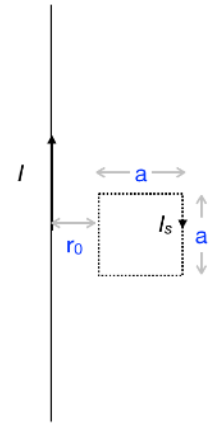
Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 22 - a.a. 2019-2020



Quesito 1 (fino a 8 punti)
Si consideri un filo rettilineo di lunghezza infinita percorso dalla corrente *I* e una spira quadrata di lato *a* contenuta in un piano che contiene il filo con il lato piu' vicino al filo distante r_0. Assumendo che la spira sia percorsa dalla corrente I_s, in senso orario, si calcoli la forza complessiva sulla spira e su ciascun lato della spira. Si calcoli inoltre il coefficiente di mutua induzione dei due circuiti.
I dati del problema sono: *I=10A*, r_0*=0.01m, a=5cm,* I_s*=10A.*

Il filo produce un campo magnetico stazionario espresso dalla legge di Biot Savard: $\overrightarrow{B}(r) = \dfrac{\mu_0\, I}{2\pi r}\hat{\phi}$, dove r e' la distanza del punto considerato dal filo.
Su un tratto generico infinitesimo della sira percorsa da corrente agisce una forza pari a $d\overrightarrow{F} = I_s\, d\overrightarrow{l} \wedge \overrightarrow{B}$. Quindi, chiamato asse z la retta coincidente con il filo orientata nel verso in cui scorre I, la forza complessiva sul lato (A) della spira piu' vicino al filo e'
$\overrightarrow{F_A} = I_s \displaystyle\int_z^{z+a} dz\hat{z} \wedge \frac{\mu_0\, I}{2\pi r_s}\hat{\phi} = -\, I I_s \frac{a\mu_0}{2\pi r_s}\hat{r}$. Analogamente la forza sul lato (B) parallelo al filo e a distanza r_0+a e' soggetto alla forza $\overrightarrow{F_B} = I I_s \dfrac{a\mu_0}{2\pi(r_s + a)}\hat{r}$.
Il tratto della spira in alto(basso) C(D) e' soggetto alla forza

$$\overrightarrow{F_c} = I_s \int_{r_0}^{r_0+a} dr\hat{r} \wedge \frac{\mu_0\, I}{2\pi r}\hat{\phi} = I I_s \frac{\mu_0}{2\pi}\hat{z}\int_{r_0}^{r_0+a}\frac{dr}{r} = I I_s \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\!\left(\frac{r_0 + a}{r_0}\right)\hat{z}$$

$$\overrightarrow{F_D} = -\, I_s \int_{r_0}^{r_0+a} dr\hat{r} \wedge \frac{\mu_0\, I}{2\pi r}\hat{\phi} = -\, I I_s \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\!\left(\frac{r_0 + a}{r_0}\right)\hat{z}$$

Quindi la forza totale e' una forza attrattiva (le forze sui lato perpendicolari sono perfettamente bilanciate sempre, mentre la forza attrattiva sul lato A e' piu' intensa della forza repulsiva sul lato B).
L'intensita' della forza totale e' $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} = -\, I I_s \dfrac{a\mu_0}{2\pi r_s}\left(\dfrac{a}{r_s + a}\right)\hat{r}$.
Il coefficiente di mutua induzione e' definito come
$M = \dfrac{\Phi_{\gamma_2}(\overrightarrow{B}_1)}{i_1} = \dfrac{\Phi_{\gamma_1}(\overrightarrow{B}_2)}{i_2}$ dove i1 e' la corrente che circola in un circuito 1 (la spira quadrata nel nostro caso) e genera un campo magnetico $\overrightarrow{B}_1$ il cui flusso concatenato con il circuito γ2 (il filo infinito, che dobbiamo naturalmente intendere come un tratto rettilineo di un circuito chiuso molto esteso) e' $\Phi_{\gamma_2}(\overrightarrow{B}_1)$. Data l'eguaglianza dei coefficienti di mutua induzione, risulta piu' semplice calcolare il flusso del campo magnetico prodotto dalla corrente che scorre nel filo concatenato con la spira quadrata e farne il rapporto con la corrente, ossia () si ha

$$M = \frac{\Phi_{\gamma_1}(\overrightarrow{B}_2)}{i_2} = \frac{\Phi_{spira}(\overrightarrow{B}_{filo})}{I}$$

Avendo scelto per al spira il verso di percorrenza orario, e quindi la normale entrante nel foglio, si ha M=$\dfrac{1}{I}\displaystyle\int_z^{z+a}\int_{r_0}^{r_0+a} dzdr\hat{\phi}\cdot\overrightarrow{B}(r) = \frac{1}{I}\int_z^{z+a}\int_{r_0}^{r_0+a} dzdr\hat{\phi}\cdot\frac{\mu_0\, I}{2\pi r}\hat{\phi}=$
$a\dfrac{\mu_0}{2\pi}\displaystyle\int_{r_0}^{r_0+a}\frac{dr}{r} = \frac{a\mu_0}{2\pi}\ln\!\left(\frac{r_0 + a}{r_0}\right)$. Si osservi che il risultato e' dimensionalmente corretto (la permeabilita' magnetica del vuoto infatti si misura in H/m). Si ottiene il risultato M>0, che e'

coerente con la legge di Lenz; infatti, se I aumenta, aumenta il flusso di B entrante nel foglio (nella spira orientata in verso orario), quindi l'effetto di induzione deve opporsi a questo aumento il che significa una corrente nel verso antiorario (negativa, nella spira orientata) che produce un campo uscente dal foglio (opposto all'aumento del campo esterno, prodotto dalla corrente I nel filo).

Quesito 2 (fino a 8 punti)

Un filo metallico di forma cilindrica, rettilineo e omogeneo, con raggio r e lunghezza L è percorso dalla corrente I. Se la resistività del materiale è pari a ρ, sapendo che il numero di elettroni di conduzione è pari a $10^{23}/cm^3$ si calcoli la velocità di deriva degli elettroni e il campo elettrico all'interno del filo. Si calcoli inoltre la potenza necessaria e mettere in circolo la corrente.

I dati del problema sono: *I=5A, r=5mm, L=1m, ρ=0.12 x 10^{-6} Ωm.*

R=ρ L / A, V=RI = RJA = ρ L J A / A => E = ρ J. La corrente I sara' I = $J\pi r^2$ visto che il filo e' omogeneo. E = ρ J = ρ I / (πr^2) = *0.12 x 10^{-6} Ωm x 5A / (π 25 10^{-6} m^2) = 0.12/(5π) V/m =0.0076V/m*;

J = |e| n_e v_d = 5 A / *(π 25 10^{-6} m^2) = 6.4 x 10^4 A/m^2*

v_d *=6.4 x 10^4 A/m^2/ (1.6x10^{-19} C x 10^{23} x 10^6) = 4 x 10^{-6} m/s = 4 μ/s.*

La potenza è *P = RI^2 = ρLI^2/(πr^2) = ρJIL = 0.12 x 10^{-6} Ωm x 6.4 x 10^4 A/m^2 x 5A x 1m = 0.038 W.*

Si noti che, la resistenza è R=ρL/(πr^2) *= 0.12 x 10^{-6} Ωm x 1m / (π 25 10^{-6} m^2) = 1.53 mΩ.*

P = R I^2 = 1.53 mΩ x 25 A^2 = 0.038 W.

Quesito 3 (fino a 10 punti)

Un conduttore ha la forma di un cilindro con una cavita' coassiale all'interno di lunghezza molto grande. Esso e' percorso da una corrente uniformemente distribuita. Si calcoli il campo magnetico in ogni punto dello spazio, stabilendo qual e' il valore massimo del modulo e in che condizioni si verifica. Inoltre si calcoli il potenziale vettore in ogni punto dello spazio e si proponga una forma alternativa ad esso che lasci invariati i campi di forza fisici.

Si utilizzino i seguenti dati: *I=1A, a=5mm, b=2cm, L>>b.*

All'esterno della distribuzioni a simmetria cilindrica il campo magnetico ha la stessa forma del campo dovuto a un filo rettilineo infinito (sull'asse di simmetria del sistema) in cui scorra tutta la corrente di 1 A. => Per r>b $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\phi}$. Questo campo ha un andamento decrescente quindi la sua intensita' massima e' $\frac{\mu_0 i}{2\pi b}$ quando r=b.

All'interno della distribuzione di corrente (a<r<b) si puo' applicare la legge di Ampere (a una circonferenza di raggio r coassiale) ottenendo

$$\int_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 \int_a^r \frac{i\hat{z}}{\pi(b^2-a^2)}\cdot 2\pi r\ dr\hat{z} = \mu_0 i\frac{(r^2-a^2)}{(b^2-a^2)}$$

Quindi $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\frac{(r^2-a^2)}{(b^2-a^2)}\hat{\phi}$ (differenza di un termine che cresce come r [all'interno di una distribuzione di corrente uniforme cilindrica] e uno che decresce con 1/r [esterno di un filo condittore, la cavita', a densita' di carica opposta]).

All'interno della cavita' il campo e' nullo.

Il campo tra a e b cresce da 0 fino a $\frac{\mu_0 i}{2\pi b}$ => Quest'ultimo e' il valore massimo di B osservato sulla superficie esterna della distribuzione di corrente.

Il potenziale vettore e' parallelo alle correnti => per la simmetria cilindrica si ha $\vec{A} = A(r)\hat{z}$. Il potenziale vettore puo' essere determinato usando un circuito rettangolare con due lati paralleli all'asse z della distribuzione e contenuto in un piano a cui appartiene l'asse z. Per esempio dato un rettangolo con un lato a r=b e l'altro a r>b, orientato in verso orario, si ha

$$\Phi_\gamma(\vec{B}) = \int_{\Sigma_\gamma} \nabla\wedge\vec{A}\cdot d\vec{s} = \int_\gamma \vec{A}\cdot d\vec{l} = [A(b)-A(r)]h = \int_{\Sigma_\gamma}\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\phi}\cdot dzdr\hat{\phi} = \frac{\mu_0 i h}{2\pi}\ln(r/b)$$

Quindi per r > b, fissato arbitrariamente A(b)=0, si ha $\vec{A}(r) = \frac{\mu_0 i h}{2\pi}\ln(r/b)\hat{z}$.

Analogamente si puo' ragionare per trovare A nei punti interni alla distribuzione e estendendo per continuità, all'interno della cavita' il valore sara' costante e pari al limite per r-> a dell'espressione trovata all'interno della densita' di corrente. La libertà di auge ci permette di ridefinire A sommandogli il gradiente di una qualunque funzione scalare, per esempio $\overrightarrow{A}' = \overrightarrow{A} + a\hat{r}/r^2$ visto che $a\hat{r}/r^2 = \nabla(-a/r)$.

Quesito 4 (fino a 8 punti)

Una sfera isolante di raggio R contiene della carica Q distribuita con densita' $\rho(r) = (a + br/R)$, con a e b > 0. Si calcoli l'energia elettrostatica del sistema e l'energia necessaria per collocare a distanza 2R dal centro della sfera una carica puntiforme q=Q/10.

Guida: L'energia elettrostatica del sistema e' l'energia necessaria a costruire la distribuzione di carica, e coincide con l'energia immagazzinata nel caso elettrico prodotto dalla distribuzione stessa. Quest'ultima puo' essere ottenuta integrando su tutto lo spazio (in cui e' definito il campo elettrico, in questo caso tutto R3) la densita' volumetrica di energia

dUe = $(\epsilon_0/2)|\overrightarrow{E}|^2 dV = (\epsilon_0/2)|\overrightarrow{E}|^2 4\pi r^2 dr$.

Occorre quindi calcolare il campo elettrico in ogni punto dello spazio; Questo avrà la forma del campo Coulombiano (~Q/r^2, con Q=integrale di ρ sulla sfera) per i punti esterni alla sfera, e sarà comunque s simmetria sferica allàinterno della sfera (si applichi Gauss a una sfera di raggio r<R per il calcolo di E(r)).

Poi la definizione del potenziale elettrostatico ci da modo di calcolare l'energia necessaria per portare una carica q dall'infinito a distanza 2R (qϕ(2R), dove ϕ e' il potenziale coulombiano [siamo all'esterno della sfera].

Quesito 5 (fino a 10 punti)

Un solenoide ideale, di raggio a, resistenza R e densita' lineare di spire n, e' collegato a un generatore di forza elettromotrice sinusoidale con periodo T e ampiezza massima V0. Quale sarà la corrente che percorre una spira circolare metallica coassiale al solenoide e di raggio b>a e di resistenza Rs=R ? Si calcoli il valore del campo magnetico indotto, prodotto dalla corrente nella spira circolare nel punto al centro della spira e lo si confronto con il campo del solenoide.

Siano a=10cm, R=100Ω, v=10^4/m V_0=10V, T=10s, b=20cm, R_s=1Ω.

Il solenoide produce un campo magnetico uniforme (all'interno del solenoide e nullo fuori) diretto come l'asse di modulo $B(t) = \mu_0 n V_0 \sin(\omega t)/R$, dipendente dal tempo ($\omega = 2\pi/T$). Il flusso del campo magnetico del solenoide concatenato con la spira di raggio b e' πa^2 x B(t) e quindi per Faraday-Neumann si ha che la corrente indotta nella spira e' $i_{ind} = -d\Phi(B)/dt = -\mu_0 n\omega V_0 \cos(\omega t)/(RR_s)$.

Il campo indotto al centro del solenoide puo' essere calcolato con le formule di Laplace, integrando dB = $\frac{\mu_0}{4\pi} i_{ind}\, d\vec{l} \wedge (-\hat{r})/b^2 = \frac{\mu_0}{4\pi} i_{ind}\, b\, d\phi \hat{\phi} \wedge (-\hat{r})/b^2$. Quindi si ha $\overrightarrow{B}_{ind}(r=0) = \frac{\mu_0 i_{ind}}{4\pi b}\hat{z}$ antiparallelo al campo del solenoide (visto che i indotta e' proporzionale a -V/R) come vuole le legge di Lenz.

RICORDA:

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, k = 1/ (4 π ε_0)= $9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$

|e| = $1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_{He} \simeq 4\ m_p$

Campo $\overrightarrow{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\frac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\overrightarrow{E}$ prodotto da un dipolo: $\overrightarrow{E}(r,\vartheta) = k\frac{3(\overrightarrow{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{p}}{r^5}$;

Campo $\overrightarrow{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\overrightarrow{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\overrightarrow{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\overrightarrow{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$; $d\overrightarrow{F} = i\, d\vec{l} \wedge \overrightarrow{B}$

Quesito 6 (fino a 8 punti)

Si discuta un argomento a scelta tra:

1) definizione di capacita' e calcolo della capacita' di un condensatore cilindrico;
2) i mezzi dielettrici e i campi in presenza di dielettrici;
3) metodo delle cariche immagine e una sua applicazione.
4) sviluppo in serie di multipli del potenziale elettrostatico per una distribuzione discreta di cariche.