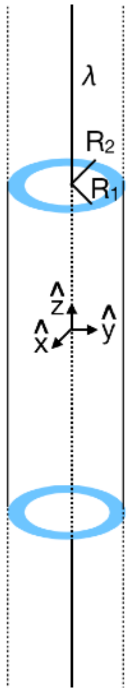
Esonero n.1 - a.a. 2018-2019



Quesito 1

In figura è rappresentato un filo rettilineo di lunghezza infinita su cui è distribuita carica con densità uniforme λ=1μC/m. Un conduttore cilindrico cavo infinitamente lungo con raggio interno R_1=0.5 cm, raggio esterno R_2=0.6 cm e asse coincidente con il filo ha carica elettrica complessiva nulla. Determinare il campo elettrico in ogni punto dello spazio ($R<R_1$, $R_1<R<R_2$ e $R>R_2$) e la distribuzione di carica sulle superfici del conduttore. Si consideri un elettrone alla distanza di 10 cm dall'asse inizialmente fermo. Con quale velocità l'elettrone raggiunge la superficie del conduttore ?

Dalla simmetria cilindrica del sistema di sorgenti: φ = φ(r), dove r è la distanza dall'asse, e quindi $\vec{E} = -\nabla\phi(r) = E(r)\hat{r}$.
Sulla sup. interna $\sigma_1 = \sigma(R_1) = -\lambda/(2\pi R_1) = 31.8\ \mu C/m^2$ (dall'applicazione della legge di Gauss a una sup. cilindrica coassiale con $R_1<r<R_2$).
Sulla sup. esterna $\sigma_2 = \sigma(R_2) = -\sigma_1 R_1/R_2 = \lambda/(2\pi R_2) = 26.5\ \mu C/m^2$ (dalla neutralità del cilindro cavo conduttore). Applicando Gauss a sup. cilindriche con $r < R_1$ e poi $r > R_2$ si ottiene $\vec{E} = \lambda\hat{r}/(2\pi\epsilon_0 r) = 1.8\times10^4(\mathrm{Nm/C})\ \hat{r}/r$ per r(distanza dall'asse) $< R_1$ e $r > R_2$; Il campo è nullo nel conduttore.

L'elettrone inizialmente fermo nel punto P a distanza d ha energia meccanica = energia potenziale $U_{p1} = -|e|\varphi(P) = -|e|\varphi(d)$;
L'energia cinetica finale è

$E_k = U_{p1} - U_{p2} = -|e|\,[\,\varphi(d) - \varphi(R_2)\,] = |e|\int_{R_2}^{d}\vec{E}\cdot dr\hat{r} = |e|\lambda/(2\pi\epsilon_0)\ ln(d/R_2) = 0.716\times10^{-14}$J

In approssimazione non relativistica $E_k = mv^2/2$. Tuttavia applicando questa relazione si trova $v=1.3\times10^8$m/s ~ c, con β=v/c = 0.42.
In realtà, occorrerebbe quindi usare relazioni valide anche nel caso relativistico:
$E_k = E_{tot} - E_{riposo} = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma-1)mc^2$ dove $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$
Quindi $\gamma-1 = U_{p1}-U_{p2}$ => γ = 1.0884 => β = 0.39, quindi la velocità è $v=1.17\times10^8$m/s< del valore stimato in approssimazione non-relativista.

Quesito 2

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial(A_\theta\,\mathrm{sen}\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\mathrm{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

In una regione dello spazio si misura un potenziale elettrostatico che dipende dalla distanza r da un punto (origine del sistema di riferimento) secondo l'espressione seguente:
ϕ(r)= a+br per r≤0.01 m
ϕ(r)= c/r per r>0.01 m
con $a=2\times10^3$V, $b=-10^5$V/m, c=10Vm.
Determinare la distribuzione di carica che lo genera e la forza a cui è soggetta una carica q_0=1pC quando si trova alla distanza di 1mm dall'origine e quando si trova a 20 cm dall'origine.

$\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\epsilon_0$ è la legge di Gauss in forma differenziale; inoltre siccome il campo elettrico è conservativo si ha $-\nabla\phi = \vec{E}$. Combinando le due relazioni si trova l'equazione di Poisson $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ che ha soluzione $\phi(\vec{r}) = k\int\frac{\rho(\vec{r}')\,dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$.
Nei riquadri sono riportate le espressioni di gradiente e divergenza in coordinate sferiche (il nostro potenziale è chiaramente a simmetria sferica).

Si osserva facilmente che ϕ(r) è proporzionale a 1/r, ossia ha un'espressine Coulombiana per r > a=0.01m => la distribuzione di carica a simmetria sferica deve essere contenuta entro una sfera di raggio a.

Dall'equazione di Poisson infatti si trova: $\nabla^2\phi = (1/r^2)\partial_r(r^2\partial_r\phi(r))$ = 2b/r (per r<a) e nullo per r>a, pertanto ρ=-2bε₀/r = -1.77x10^{-6} (C/m^2)/r per r<a. Il campo elettrico è costante all'interno della sfera di raggio a e pari a $\vec{E} = 10^5(\mathrm{V/m})\hat{r}$ e $\vec{E} = 10Vm/r^2$ per r>a.

Quindi la forza sulla carica di 1pC a r=1mm è $\vec{F} = 10^{-7}N\hat{r}$ e $\vec{F} = 0.25\times10^{-9}N\hat{r}$ a r=20cm.

Quesito 3

Si calcoli l'energia elettrostatica associata ad una sfera di raggio R uniformemente carica con densità ρ. La si valuti come energia necessaria a costruire la sfera e come energia associata al campo elettrico prodotto da essa. Si confrontino le due espressioni.

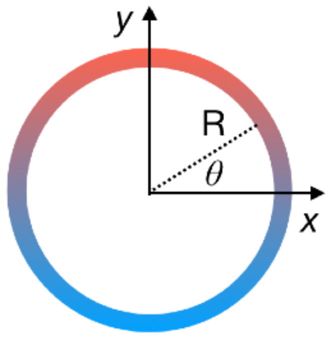
Una sfera uniformemente carica produce il campo elettrico $\vec{E} = \rho\vec{r}/(3\epsilon_0)$ se $r < R$ e $\vec{E} = \rho R^3\hat{r}/(3\epsilon_0 r^2)$ se $r \geq R$. Il corrispondente potenziale elettrostatico ha la forma $\phi = \phi' = \rho R^2/(2\epsilon_0) - \rho r^2/(6\epsilon_0)$ se $r < R$ e $\phi = \phi'' = \rho R^3/(3\epsilon_0 r)$ se $r \geq R$.

L'energia elettrostatica che occorre spendere per costruire il sistema di cariche è

$$E = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})dV = \frac{\rho}{2}\int_0^R \phi'(\vec{r})\ 4\pi r^2\ dr + \frac{\rho}{2}\int_R^{\inf} \phi''(\vec{r})\ 4\pi r^2\ dr.$$

Dal calcolo si ottiene E=4πρ^{2}R^5/(15ε₀). Questa energia spesa per costruire il sistema è immagazzinata nel campo elettrico prodotto dalla distribuzione di cariche in tutto lo spazio.

Infatti lo stesso risultato si ottiene da $E = \dfrac{\epsilon_0}{2}\displaystyle\int |\vec{E}|\ dV$.



Quesito 4

Su un anello sottile di raggio R è distribuita carica con densità variabile. Fissato un sistema di riferimento con origine al centro dell'anello e assi x e y nel piano, la densità di carica può essere espressa come $\lambda = \lambda_0 \sin\theta$ (si faccia riferimento alla figura).

Calcolare il campo elettrico al centro dell'anello e per punti dell'asse x e dell'asse y a grande distanza dall'anello, $L >> R$.

Un tratto elementare di lunghezza *dl* dell'anello che si trova all'angolo θ produce al centro dell'anello, ossia nell'origine, un campo $d\vec{E} = -kdq\hat{r}/R^2 = -k(\lambda dl)\hat{r}/R^2 = -k(\lambda_0\ sin\theta)(Rd\theta)\hat{r}/R^2$. I contributi in direzione x si cancellano, mentre i contributi in direzione y devono essere integrati.

Tenendo conto che $\hat{r} = \cos\theta\hat{x} + \sin\theta\hat{y}$ e che $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\ d\theta = 2\pi/2 = \pi$, si trova

$$\vec{E}(O) = -\frac{k\lambda_0\pi}{R}\hat{y} = -\frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R}\hat{y}.$$

A grandi distanze l'anello può essere trattato come un dipolo $\vec{p} = Q_+\vec{d} = Q_+ 2\vec{r}_+$ dove $\vec{r}_+ = \dfrac{\int_0^\pi \vec{r}(\lambda_0\sin\theta)(Rd\theta)}{Q_+}$ è il baricentro delle cariche positive, mentre la carica totale positiva $Q_+ = \displaystyle\int_0^\pi (\lambda_0\sin\theta)(Rd\theta) = 2\lambda_0 R$. Nel calcolo del baricentro delle cariche positive si può trascurare la componente x perché per simmetria è complessivamente nulla e quindi nell'integrale invece di $\vec{r}$ si può direttamente usare $R\sin\theta\hat{y}$ (la componente y).

Quindi $\vec{r} = (\pi R/4)\hat{y}$ e $\vec{p} = \lambda_0\pi R^2\hat{y}$.

Allora per punti P = (r, 0) con r >>R si ha $\overrightarrow{E} = -k\overrightarrow{p}/r^3 = -k(\lambda_0\pi R^2/r^3)\hat{y} = -\lambda_0 R^2/(4\epsilon_0 r^3)\hat{y}$; per punti P = (0, r) con r >>R si ha $\overrightarrow{E} = 2k\overrightarrow{p}/r^3 = 2k(\lambda_0\pi R^2/r^3)\hat{y} = \lambda_0 R^2/(2\epsilon_0 r^3)\hat{y}$.

Quesito 5

In figura è illustrato un piano infinitamente esteso su cui è distribuita carica con densità uniforme σ. Al centro esiste un piccolo foro di raggio R. Si calcoli il campo elettrico sui punti della retta perpendicolare al piano che passa per il centro del foro.

Il campo elettrico può essere calcolato dalla sovrapposizione del campo prodotto sull'asse da anelli di raggio r > R su cui sia distribuita uniformemente carica con densità λ = σ dr. Ciascun anello di raggio r produce un contributo al campo (esclusivamente lungo l'asse z, perché le componenti parallele al piano da contributi simmetrici rispetto al centro si cancellano):

$$E_z(z;r) = \int dE_z(\phi) = \int_0^{2\pi} \frac{k\lambda \; r d\phi}{r^2+z^2} \;\cos\theta = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\frac{rdr}{(r^2+z^2)^{3/2}}$$

Integrando sul raggio r dell'anello si ha:

$$E_z(z) = \int_R^{\inf} dE_z(z;r) = \int_R^{\inf} \frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\frac{rdr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\Big|_R^{\inf} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

In alternativa si può trattare il problema come la sovrapposizione del campo prodotto da un piano infinito con densità di carica σ ($\overrightarrow{E} = \pm\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}$, sempre uscente dal piano) e un disco di raggio R con densità -σ, problema trattato, esattamente come nella discussione precedente, che ha soluzione $E_z(z) = -\dfrac{(-\sigma)z}{2\epsilon_0}\dfrac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\Big|_0^R = -\dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(\dfrac{z}{|z|} - \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$

NOTA: I vettori sono indicati in **bold-face**

RICORDA:

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ C²/Nm² = $8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

$k = 1/(4\,\pi\,\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ Nm²/C²

$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C

$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg

$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg

$M_{He} \simeq 4\, m_p$

Campo **E** prodotto da una carica puntiforme: $\dfrac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo **E** prodotto da un dipolo: **E**(r,$\boldsymbol{\vartheta}$) = k $\dfrac{3(\overrightarrow{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{p}}{r^5}$;

Campo **B** prodotto da un dipolo magnetico: **B**(r,$\boldsymbol{\vartheta}$) = $\dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3(\overrightarrow{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\boldsymbol{\varphi}$(r,$\boldsymbol{\vartheta}$) = k$\dfrac{\overrightarrow{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\boldsymbol{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$	$(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\mathbf{x}} \quad +$ $(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\mathbf{y}} \quad +$ $(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\mathbf{z}}$	$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{\boldsymbol{\rho}} \quad +$ $(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho})\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad +$ $\frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{r}} \quad +$ $\frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi))\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad +$ $\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
Laplaciano di un vettore $\nabla^2 \mathbf{A}$	$\nabla^2 A_x\hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y\hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_z\hat{\mathbf{z}}$	$(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{\rho}} \quad +$ $(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad +$ $(\nabla^2 A_z)\hat{\boldsymbol{z}}$	$(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{r}} \quad +$ $(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad +$ $(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S} = \quad dydz\hat{\mathbf{x}} +$ $dxdz\hat{\mathbf{y}} +$ $dxdy\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \quad \rho d\phi dz\hat{\boldsymbol{\rho}} +$ $d\rho dz\hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $\rho d\rho d\phi\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \quad r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\mathbf{r}} +$ $r\sin\theta drd\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Volume infinitesimo	$dv = dxdydz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2\sin\theta drd\theta d\phi$