Scritto 14 - a.a. 2018-2019

Quesito 1

1) Si *definisca* la capacità per un sistema generico costituito da due conduttori, indicati con gli indici 1 e 2, che si trovano ai valori di potenziale ϕ1 = 1kV e ϕ2 = 1V e su siano depositate le cariche Q1=10nC e Q2=1nC. E' possibile calcolare la capacità del sistema ?

Il sistema puo' C = ΔQ_{12}/(V1-V2) dove ΔQ12 è la carica che occorre spostare da 1 a 2 per annullare la d.d.P. V1-V2. Non si puo' calcolare la capacità senza conoscere la geometria dei conduttori.

2) Si consideri adesso un condensatore cilindrico di lunghezza L=1m, costituito da un filo metallico sottile, di raggio Ri=50µm, che è sostenuto sull'asse di un guscio cilindro metallico di spessore trascurabile e raggio interno Re=2cm. Si calcoli la carica sul filo metallico se questo si trova a ϕ1 = 1kV mentre il cilindro cavo si trova a ϕ2 = 0V. Quanto vale la capacità del condensatore ? Come varia la capacità del sistema se ϕ1 = 100V ?

Il condensatore si approssima con un sistema cilindrico infinitamente lungo (visto che Ri, Re<< L) e allora applicando Gauss in un punto della cavita' il campo sara' dipendente da e diretto radialmente (nel piano perpendicolare al filo). Applicando Gauss a un cilindrato di raggio Ri<r<Re e chiamata λ_1 la densita' lineare di carica sul filo (di lunghezza L), si trova

$2\pi r h E(r)=\lambda_1 h/\varepsilon_0 \Rightarrow E(r)=\lambda_1/2\pi\varepsilon_0 r=Q_1/2\pi\varepsilon_0 L r$;

quindi $\phi(r)-\phi_1=-\int_{R_i}^{r}\frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h r}=-\frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 h}\ln(r/R_i)$.

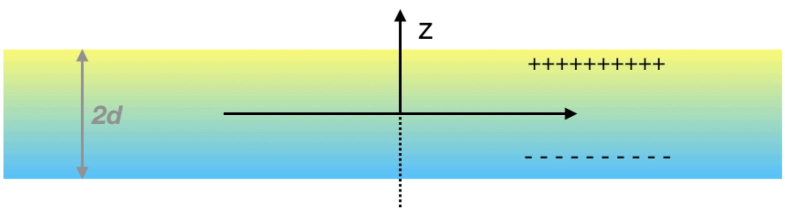
In particolare siccome $\phi(R_e)-\phi_1=\phi_2-\phi_1=-\frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 L}\ln(R_e/R_i)$, la differenza di potenziale tra il conduttore 1 e il 2 si annulla se tutta Q_1 viene spostata dal conduttore interno a quello esterno. Con i dati del problema Q1 = 37nC. Inoltre, per definizione, la capacita' e'

$$C=Q_1/(\phi_1-\phi_2)=\frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_e/R_i)}=2/(9\cdot 10^9\ln(20/0.05))=37pF.$$

Si osserva che C dipende solo dalla geometria del sistema non da ϕ1-ϕ2. Se ϕ1 = 100V, quello che cambia e' Q1=3.7nC, ma il rapporto tra Q1 e ϕ1-ϕ2 rimane invariato.

Quesito 2

Si consideri uno strato planare di materiale isolante di spessore 2d=2cm e area delle facce parallele molto grande. All'interno dello strato è distribuita della carica con densità volumetrica variabile con la profondità z nel mezzo secondo la legge ρ=ρ0(z/d) [lo zero dell'asse z sia sul piano equidistante dalle due facce di grande area dello strato di materiale]. Se ρ0 vale 1µC/m³ si determini il potenziale elettrostatico in ogni punto dello spazio (z<-d, -d<z<d, z>d) e si dimostri che vale l'equazione di Poisson.



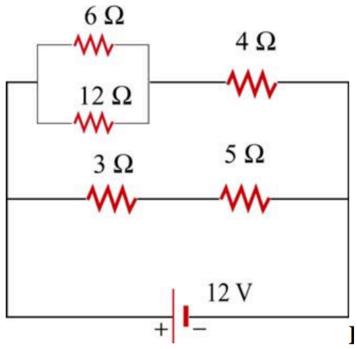
Il sistema puo' essere considerato la combinazione di coppie di tratti superficiali di carica opposta con densita' superficiale σ(z)=ρ(z)dz. Per i punti esterni il campo sara' nullo. Per i punti interni (-d < z < d) il campo, ad ogni z, sara' la somma dei campi relativi alle coppie di strati esterne rispetto al punto ossia $E(z)=\int_z^d\frac{\rho(z)dz}{\epsilon_0}=\int_z^d-\frac{\rho_0 z dz}{\epsilon_0 d}=-(\rho_0/2d\epsilon_0)(d^2-z^2)$.

Se fissiamo a 0 il potenziale a z<-d, per un punto interno allo strato sara'

$$\phi(z)-\phi(-d)=\phi(z)=-\int_{-d}^{z}(\rho_0/2d\epsilon_0)(z^2-d^2)dz=(\rho_0 d/2\epsilon_0)(z+d)-(\rho_0/2d\epsilon_0)(z^3/3-d^3/3)$$

a z=d, il campo vale $\phi(z) = -\rho_0 d^2/\epsilon_0$ e continua ad assumere questo valore per ogni punto a z>d.
L'eq di Poisson $\nabla^2\phi = -\rho(\vec{r})/\epsilon_0$ è verificata, infatti basta derivare due volte rispetto a z làespressione del potenziale per ottenere $\nabla^2\phi = -\rho_0 z/d = -\rho(z)/\epsilon_0$

Quesito 3
Il circuito in figura è in funzionamento da 2 ore. Si calcoli quanta energia è stata dissipata sulla resistenza da 5Ω.
E=3600s x 2 x RI^2 dove R=5Ω e I è la corrente che score nel ramo con le resistenze da 3 e 5 Ω.
$I(3+5) = I_1(4+6\text{x}12/18)=8 \text{ x } I_1$
=> $I = I_1 = I_{tot}/2$ e $I_{tot} = 12V/R_{eq} = 12V / 4\ \Omega = 3$ A
E = 7200 x 5 x 1.5^2 Joule = 81kJ.



Quesito 4
All'interno di un solenoide toroidale, in corrispondenza dei punti al centro di ogni spira il campo magnetico ha un'intensità B_0=0.01T. Si calcoli quanto vale il campo il campo magnetico nei punti interni al toro più vicini e più lontani dal centro del toro, assumendo che le spire abbiamo un raggio R_0 di 5 cm e il toro abbia un raggio R di 1m. Se l'intensità di corrente che circola nelle spire è di 10 A, qual è il numero di spire che costituiscono il toro ? Si calcoli il flusso del campo magnetico concatenato con una spira del toro (si approssimi la forma circolare della spira con un quadrato della stessa area).
Il campo magnetico all' interno di un solenoide toroidale è parallelo a phi-versore. Applicando la legge di Ampere si ha $2\pi r B(r)=\mu_0 Ni$ quindi $2\pi R\, B_0=\mu_0 Ni$ da cui è possibile ricavare $N= 2\pi R\, B_0/\mu_0 i$. Il campo ha la massima intensità a $r=R-R_0$ $B_i=\mu_0 Ni/(2\pi(R-R_0))$ e la minima intensità a $r=R+R_0$ $B_e=\mu_0 Ni/(2\pi(R+R_0))$. Il lato della spira quadrata è $a=sqrt(\pi R_0^2)$ => il flusso del campo magnetico è $\Phi(\vec{B}) = \frac{a\mu_0 iN}{2\pi}\int_{R_0-a/2}^{R_0+a/2} dx\frac{1}{x} = \frac{a\mu_0 iN}{2\pi} ln\left(\frac{R_0+a/2}{R_0-a/2}\right)$

Quesito 5
In una regione dello spazio in cui c'è un campo magnetico uniforme di modulo *B*, un cilindretto di lunghezza *l* e raggio *R* è percorso dalla corrente *i.* Per effetto della forza magnetica esso rotola senza scivolare su due guide parallele di lunghezza *a* contenute in un piano perpendicolare al campo magnetico. Si dimostri che la velocità con cui la barretta raggiunge la fine delle guide è $v = \sqrt{\frac{4ilBa}{3m}}$.

A rod with a mass m and a radius R is mounted on two parallel rails of length a separated by a distance ℓ, as shown in the Figure 8.9.1. The rod carries a current I and rolls without slipping along the rails which are placed in a uniform magnetic field $\vec{\mathbf{B}}$ directed into the page. If the rod is initially at rest, what is its speed as it leaves the rails?

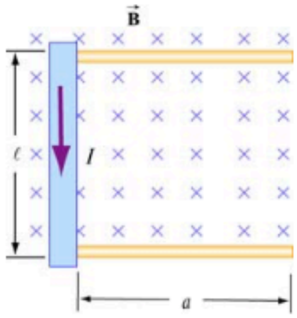
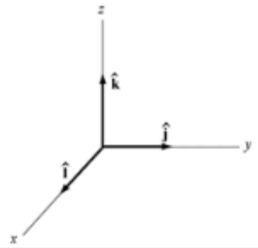


Figure 8.9.1 Rolling rod in uniform magnetic field

Solution:

Using the coordinate system shown on the right, the magnetic force acting on the rod is given by

$$\vec{\mathbf{F}}_B = I\vec{\boldsymbol{\ell}}\times\vec{\mathbf{B}} = I(\ell\,\hat{\mathbf{i}})\times(-B\,\hat{\mathbf{k}}) = I\ell B\,\hat{\mathbf{j}} \qquad (8.9.1)$$



The total work done by the magnetic force on the rod as it moves through the region is

$$W = \int \vec{\mathbf{F}}_B \cdot d\,\vec{\mathbf{s}} = F_B a = (I\ell B)a \qquad (8.9.2)$$

By the work-energy theorem, W must be equal to the change in kinetic energy:

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (8.9.3)$$

where both translation and rolling are involved. Since the moment of inertia of the rod is given by $I = mR^2/2$, and the condition of rolling with slipping implies $\omega = v/R$, we have

$$I\ell Ba = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mR^2}{2}\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mv^2 \qquad (8.9.4)$$