Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 22 - a.a. 2019-2020

Quesito 1 (fino a 8 punti)

Si consideri il circuito in figura 1, schema 2 (a destra). Immaginando che il circuito sia in funzione da molto tempo si valuti l'energia immagazzinata nel condensatore C1.
Suggerimento: il comportamento del circuito a destra, asintoticamente puo' essere schematizzato come il circuito dello schema 1 (a sinistra). Qual e' la differenza di potenziale V_A-V_B ?
Si utilizzino i dati seguenti: R1=R6=50 Ω, R2=100Ω, R3=R4=30Ω, R5=40Ω, C0=C1=10 nF. La f.e.m. del generatore sia pari a 10 V.
Il circuito in figura 1(destra) a regime i rami con i condensatori si comportano come rami aperti, ossia la corrente e' nulla nel ramo. Quindi in particolare tra il punto A e il punto B non scorre corrente. Percio' la rappresentazione a sinistra rispecchia il comportamento asintotico del circuito. Nel circuito a sinistra abbiamo le resistenze 3,4 e 5 in serie => la loro res. equivalente R345 vale 100Ω ed essa e' in parallelo con R2; la res. equivalente R2-5 vale 50Ω. Infine R1, R2-5 e R6 sono in serie => la corrente che scorre in R1, R6 e nel ramo del generatore e' Ig = 10V/150Ω = 2/30 A. Considerando la maglia con le resistenze 2,3,4 e 5, Questa corrente entra nel nodo in alto e si ripartisce tra i due rami (quello con R2 e quello con le altre 3 resistenze in serie). Dal momento che R2 = R3+R4+R5, la corrente Ig di divide in parti uguali tra i due rami => La caduta di potenziale ai capi di R5, per la legge di Ohm, vale V5 = (Ig/2)xR5 = (4/3)V. La differenza di potenziale ai capi di R6 e' V6=Ig x R6 = (10/3) V => Va-Vb = V5+V6 = (14/3)V. Questo significa che Q1, la carica sulle armature del condensatore 1 e' Q1 = (Va-Vb)xC1 = (140/3) nC e l'energia immagazzinata nel condensatore e' U=0.5xQ1x(Va-Vb) = 0.5xC1x(Va-Vb)^2 = 0.5x Q1^2/C1 = 109 nJ ~ 1.1 x 10^{-7} J.

Quesito 2 (fino a 10 punti)

Una certa quantita' di carica elettrica Q_0 e' distribuita in una sfera di raggio R_0 con densita' variabile linearmente con la distanza r dal centro ($\rho(r)=\rho_0\, r/R_0$). Questa distribuzione si trova al centro di una sfera conduttrice cava neutra di raggio interno $R_1>R_0$ e raggio esterno R2.
Si calcoli la differenza di potenziale tra un punto a $r=R_0$ e il conduttore.
Si calcoli inoltre il campo elettrico immediatamente all'esterno del conduttore e a $r=R_0/2$.
Si assume R_0=1cm, R_1=5 cm, R_2=10 cm e Q_0=1nC.
Q0 e' l'integrale della densita' ρ sulla sfera di raggio R0 =>
$Q_0 = \int_0^{R_0} \rho_0(r/R_0)\ 4\pi r^2\ dr = \pi\rho_0 R_0^3$, dove il volume infinitesimo dello guscio sferico compreso tra la sfera di raggio r e quella di raggio r+dr e' stato espresso con $4\pi r^2 dr$. Quindi di ricava $\rho_0 = 0.32 \times 10^{-3}$ C/m^3.
Nello spazio tra R0 e R1 siamo fuori da una distribuzione a simmetria sferica di carica e all'interno di una cavita' in un conduttore. Quest'ultima produce un campo nullo e la distribuzione interna produce un campo coulombiano relativa alla carica totale Q0 concentrata nel centro di simmetria.
Quindi il campo vale $\vec{E} = kQ_0\hat{r}/r^2$, per $\mathrm{R}_0 < \mathrm{r} < \mathrm{R}_1$. La differenza di potenziale tra il conduttore (r=R1) e un punto sulla superficie esterna della sferetta carica e'

$$\phi(R_1) - \phi(R_0) = -\int_{R_0}^{R_1} (kQ_0/r^2)\ \hat{r}\cdot dr\hat{r} = kQ_0(1/R_1 - 1/R_0) = 9x10^9x10^{-9}(1/0.05 - 1/0.01) = -720V.$$

Sul conduttore, complessivamente neutro, sara' indotta una carica -Q0 sulla superficie interna (distribuita uniformemente a causa della simmetria sferica) e analogamente sulla superficie esterna ci sarà una carica complessiva Q0 distribuita con densita' uniforme
$\sigma_{ext} = Q_0/(4\pi R_2^2) = k\epsilon_0 Q_0/R_2^2$. Il campo subito all'eterno del conduttore e' quindi normale alla superficie e di modulo (per il teorema di Coulomb) $\sigma_{ext}/\epsilon_0 = kQ_0/R_2^2 = 900\ \mathrm{V/m}$. Si puo' osservare che l'espressione coincide con quella del campo colombiano dovuto alla carica complessiva del sistema (Q0) collocata nel centro di simmetria.
A r=R0/2 ci troviamo all'interno della distribuzione di carica interna. Il sistema e' a simmetria sferica, quindi possiamo applicare la legge di Gauss per calcolare il campo sfruttando il fatto che $\vec{E} = E(r)\ \hat{r}$. Quindi definiamo una superficie gaussiana Σ che sia la sfera di raggio R0/2 con

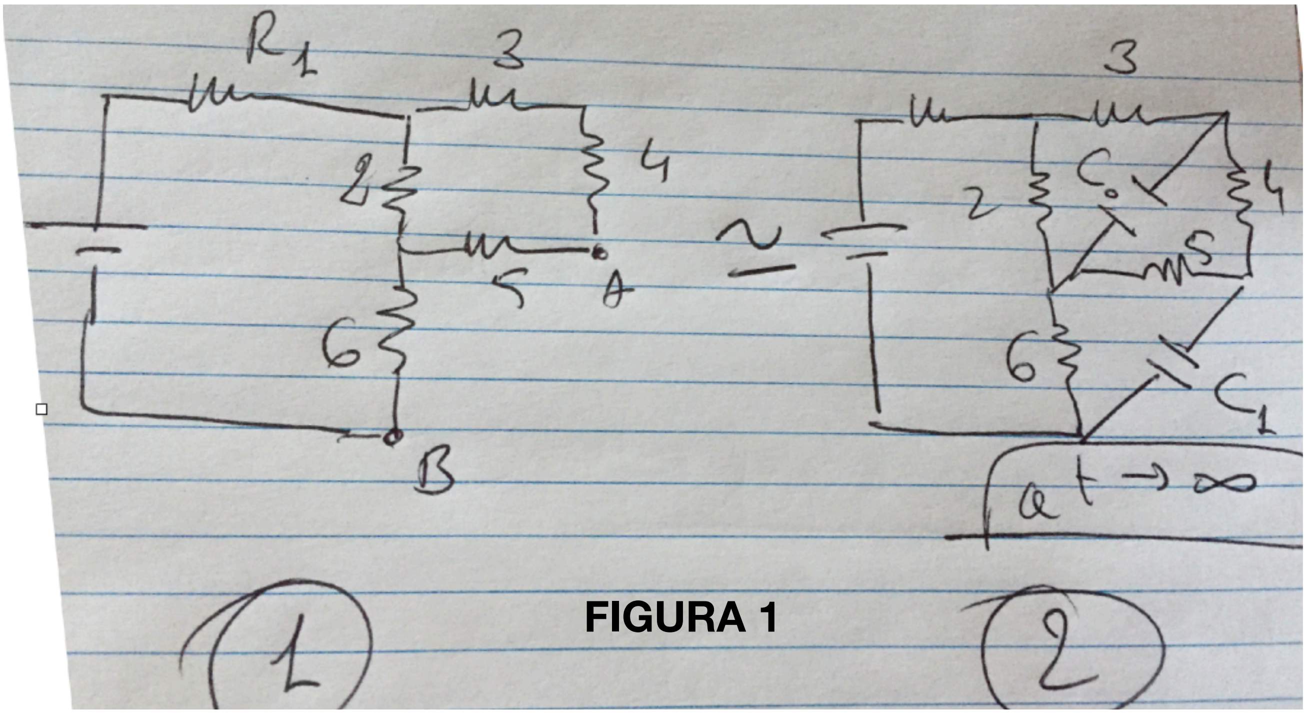

FIGURA 1

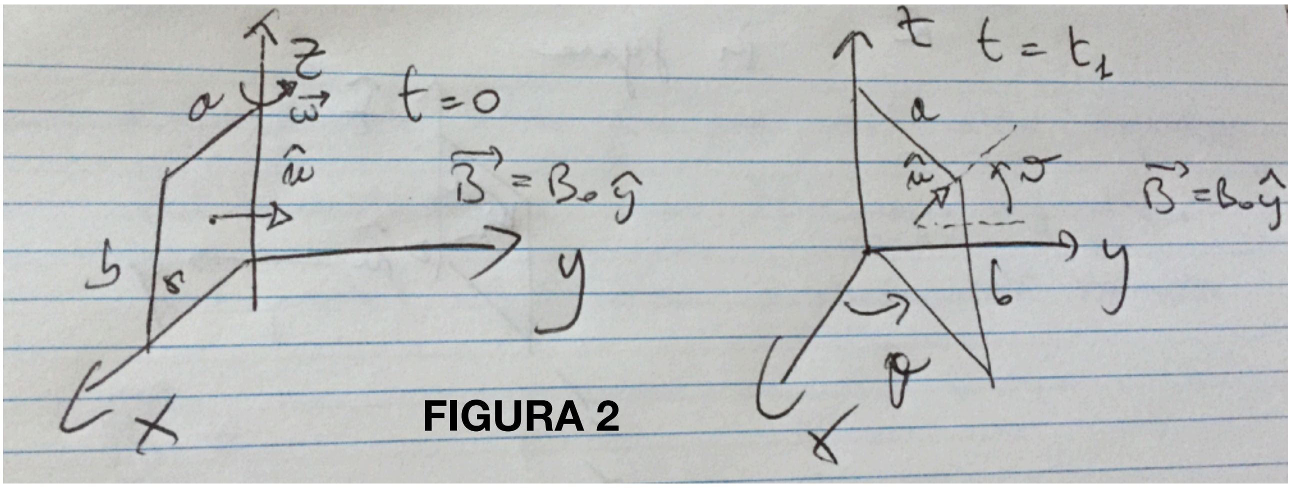

FIGURA 2

centro nel centro di simmetria del sistema e applichiamo la legge di Gauss:

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \int_\Sigma E(r)\hat{r}\cdot d\vec{s} = \int_\Sigma E(r)\hat{r}\cdot ds\hat{r} = E(R_0/2)\ 4\pi(R_0/2)^2$$

D'altra parte $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = Q(in\ \Sigma)/\epsilon_0 = \dfrac{1}{\epsilon_0}\displaystyle\int_0^{R_0/2} \rho_0(r/R_0)\ 4\pi r^2\ dr = \dfrac{1}{\epsilon_0}\pi\rho_0(R_0/2)^3 = \dfrac{Q_0}{8\epsilon_0}.$

Quindi il campo elettrico vale

$$\vec{E}(R_0/2) = \frac{Q_0}{8\epsilon_0}\frac{1}{4\pi(R_0/2)^2}\ \hat{r} = \frac{Q_0/2}{4\pi\epsilon_0\ R_0^2}\ \hat{r} = 9\ 10^9\ 0.5\ 10^{-9}/10^{-4}\ \hat{r} = 45\ \mathrm{kV/m}\ \hat{r}$$

Quesito 3 (fino a 10 punti)

Un cavo conduttore anisotropo di forma cilindrica, sezione circolare di raggio R_0=2cm e lunghezza L>>R_0, e' percorso da una densita' di corrente distribuita come $\vec{J}(r) = J_0\ (R_0/r)\ \hat{z}$ dove r rappresenta la distanza dall'asse. Sapendo che la corrente che attraversa la sezione del cavo e' I=10 kA si calcoli:

1) la forza su un tratto di lunghezza pari a 1cm di un filo conduttore rettilineo, parallelo al cavo e distante 10 cm dall'asse del cavo, che sia percorso dalla corrente i_0= 1 A in direzione parallela alla densita' di corrente J;
2) Il campo magnetico in un punto distante 1 cm dall'asse del cilindro, trascurando l'effetto del filo conduttore.
3) Il potenziale vettore il tutti i punti dello spazio, trascurando l'effetto del filo conduttore.

Se la corrente e' 10kA allora J_0 puo' essere ottenuto da

$$I_0 = \int_\Sigma \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_0^{R_0} J_0(R_0/r)\hat{z} \cdot 2\pi r dr \hat{z} = J_0\ 2\pi R_0^2$$

Quindi $J_0 = I_0/(2\pi R_0^2) = 10^4/(2\pi\ 4\ 10^{-4}) \sim 4 \times 10^7\ \mathrm{A/m^2}$

Il campo B all'esterno della distribuzione e' analogo a quello di Biot Savard, prodotto da un filo di spessore trascurabile percorso da corrente pari a I.
Quindi sui punti del filo conduttore il campo e'

$$\vec{B}(r = 0.1\ \mathrm{m}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi\ r}\hat{\phi} = 4\pi\ 10^{-7}\ 10^4/(2\pi 0.1) = 0.02\ \mathrm{T}\ \hat{\phi}.$$

La forza su un centimetro di filo conduttore e' data da (usando la formula di Laplace)

$\vec{F} = \int_z^{z+1cm} i_0 dz \hat{z} \wedge B(r = 1cm)\hat{\phi} = -2 \times 10^{-4}\ \mathrm{N}\ \hat{\rho}$ si tratta di una forza attrattiva.

Il campo magnetico all'interno della distribuzione di corrente puo' essere calcolato con la legge di Ampere, applicata ad una circonferenza γ di raggio r=1cm coassiale con la distribuzione.

$\int_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{c\gamma}$ dove $i_{c\gamma} = \int_{\Sigma_\gamma} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_0^{R_0/2} J_0(R_0/r)\hat{z} \cdot 2\pi r dr \hat{z} = J_0\ \pi R_0^2 = I_0/2$

Per la simmetria del sistema il campo dipende solo da r e dal momento che J // z, le linee di campo si avvolgono attorno alla corrente => B e' diretto come il versore tangente alla circonferenza di raggio r. Quindi la circuitazione di B puo' essere calcolata

$\int_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_\gamma B(r)\hat{\phi} \cdot d\vec{l} = B(r)\ 2\pi\ R_0/2 = B(r)\ \pi\ R_0$. Quindi $\vec{B}(R_0/2) = \mu_0 I_0/(2\pi R_0)\hat{\phi}$,

ma in generale all'interno della distribuzione il campo risulta costante e pari a

$$\vec{B}(r) = \mu_0 J_0 R_0 \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R_0}\hat{\phi}.$$

Il potenziale vettore e' legato a B da $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$. Se scegliamo una superficie aperta (di bordo Ψ) e calcoliamo il flusso di B e del rotore di A attraverso di essa abbiamo che

$\int_\Psi \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma_\Psi} \vec{B} \cdot d\vec{s}$. Scelta allora una superficie rettangolare con un lato sulla superficie esterna della distribuzione e l'altro (parallelo a questo) a distanza r >R0, possiamo calcolare

$$\Phi_{S_r}(\vec{B}) = \int_{R_0}^{r} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi} \cdot h dr \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I h}{2\pi}\ln(r/R_0)$$

Il potenziale vettore e' parallelo a z, quindi

$$\int_\Psi \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_z^{z+h} A(R_0)\hat{z} \cdot dz\hat{z} - \int_z^{z+h} A(r)\hat{z} \cdot dz\hat{z} = [A(R_0) - A(r)] \times h.$$

Fissato $\vec{A}(R_0) = \vec{0}$, si ha che per r> R0 $\vec{A}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(r/R_0)\hat{z}$

Per r<R0, $\int_\Psi \vec{A} \cdot d\vec{l} = A(r)h = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R_0}(R_0 - r)h \Rightarrow \vec{A}(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi R_0}(R_0 - r)\hat{z}$

Quesito 4 (fino a 10 punti)
Si consideri la spira conduttrice γ rettangolare illustrata in Figura 2, orientata secondo la normale $\hat{n}$. Essa e' immersa in una regione dello spazio in cui esiste un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B_0\ \hat{y}$ ed e' mantenuta in rotazione (senza attrito) attorno ad un suo lato, coincidente con l'asse z, con velocita' angolare costante ω. Si calcoli

1) la corrente indotta nella spira se questa ha resistenza R.
2) l'energia dissipata per effetto Joule in un giro completo della spira attorno all'asse di rotazione
3) Si consideri la forza che agisce per effetto del campo magnetico sul lato libero della spira e parallelo all'asse z. Si dimostri che questa forza tende a rallentare la spira. La forza esterna che la compensa spende del lavoro. Si dimostri l'eguaglianza di questo lavoro con l'energia dissipata per effetto Joule.

Sia a=10cm, b=2a, B_0=0.1T, ω=100 rad/s, R=10 Ω.

Il flusso del campo magnetico concatenato con la spira cambia per effetto della rotazione della spira e va dal max Bab, quando la spira si trova nel piano xz a 0 quando la spira si trova nel piano yz.

Per la legge di Faraday, quindi si ha $\epsilon_i = -\dfrac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = -\dfrac{d}{dt}(Bab\cos\theta(t)) = Bab\omega\sin(\omega t)$.

La corrente indotta sara' ϵ_i/R. Quando la spira si trova nel primo quadrante (θ compreso tra o e 90deg) la corrente (positiva) scorre in senso antiorario, percorre il lato sull'asse verso l'alto.
L'energia dissipata per effetto Joule in un periodo T = 2π/ω sarà

$$E = \int_0^T dt\ \epsilon_i^2/R = \frac{(Bab\omega)^2}{R}\int_0^T dt\ sin^2\omega t = \frac{(Bab\omega)^2}{R}\frac{T}{2} = \frac{(Bab\omega)^2}{R}\frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi B^2a^2b^2\omega}{R}.$$

Dal momento che la spira e' percorsa da corrente ed immersa in un campo magnetico su ogni tratto agisce una forza; in particolare sul lato parallelo a z agisce la forza $\vec{F} = -i(t)\int_z^{z+b} dz\hat{z}\wedge B_0\hat{y} = i(t)\ B_0 b\ \hat{x}$ che tende a rallentare la spira (per esempio, nel primo quadrante la forza diretta come x si oppone al moto di rotazione, in cui x sta diminuendo). La forza esterna $\vec{F}_{ext} = -\ i(t)\ B_0 b\ \hat{x}$ in un periodo compie il lavoro: $L = \int_0^{2\pi} -\ i(t)B_0 b\hat{x}\cdot a d\theta\hat{\phi} =$

$$= \int_0^{2\pi} -\ i(t)B_0 b\hat{x}\cdot a d\theta(-\sin\theta)\hat{x} = \frac{B_0^2a^2b^2\omega}{R}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta = \frac{\pi\ B_0^2a^2b^2\omega}{R}$$ dal momento che $\hat{\phi}(\theta) = \cos\theta\hat{y} - \sin\theta\hat{x}$.

Quesito 5 (fino a 8 punti)
Una regione dello spazio e' sede di un campo magnetico e di un campo elettrico uniformi: $\vec{E} = -20\ \mathrm{kV/m}\ \hat{y}$ e $\vec{B} = 10\ \mathrm{mT}\ \hat{x}$. Si dimostri che per un opportuno valore dell'energia cinetica (da esprimere in eV) un fascio di elettroni che viaggi lungo l'asse z (in direzione positiva) risulta non deflesso. Se successivamente il fascio di elettroni entra in una regione dello spazio in cui e' presente un campo magnetico uniforme di modulo B=3 mT che forma un angolo di 30deg con l'asse z, quale sara' il moto degli elettroni ? Si calcolino i parametri caratteristici della traiettoria.

Un elettrone e' soggetto alla forza totale $\vec{F} = +|e|20kV/m\hat{y} - |e|v\hat{z}\wedge 10mT\hat{x} = 0$ se v = 20000/0.01 m/s = 2x10^6m/s. L'energia cinetica degli elettroni che non saranno deflessi e' quindi K = 0.5 m v^2 = 0.5 x 10^{-30} 4 x10^{12} / (1.6 x 10^{-19}) = 12.5 eV.
Quando questi elettroni si trovano nella regione con campo magnetico costante, la v perpendicolare alla direzione del campo e' v sin θ = 10^6 m/s e la velocita' parallela al campo B e' 1.73 x 10^6 m/s. Il moto sara' elicoidale con asse parallelo alla direzione del campo B, il ragioni curvatura sarà dato ma $mv^2/r = |e|v_tB$ => il raggio di curvatura e' r=mv/(|e|B) = 10^{-30} x 10^6 / (1.6 x 10^{-19} 3x10^{-3}) = 2.1 mm. Il passo dell'elica e' v_pT con T= periodo = 2πr / v_t => p = 2πr / tan θ = 22.9 mm.

RICORDA:

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ F/m$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ H/m$, $k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$
$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}\ C$, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\ Kg$, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}\ Kg$, $M_{He} \simeq 4\ m_p$

Campo $\overrightarrow{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\frac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\overrightarrow{E}$ prodotto da un dipolo: $\overrightarrow{E}(r,\vartheta) = k\,\frac{3(\overrightarrow{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{p}}{r^5}$;

Campo $\overrightarrow{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\overrightarrow{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\overrightarrow{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\overrightarrow{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}i\frac{d\vec{l}\wedge\vec{r}}{r^3}$; $d\overrightarrow{F} = i\,d\vec{l}\wedge\overrightarrow{B}$

Quesito 6 (fino a 8 punti)
Si discuta un argomento a scelta tra: proprieta' del campo elettrico prodotto da una carica in moto rettilineo uniforme; coefficienti di potenziale e capacita' di un condensatore; l'effetto di schermo elettrostatico; invarianza di gauge del potenziale vettore; inconsistenza della legge di ampere e derivazione dell'equazione di Ampere Maxwell.