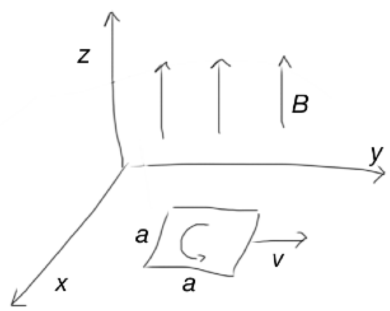
Scritto 17 - a.a. 2018-2019

Quesito 1
Un rivelatore di particelle è costituito da un tubo cilindrico della lunghezza di 50 cm, con una sottile parete metallica del raggio interno di 3 cm e basi in materiale isolante, riempito di un opportuna miscela di gas. Sull'asse del cilindro e' collocato un filo metallico del diametro di 50 µm teso tra il centro delle due pareti di base. Il filo si trova a un potenziale elettrostatico di 1500 V rispetto alla parete esterna che e' a potenziale nullo.
Nell'ipotesi che la spazio riempito di gas possa essere considerato vuoto, si determini:
1) il valore del campo elettrico in prossimita' del filo anodico e delle pareti catodiche;
2) l'intensita' della forza media a cui e' soggetto un elettrone all'interno del rivelatore;
3) l'energia immagazzinata nel sistema.
4) la capacita' del condensatore cilindrico rappresentato dai due conduttori.

Il cilindro con filo sull'asse rappresenta un condensatore. Nello spazio tra i due conduttori il campo elettrico sara' radiale uscente (cioe' diretto come il versore r di un distema di coordinate cilindriche con origine a meta' della lunghezza del filo e asse z coincidente con l'asse del filo). Radiale per simmetria clinica del sistema, uscente perche' una carica di prova positiva si sposta verso regioni a potenziale piu' basso, quindi in questo caso dal filo verso la parete esterna.
Sulla superficie del filo sara' distribuita uniformemente un carica complessiva uguale e opposta a quella distribuita sulla superficie interna della parete metallica. Le densità superficiali sono percio' legate dalla relazione: $Q_i = 2\pi r_i \sigma_i L = 2\pi r_e \sigma_e = Q_e$. In un punto interno al tubo il campo elettrico e' determinato esclusivamente dalla carica elettrica distribuita sul filo e dipende (per simmetria) solo dalla distanza r dall'asse. Applicando Gauss a una superficie cilindrica coassiale al sistema e di raggio r con $r_i < r < r_e$. si trova $2\pi rh\ E(r) = \sigma_i\ 2\pi r_i h/\epsilon_0$ e pertanto $\overrightarrow{E}(r) = \sigma_i r_i/(\epsilon_0 r)\ \hat{r} = 4\pi k \sigma_i r_i\ \hat{r}/r$ e la differenza di potenziale tra parte catodica e filo anodico e' $\Delta V = \phi(r_i) - \phi(r_e) = \dfrac{\sigma_i r_i}{\epsilon_0}\displaystyle\int_{r_i}^{r_e} \frac{\hat{r}}{r}\cdot dr\hat{r} = 4\pi k \sigma_i r_i \ln\frac{r_e}{r_i}$
quindi $4\pi k \sigma_i = 1500\ V/(25\cdot 10^{-6}\ m)\ \ln(15/0.025) = 9.3\cdot 10^6\ \mathrm{V/m}$
Il campo elettrico in prossimita' del filo anodo e' quindi:
1) $\overrightarrow{E}(r \to r_i) = 9.3\ \mathrm{MV/m}\ \hat{r}$
2) $\overrightarrow{E}(r \to r_e) = 9.3\ \mathrm{MV/m}\ (r_i/r_e)\ \hat{r}$ = 15.5 kV/m $\hat{r}$
3) $\dfrac{1}{\pi r_e^2}\displaystyle\int_{r_i}^{r_e} 2\pi\ r dr E(r) = 2k r_i \sigma_i (r_e - r_i)/r_e \simeq (1/2)\,|\overrightarrow{E}(r \to r_i)|$
4) $\dfrac{\epsilon_0}{2}\displaystyle\int_{r_i}^{r_e} 2\pi\ L r dr E^2(r) = \pi\epsilon_0 L \int_{r_i}^{r_e} (\sigma_i r_i/\epsilon_0)^2 dr/r = 1/(4\pi\epsilon_0 L)(2\pi r_i L \sigma_i)^2 \ln(r_e/r_i) = \dfrac{Q^2}{2(2\pi\epsilon_0 L/\ln(r_e/r_i))}$ = (1/2)Q^2/C = (1/2) Q V = (1/2) CV^2 = 4.8x10^{-12} J, infatti
5) C = carica che occorre spostare dal conduttore 1 (interno) al 2 (esterno) per annullare la differenza di potenziale ΔV = ϕ(1)-ϕ(2) diviso per ΔV. Pertanto, la capacita' del condensatore cilindrico e' $C = 2\pi r_i L \sigma_i/\Delta V = L/(2k\ln(r_e/r_i)) = 2\pi\epsilon_0 L/\ln(r_e/r_i)$ = 0.5 / (2 x 9x 10^9 ln(600)) = 4.3 pF

Quesito 2



Un circuito di forma quadrata di lato *a* e resistenza totale *R* e' alimentato da una batteria che produce una d.d.p. *V*. Il circuito e' contenuto nel piano *xy* e all'istante di tempo *t=0* riceve un impulso che lo mette in moto con velocita' iniziale *v* in direzione *y*.
1) Si calcoli quanta energia e' dissipata in un'ora, per *V*=5V, R=1kΩ.
2) Se la spira e' immersa in un campo magnetico uniforme *B*

parallelo all'asse z, come prosegue il suo moto in assenza di attrito ?

I lati della spira sono soggetti a una forza dovuta ai contributo elementari $d\vec{F} = id\vec{l} \wedge B\hat{z}$ dove i = V/R. Se la corrente circola cosi' come indicato in figura, il lato parallelo all'asse x e piu' vicino all'asse x e' soggetto a una forza $\vec{F}_y = ia\hat{x} \wedge B\hat{z} = -iaB\hat{y}$ mentre il lato ad esso parallelo e' soggetto alla forza $\vec{F}_{y+a} = -ia\hat{x} \wedge B\hat{z} = iaB\hat{y}$. Analogamente accade per gli altri due lati. Quindi la forza totale sulla spira e' nulla e il suo moto traslatorio rimane inalterato.

3) ***Quesito per gli studenti con il corso da 9 crediti o a.a. precedente a 2018-19:***
Si immagini che il campo magnetico si annulli per y>L. Si calcoli la forza sulla spira tra il tempo t1 in cui un lato della spira esce dalla regione con campo magnetico e il tempo t2 in cui tutta la spira e' fuori dal campo magnetico.

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$	$(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\mathbf{x}} +$ $(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\mathbf{y}} +$ $(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\mathbf{z}}$	$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{\boldsymbol{\rho}} +$ $(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho})\hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $\frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi})\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\hat{\mathbf{r}} +$ $\frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi))\hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
Laplaciano di un vettore $\nabla^2\mathbf{A}$	$\nabla^2 A_x\hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y\hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_z\hat{\mathbf{z}}$	$(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\rho}} +$ $(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $(\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$	$(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})\hat{\mathbf{r}} +$ $(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S} = dydz\hat{\mathbf{x}} +$ $dxdz\hat{\mathbf{y}} +$ $dxdy\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz\hat{\boldsymbol{\rho}} +$ $d\rho dz\hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $\rho d\rho d\phi\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\mathbf{r}} +$ $r\sin\theta dr d\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Volume infinitesimo	$dv = dxdydz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$

Tra t1 e t2 la sul lato della spira parallelo all'asse x ancora immerso nel campo magnetico non e' compensata quindi c'e' una forza non nulla diretta come -y che rallenta la spira. Questa forza tuttavia non e' costante perche' man mano che la spira esce dal campo magnetico il flusso del campo magnetico concatenato con la spira varia $\Phi(\vec{B}) = B\hat{z} \cdot a(a - y(t) + L)\hat{z}$ fino ad annullare quando il lato che si trova a y maggiore raggiunge y=L+a. Allora nella spira si genera una forza elettromotrice indotta $\epsilon = -\dfrac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = Bav(t)$ e quindi la corrente totale nella spira e' $i_{tot} = V/R + Bav(t)/R$.

Pertanto la forza sulla spira e' $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}(t)}{dt} = -i_{tot}Ba\hat{y} = -(V/R + Bav(t)/R)Ba\hat{y}$, quindi la velocita' della spira decresce esponenzialmente secondo l'equazione

$$\frac{dv(t)}{V + Bav(t)} = -(Ba/R)dt.$$

$\frac{1}{Ba} \ln \frac{V + Bav(t)}{V + Bav(t_1)} = -\frac{Ba(t - t_1)}{R}$ e quindi $v(t) = (V/(Ba) + v)e^{-\frac{B^2a^2(t-t_1)}{R}} - V/(Ba)$.

La forza e' quindi $\overrightarrow{F} = -(Bav/R)e^{-\frac{B^2a^2(t-t_1)}{R}}\hat{y}$

Quesito 3
Si considerino due fili rettilinei paralleli separati dalla distanza *d* percorsi da corrente *i* uguale e opposta. Si discuta come dipende la forza per unita' di lunghezza su ciascun filo dall'intensita' di corrente *i* e dalla distanza *d*. Inoltre chiamato xy il piano perpendicolare ai due fili si calcoli il campo magnetico sui punti della retta del piano equidistanti dai due fili.

Quesito 4
Un dipolo elettrico $\overrightarrow{p} = qd\hat{z}$ (con q=|e| e d=1mm) e' collocato nell'origine di un sistema di coordinate. Si calcoli

1) la forza su una carica elettrica q' collocata nel punto di coordinate (1m,0,1m) e l'energia potenziale della carica;
2) la forza e il momento torcente su un dipolo elettrico $\overrightarrow{p'} = qd\hat{x}$ collocato nella stessa posizione; si valuti l'energia potenziale del dipolo.

Quesito 5
Si discuta un esempio a piacere in cui la legge di Ampere puo' essere applicata per calcolare il campo magnetico prodotto da una distribuzione di correnti stazionaria.

RICORDA:
$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$
$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg
$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg
$M_{He} \simeq 4\ m_p$

Campo $\overrightarrow{E}$ prodotto da una carica puntiforme in quiete: $\frac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\overrightarrow{E}$ prodotto da una carica puntiforme in moto con velocità $\overrightarrow{v}$: $\frac{kq}{r^2}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\hat{r}$

Campo $\overrightarrow{E}$ prodotto da un dipolo: $\overrightarrow{E}(r,\vartheta) = k\,\frac{3(\overrightarrow{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{p}}{r^5}$;

Campo $\overrightarrow{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\overrightarrow{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\overrightarrow{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\overrightarrow{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$