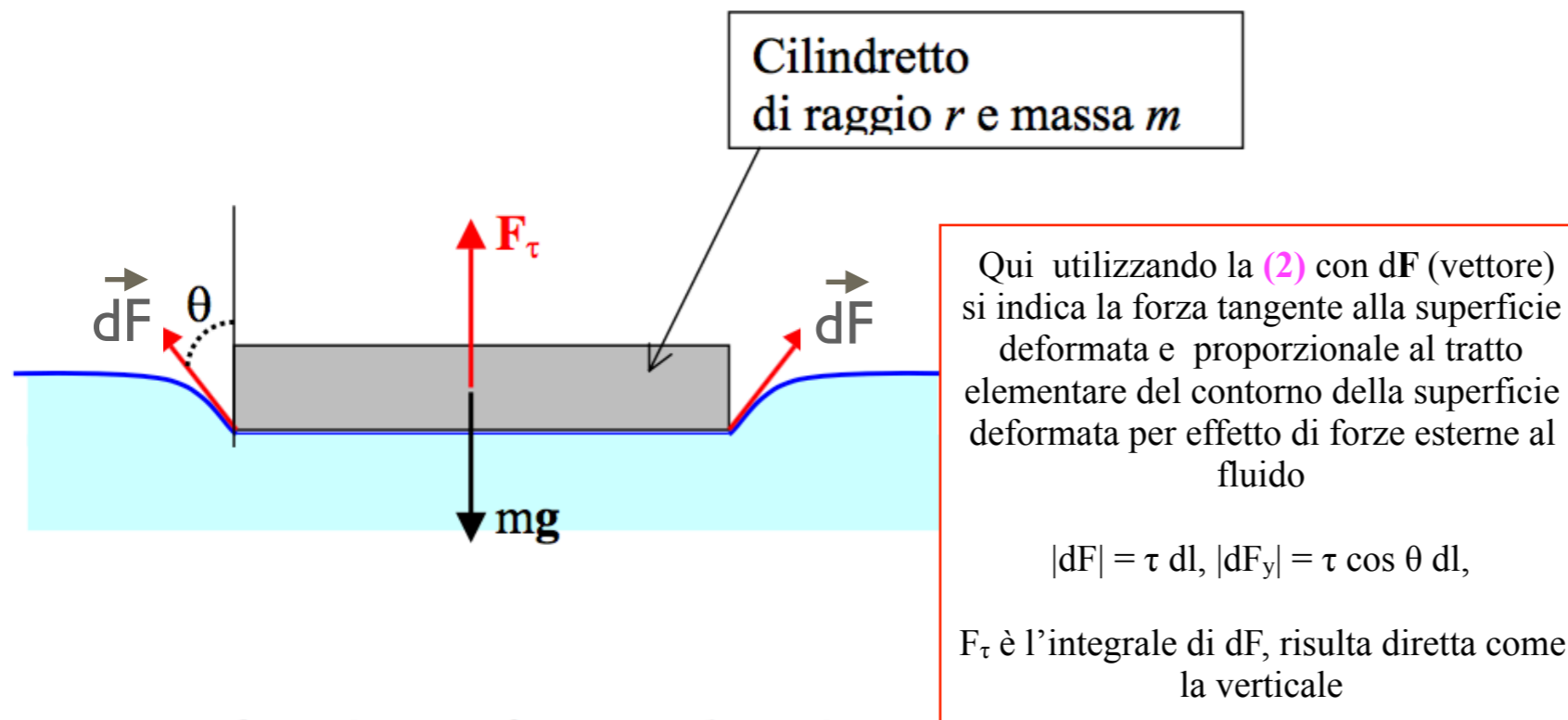
$$p_c = \frac{2\tau}{R}$$

sfera piena di fluido

Superficie cilindrica $p_c = \tau / R$

TENSIONE SUPERFICIALE

La superficie di un fluido può **sostenere** una massa deformandosi.



$$F_\tau = \tau \cdot L \cdot \cos \theta = \tau \cdot 2\pi r \cdot \cos \theta \quad \text{essendo } L = 2\pi r$$

$$W = mg$$

$$\text{All'equilibrio} \Rightarrow F_\tau = W \Rightarrow \tau \cdot 2\pi r \cdot \cos \theta = mg \Rightarrow \cos \theta = \frac{mg}{2\pi r \cdot \tau}$$

$\cos \theta$ aumenta (ovvero aumenta la deformazione della superficie) all'aumentare di m a parità di τ ed r .

Se per un dato m e/o τ , il rapporto $mg / (2\pi r \tau)$ è maggiore di 1 la superficie non può sostenere la massa m .

Essendo τ generalmente molto piccolo, solo piccole m possono essere sostenute.

FENOMENI DI SUPERFICIE

Si chiamano tensioattivi (sapone, alcool, ecc) quelle sostanze che, se aggiunte ad un liquido, hanno la proprietà di concentrarsi sullo strato superficiale di liquido e pertanto, non essendo attratte con forza dalle molecole del liquido sottostante, ne abbassano la tensione superficiale. La capacità di un tensioattivo di ridurre la tensione superficiale dipende dalla sua concentrazione.

FENOMENI DI SUPERFICIE COESIONE E ADESIONE

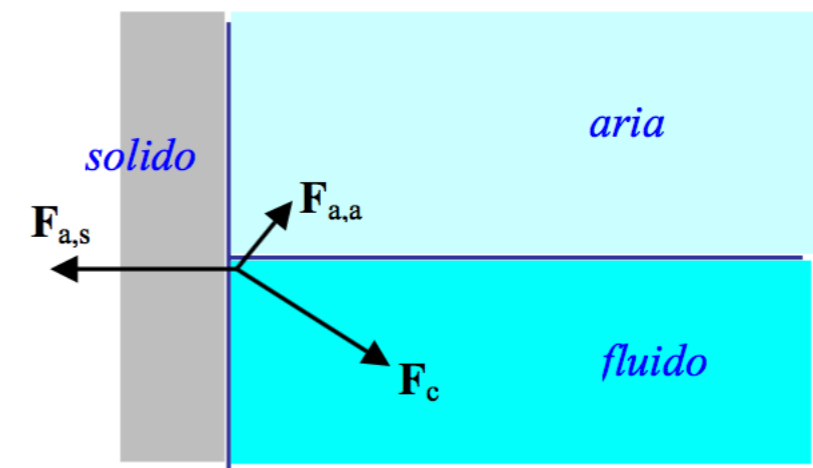
La risultante delle forze di interazione molecolare su una molecola è denominata

- * forza di coesione, se si sviluppa fra molecole identiche
 - **F_c diretta** perpendicolarmente alla superficie **verso l'interno del fluido**
- * forza di adesione, se si sviluppa fra molecole diverse (fluido pareti del contenitore, fluido-aria, fluido1-fluido2)
 - **F_a diretta** perpendicolarmente alla superficie di interfaccia **verso il materiale 2 (del contenitore)**

forze di coesione \Rightarrow tengono insieme le sostanze

forze di adesione \Rightarrow fanno attrarre sostanze diverse (acqua su vetro)

La condizione di equilibrio di un fluido in presenza di più sostanze è determinata dalla reciproca intensità delle forze di adesione e coesione.

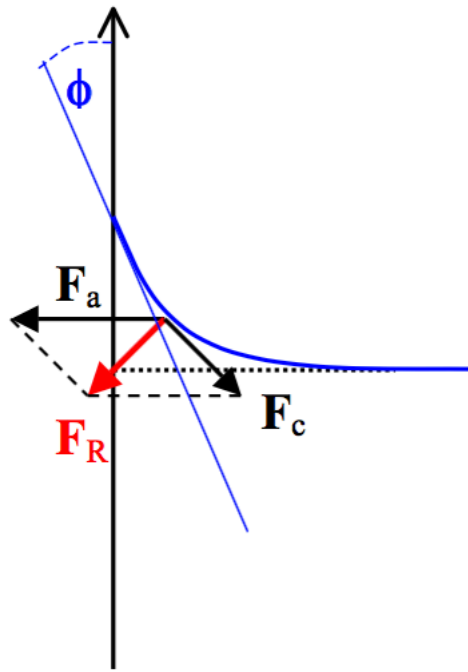


- * F_{aa} trascurabile
- * Le restanti due forze, vista la loro direzione e verso, non possono avere risultante nulla
- * ***all'equilibrio la superficie libera del fluido deve essere ortogonale alla risultante delle forze agenti.***

FENOMENI DI SUPERFICIE COESIONE E ADESIONE

a)

$$\vec{F}_a > \vec{F}_c$$



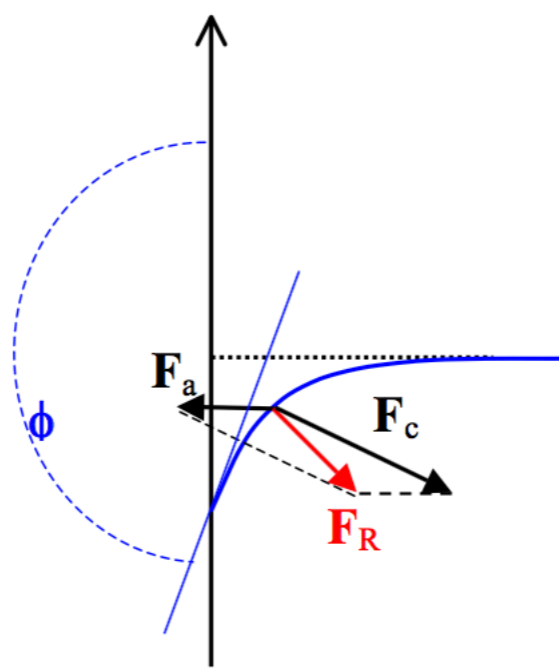
Innalzamento del liquido lungo la parete \Rightarrow

il liquido bagna la parete

ovvero: $0 < \phi < \pi/2$

b)

$$\vec{F}_a < \vec{F}_c$$



Allontanamento del liquido dalla parete \Rightarrow

il liquido non bagna la parete

ovvero: $\pi/2 < \phi < \pi$

Acqua-vetro

$\phi = 0^\circ$

Benzina-vetro

$\phi = 26^\circ$

Acqua-paraffina

$\phi = 107^\circ$

Acqua-teflon

$\phi = 127^\circ$

Mercurio-acqua

$\phi = 140^\circ$

Esempi di Φ	
Acqua-vetro	~ 0
Acqua-paraffina	110
Mercurio-vetro	148
Trementina-vetro	17
Cherosene-vetro	26

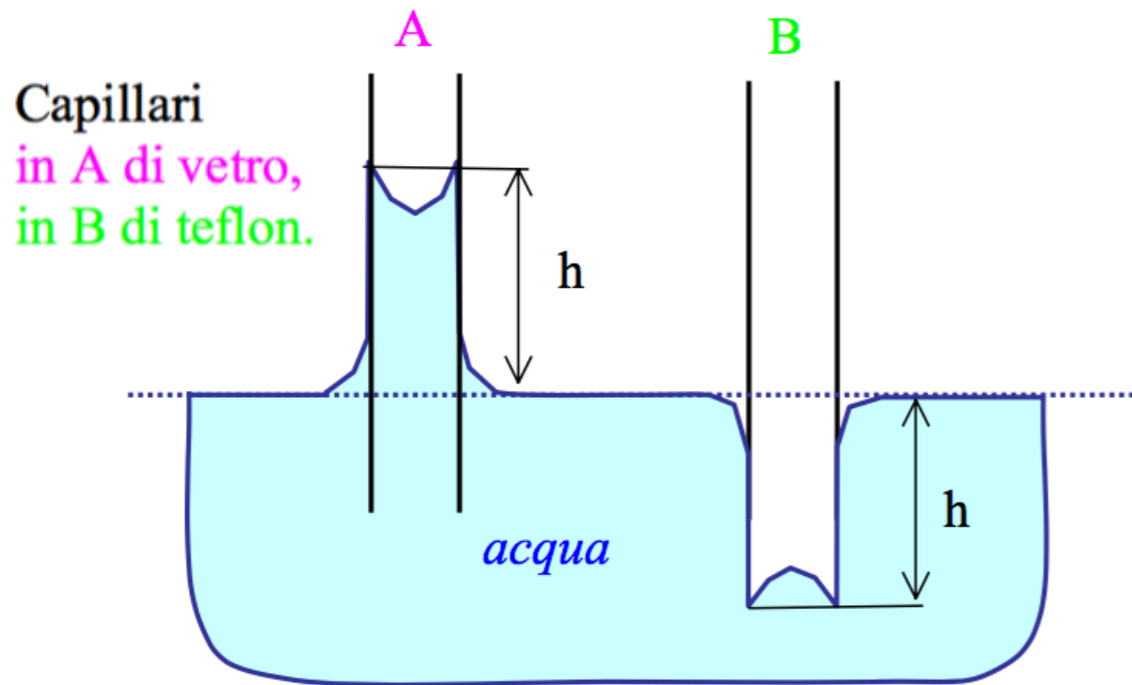
$\phi = \text{angolo di raccordo}$ (angolo fra la tangente alla superficie del liquido, nel punto di contatto con la parete, e la verticale ascendente)

Esso dipende dalla coppia liquido-solido

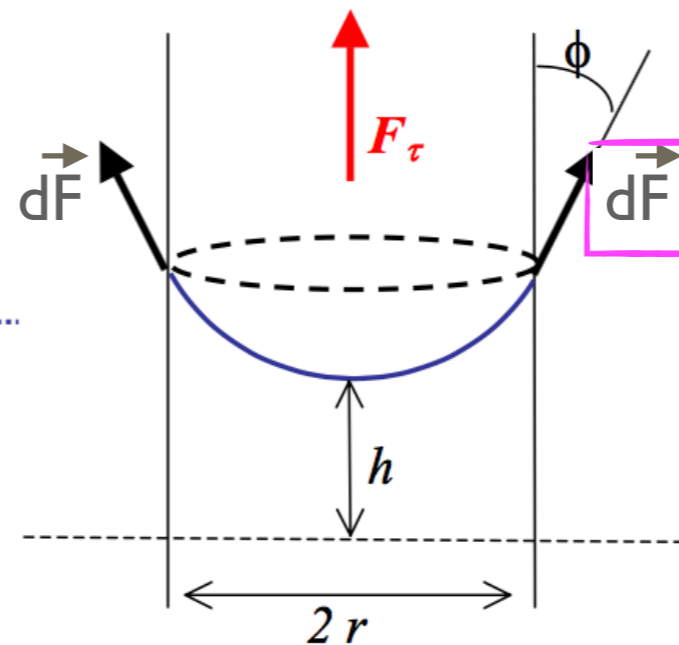
FENOMENI DI SUPERFICIE COESIONE E ADESIONE -> CAPILLARITÀ

L'incurvamento della superficie è osservabile solo in prossimità ($\leq mm$) delle pareti; questo in tubi di piccole dimensioni trasversali (cosiddetti *tubi capillari*) da luogo al **fenomeno della capillarità**: il livello della superficie libera del fluido nel capillare è diverso da quello nel resto del recipiente (in contraddizione apparente con la legge di Stevino)

Qui utilizzando la (2) con $d\vec{F}$ (vettore) si indica la forza tangente alla superficie deformata e proporzionale al contorno elementare dl della superficie deformata per effetto di forze di adesione (esterne al fluido)
 $|d\vec{F}| = \tau dl$, $|dF_y| = \tau \cos \phi dl$,
 F_τ è l'integrale di $d\vec{F}$, risulta diretta come la verticale



Calcoliamo h , nel caso A, per un capillare di raggio r



$$F_\tau = \tau \cdot \cos \phi \cdot L$$

$$\text{con } L = 2\pi r$$

$$F_\tau = \tau \cdot \cos \phi \cdot 2\pi r$$

$$\text{All'equilibrio } F_\tau = mg$$

$$\text{con } m = \rho \cdot V \approx \rho \pi r^2 h$$

$$\text{Quindi } \tau \cdot \cos \phi \cdot 2\pi r = \rho \cdot \pi r^2 h \cdot g \Rightarrow$$

$$h = \frac{2\tau \cdot \cos \phi}{\rho g r}$$

Legge di Jurin (vale anche nel caso B)

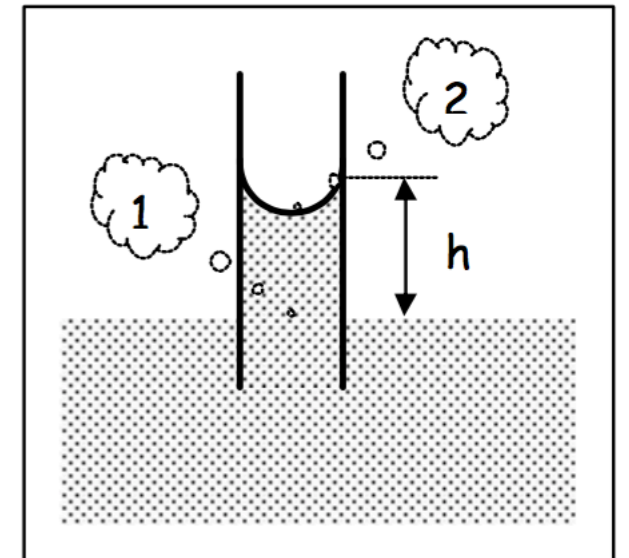
James Jurin, English scientist and physician [1600 - 1700]

FENOMENI DI SUPERFICIE COESIONE E ADESIONE -> CAPILLARITÀ

Legge di Jurin - dimostrazione (parziale) alternativa

Consideriamo capillare immerso in un liquido e con un raggio R sufficientemente piccolo affinché la superficie libera del liquido (**menisco**) sia **una semisfera di raggio R** , ovvero che formi nel punto di contatto con il capillare, un angolo $\Phi = 0^\circ$.

Analizziamo il caso di un liquido che "bagna" la superficie, per cui per quanto detto prima si avrà un innalzamento h del liquido nel capillare.



Per la **legge di Laplace**, a causa della curvatura nel punto 2 ci sarà una differenza di pressione fra l'interno della semisfera (alla pressione atmosferica p_0) e l'esterno della semisfera (al menisco, p_2) pari a $2\tau/R$, cioè $p_0 - p_2 = 2\tau / R$.

Nel punto 2 ci sarà una pressione minore rispetto a quella atmosferica pari a

$$p_2 = p_0 - 2\tau/R \text{ e quindi il liquido salirà fino ad una altezza } h$$

Per **Stevino**, $p_1 = p_2 + \rho gh$, e quindi $2\tau/R = \rho gh$ da cui

$$h = \frac{2\tau}{\rho g R}$$

Legge di Jurin

$$h = \frac{2\tau \cdot \cos \phi}{\rho g r}$$

più in generale, ϕ qualunque

FENOMENI DI SUPERFICIE

Esercizi

4. Determinare l'innalzamento dovuto alla capillarità in un tubo di vetro di diametro $d = 4 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ con un estremo immerso in acqua. Si assuma l'angolo di raccordo sia uguale a zero e che la tensione superficiale dell'acqua sia $\tau = 7.12 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$.

Soluzione: l'altezza raggiunta dall'acqua nel capillare è data dall'espressione $\frac{2\tau}{R} = \rho gh$.

$$h = \frac{2\tau}{\rho g d/2} = \frac{2 \times 7.12 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}}{10^3 \text{ kg/m}^3 \times 9.8 \text{ m/s}^2 \times 0.5 \times 4 \cdot 10^{-5} \text{ m}} = 0.726 \text{ m}.$$

Da questo risultato si capisce come la capillarità ci permetta di spiegare fenomeni come la salita della linfa nelle piante o la salita dei liquidi in sostanze porose.

3. Un ragazzino, soffiando in una soluzione saponata di tensione superficiale $\tau = 25 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$, forma una bolla di sapone di raggio $R = 1.40 \text{ cm}$. Calcolare:

- la differenza di pressione fra interno e l'esterno della bolla;
- il lavoro fatto dal ragazzino per gonfiare la bolla di sapone

Soluzione: a) dalla legge di Laplace la pressione di contrattilità di una bolla è data da

$$p_c = \frac{4\tau}{R} = \frac{4 \cdot 25 \cdot 10^{-3}}{1.4 \cdot 10^{-2}} = 7.16 \text{ Pa}$$

b) Ricordando la definizione di tensione superficiale come $\tau = \frac{E}{\Delta S}$ possiamo ricavare il lavoro

come aumento di energia in seguito all'aumento della superficie della bolla. L'aumento di superficie è dato da (si noti il fattore 2)

$$\Delta S = 2 \times 4\pi (R_2^2 - R_1^2) = 2 \times 4\pi (1.40^2 - 0) \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 49.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

pertanto $L = \tau \Delta S = 25 \cdot 10^{-3} \text{ N/m} \times 49.2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 123 \mu\text{J}$

FENOMENI DI SUPERFICIE

Esercizi

2. Un dischetto di metallo di raggio $r = 1\text{cm}$ e spessore $h = 2\text{mm}$ galleggia sull'acqua contenuta in un bicchiere. Nell'ipotesi che le superfici del dischetto siano perfettamente lisce, determinare la massima densità del dischetto affinché lo stesso possa galleggiare sull'acqua (si assuma la tensione superficiale dell'acqua $\tau = 7.12 \cdot 10^{-2}\text{N/m}$).

Soluzione: la pressione esercitata dal peso del dischetto deformerà la superficie dell'acqua in modo che la stessa eserciti lungo il bordo di contatto tra dischetto e superficie (circonferenza del dischetto), una forza parallela alla superficie e proporzionale alla tensione superficiale $F = 2\pi r\tau$, la cui componente perpendicolare equilibra il peso del dischetto. Nelle condizioni di massimo sforzo la superficie di contatto diventerà perpendicolare per cui la forza F eguaglierà la forza peso $2\pi r\tau = mg = \pi r^2 h \rho g$ dove abbiamo espresso la massa attraverso la densità $m = \rho V = \rho \pi r^2 h$.

La massima densità vale:

$$\rho = \frac{2\tau}{rhg} = \frac{2 \times 7.12 \cdot 10^{-2}\text{N/m}}{10^{-2}\text{m} \times 2 \cdot 10^{-3}\text{m} \times 9.8\text{m/s}^2} = 0.73 \cdot 10^3\text{kg/m}^3.$$

Questo esempio ci permette di capire come, grazie alla tensione superficiale, piccoli oggetti (foglie, fiori, insetti....) possano essere sostenuti sulla superficie di un liquido senza immergersi e come alcuni insetti possano camminare sull'acqua.

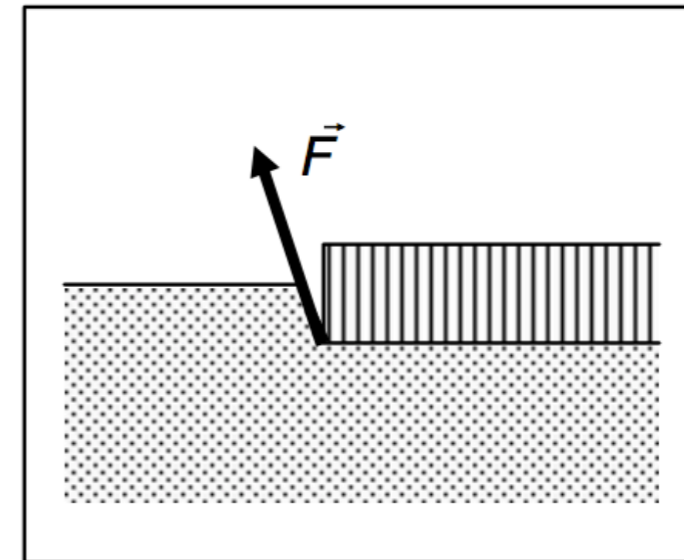


Fig. 30. Problema 2.