Scritto 16 - a.a. 2018-2019

Quesito 1

Si consideri una sfera di raggio $r_0 = 1\ \mathrm{mm}$ in cui è distribuita della carica con densità volumetrica $\rho(r) = \rho_0\ e^{-r/r_0}$ dove $\rho_0 = 2.5 \times 10^{13}\ \mathrm{C/m^3}$. Si calcoli:

1) il rapporto tra il modulo $|\overrightarrow{F_P}|$ della forza che agisce su una carica di prova $q_0 = 1\ \mathrm{C}$ quando essa si trova nel punto P, che dista $5r_0$dal centro della sfera, e $|\overrightarrow{F_Q}|$, modulo della forza che agisce sulla stessa carica collocata nel punto Q, che invece dista $15r_0$ dal centro della sfera;
2) il rapporto tra l'energia potenziale posseduta dalla carica di prova nel punto P e nel punto Q ($U_e(P)/U_e(Q)$);
3) modulo direzione e verso del campo elettrico nel punto di coordinate cartesiane $(5r_0,0,0)$ relative a un sistema di riferimento con origine al centro della distribuzione di carica.

Il sistema ha simmetria sferica, quindi il potenziale elettrostatico dipende solo da r e ha superfici equi potenziali sferiche; il campo elettrico $\vec{E}(r) = E(r)\hat{r}$ puo' essere determinato usando la legge di Gauss. La forza $\vec{F}(P)$ e' pari a $\vec{F}(P) = q_0\vec{E}(P)$ [analogamente per Q e ogni punto dello spazio]. Nei punti esterni alla sfera, il campo elettrico sara' uguale a quello prodotto da una carica puntiforme pari a $Q_0 = \int_{V(sfera)} dV\ \rho = \int_0^{r_0} \rho_0 e^{-r/r_0}\ 4\pi r^2\ dr$. Dal momento che

$$\int r^2 e^{-r/r_0}\ dr = -\left(r_0 r^2 + 2r r_0^2 + 2r_0^3\right)\ e^{-r/r_0}$$

si trova $Q_0 = 20\pi\rho_0 r_0^3(1 - 1/e) \simeq 10^{-12}\mathrm{C} = 1\mathrm{pC}$.

$|\overrightarrow{F_P}|/|\overrightarrow{F_Q}| = \dfrac{kQ_0/5^2r_0^2}{kQ_0/15^2r_0^2} = 9$. Invece $U_e(P)/U_e(Q) = q_0V(P)/q_0V(Q) = \dfrac{kQ_0/5r_0}{kQ_0/15r_0} = 3$.

Il campo nel punto $(5r_0,0,0)$, ha modulo $kQ_0/5r_0 = 9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-12}/(5 \cdot 10^{-3})$.

Quindi $\vec{E} = \dfrac{9}{5}\ \mathrm{V/m}\ \hat{x}$.

Quesito 2

Ci consideri una spira conduttrice circolare di raggio R=0.1m che giace nel piano xy percorsa da una corrente $i = 1\ \mathrm{A}$. Si valuti la forza e il momento torcente su due essa, nelle due condizioni seguenti (si utilizzi l'equivalenza tra una spira percorsa da corrente e un dipolo magnetico):

1) in campo magnetico uniforme $\vec{B} = B_0\hat{z}$;
2) in campo magnetico uniforme $\vec{B} = B_1\hat{x} + B_0\hat{z}$.

Si calcoli in entrambi i casi il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito. Siano $B_0 = 1\ \mathrm{T}$ e $B_1 = 0.1\ \mathrm{T}$.

Quesito per gli studenti con il corso da 9 crediti o a.a. precedente a 2018-19: Nel caso del campo magnetico 1) si immagini che al tempo t=0 l'intensità del campo cominci a decrescere (linearmente) fino ad annullarsi dopo 10s. Si descrivano i fenomeni fisici che si manifestano.

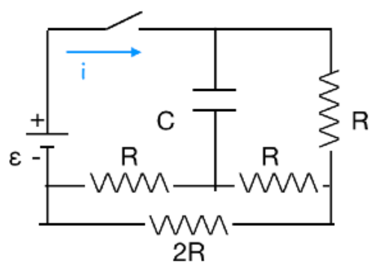
Alla spira e' associato un momento di dipolo magnetico $\vec{m} = i\pi R^2\hat{z}$. La forza sara' data dalla legge di Laplace: su ogni tratto elementare $d\vec{F} = id\vec{l} \wedge \vec{B}$; visto che il campo e' uniforme e che ad ogni tratto della spira corrisponde uno orientato in verso opposto (corrispondente all'archetto simmetrico rispetto al centro), la forza risultante totale e' nulla. Il momento torcente e' $\vec{\tau} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ che e' pari a zero nel caso 1) perche' campo e momento di dipolo sono paralleli. Nel caso 2) $\vec{\tau} = m\hat{z} \wedge B_1\hat{x} = i\pi R^2 B_1\ \hat{y} = 3.14 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{Nm}$. Il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito e' $\Phi_\gamma(\vec{B}) = \pi R^2 B_0 = 3.14 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{Weber}$ in entrambi i casi.

Quesito per gli studenti con il corso da 9 crediti o a.a. precedente a 2018-19: il modulo del campo decresce come 0.1~T/s, pertanto il flusso del campo concatenato con il circuito varia come $-3.14 \cdot 10^{-3}$ Weber/s. Per la legge di Faraday Neumann, nella spira e' indotta una corrente indotta costante pari a $3.14 \cdot 10^{-3}$ Weber/s. SI tratta di una corrente che si somma a quella inizialmente circolante nella spira. Infatti cio' produce un campo magnetico B addizionale parallelo a quello esterno, che sta decrescendo, con l'effetto di diminuire la variazione di flusso causata dal campo esterno. Quando il campo magnetico si azzera e rimane tale la corrente torna al valore iniziale.

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$
Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$	$(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\mathbf{x}} \quad +$ $(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\mathbf{y}} \quad +$ $(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\mathbf{z}}$	$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{\boldsymbol{\rho}} \quad +$ $(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho})\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad +$ $\frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi})\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\hat{\mathbf{r}} \quad +$ $\frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi))\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad +$ $\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
Laplaciano di un vettore $\nabla^2\mathbf{A}$	$\nabla^2 A_x\hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y\hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_z\hat{\mathbf{z}}$	$(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\rho}} \quad +$ $(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad +$ $(\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$	$(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{r}} \quad +$ $(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad +$ $(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S} = \quad dydz\hat{\mathbf{x}}+$ $dxdz\hat{\mathbf{y}}+$ $dxdy\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \quad \rho d\phi dz\hat{\boldsymbol{\rho}}+$ $d\rho dz\hat{\boldsymbol{\phi}}+$ $\rho d\rho d\phi\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \quad r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\mathbf{r}}+$ $r\sin\theta dr d\phi\hat{\boldsymbol{\theta}}+$ $r dr d\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Volume infinitesimo	$dv = dxdydz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$

Quesito 3

Nel circuito in figura comincia a circolare corrente al tempo t=0 quando l'interruttore è chiuso (si assuma che il condensatore sia inizialmente scarico). Si calcoli la carica asintotica sulle armature del condensatore e l'andamento nel tempo della corrente nel circuito di scarica che si ottiene riaprendo l'interruttore.
Si utilizzino i valori seguenti dei parametri del circuito:
$\epsilon = 4$ V, $R = 100$ Ω, $C = 1$ pF.

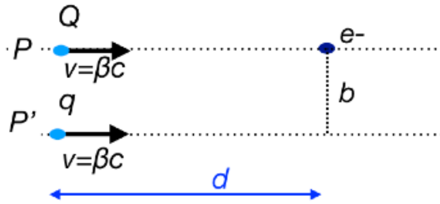


Se il circuito e' chiuso da molto tempo, il condensatore si comporta come un ramo aperto (nel ramo del condensatore non scorre corrente). Il circuito pertanto e' equivalente a un generatore collegato alla resistenza equivalente dei 4 resistori, che vale 2R. Quindi la corrente i=ε/2R = 20mA scorre nel ramo del generatore e del resistore a destra (in verticale in figura). Poi essa si ripartisce in parti uguali nei due rami con il resistore di valore 2R e la serie dei due resistori di valore R. Quindi la differenza di potenziale ai capi del condensatore e' uguale a Ri + Ri/2 = 3ε/4. Quando l'interruttore e' aperto la differenza di potenziale ai capi del condensatore si porta asintoticamente a zero con costante di tempo ReqC

= 0.175 ns (scarica di un condensatore sulla resistenza equivalente Req=7R/4, che e' la serie di R e R' dove R' e' il parallelo di R e 3R).

Quesito 4

Un elettrone atomico (che approssimiamo come una carica puntiforme fissa nello spazio) sente l'attrazione esercitata da due cariche (unitarie positive) Q e q in moto rettilineo uniforme nella stessa direzione e verso, con modulo della velocità relativistica v~c. Facendo riferimento alla figura, si calcoli la forza esercitata da ciascuna carica quando esse si trovano nei punti P e P'.



$$\vec{F}_Q(P) = \frac{kQ|e|(1-\beta^2)}{d^2}\hat{x}$$

$$\vec{F}_q(P') = \frac{kq|e|(1-\beta^2)}{(d^2+b^2)^{3/2}(1-\beta^2\frac{b^2}{b^2+d^2})^{3/2}}(d\hat{x}+b\hat{y})$$

Quesito 5

Il campo magnetico sull'asse di un solenoide di lunghezza L, raggio R e densità lineare di spire n è diretto lungo l'asse del solenoide e il suo modulo dipende dalla distanza x dal centro del solenoide come segue: $\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 in}{2}(\frac{L+2x}{\sqrt{(L+2x)^2+4R^2}} + \frac{L-2x}{\sqrt{(L-2x)^2+4R^2}})\hat{x}$.

Si dimostri che nell'approssimazione di L infinita il campo magnetico è pari a $\vec{B} = \mu_0 in\hat{x}$ in ogni punto dello spazio interno al solenoide, mentre è nullo all'esterno.

$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 in}{2}(\frac{L+2x}{\sqrt{(L+2x)^2+4R^2}} + \frac{L-2x}{\sqrt{(L-2x)^2+4R^2}})\hat{x}$ nel limite per L->infinito diventa $\vec{B}(x) = \mu_0 in\ \hat{x}$, constante sull'asse. Inoltre, usando un circuito rettangolare con un lato sull'asse x e quello parallelo a distanza r dall'asse con r<R, si ottiene che, la circuitazione di B = 0 per la legge di Ampere, visto che non ci sono correnti concatenate. Cio' significa che per ogni r<R, $\vec{B}(r) = \vec{B}(r=0) = \mu_0 in\ \hat{x}$ (si osservi che abbiamo usato il fatto che il campo B e' diretto come x in ogni punto, infatti $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$ e $\vec{A} \sim \hat{\phi}$, quindi B si avvolge attorno tutte le spire => B e' diretto come l'asse del solenoide). All'esterno il campo magnetico e' nullo. Per dimostrarlo si usa una spira rettangolare con un lato di lunghezza d sull'asse e quello parallelo al raggio r>R. La circuitazione di B ha un contributo sull'asse uguale a B(r=0)d=$\mu_0 ind$ e sul lato esterno -B(r)d. Tuttavia la corrente concatenata e' uguale a quello di tutte el spire che attraversano la superficie piana che ha come bordo la spira cioe' nid. Quindi B® deve necessariamente essere uguale a zero per la legge di Ampere.

RICORDA:

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ C²/Nm² = $8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ Nm²/C²

$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C

$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg

$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg

$M_{He} \simeq 4\ m_p$

Campo $\vec{E}$ prodotto da una carica puntiforme in quiete: $\frac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\overrightarrow{E}$ prodotto da una carica puntiforme in moto con velocità $\overrightarrow{v}$: $\dfrac{kq}{r^2}\dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\hat{r}$

Campo $\overrightarrow{E}$ prodotto da un dipolo: $\overrightarrow{E}(r,\boldsymbol{\vartheta}) = k\,\dfrac{3(\overrightarrow{p}\cdot\vec{r})\vec{r}-r^2\overrightarrow{p}}{r^5}$;

Campo $\overrightarrow{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\overrightarrow{B}(r,\boldsymbol{\vartheta}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3(\overrightarrow{m}\cdot\vec{r})\vec{r}-r^2\overrightarrow{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\boldsymbol{\varphi}(r,\boldsymbol{\vartheta}) = k\dfrac{\overrightarrow{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$