Quesito 1 17/09/2020 1

Sulla sfera conduttrice di raggio R_1 abbiamo un potenziale V_0 noto e una densità di carica superficiale σ_0.

Q_0 carica complessiva sulla sfera $= \int_\Sigma \sigma_0 \, ds =$

$$= \sigma_0 4\pi R_1^2$$

Per questa sfera conduttrice (in assenza di altre cariche nello spazio) il potenziale all'esterno sarà

$$V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad e$$

per $r \to R_1$ $V(r) \to V_0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$

Quindi $V_0 = \frac{\sigma_0 4\pi R_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sigma_0 R_1}{\varepsilon_0} = V_0 \Rightarrow \boxed{R_1 = \frac{\varepsilon_0 V_0}{\sigma_0}}$$

$\frac{1}{4\pi 9\times10^9} \frac{10kV}{10\times10^{-6} C/m^2} \rightarrow \frac{10^4 V}{10^6 V/m} 2 \rightarrow 10^{-2} m$

(2)

L'energia elettrostatica del sistema (sfere conduttori) è

$$U = \frac{1}{2}\int \rho \varphi \, dv =$$

nel nostro caso

$$= \frac{1}{2}\int_{\Sigma} \sigma_0 \underbrace{\varphi}_{= V_0 \text{ sempre sulla sfera}} dS = \frac{1}{2} V_0 \int_{\Sigma} \sigma_0 dS = \frac{1}{2} V_0 Q_0$$

$\Sigma \Rightarrow$ superficie della sfera

$$Q_0 = 4\pi R_1^2 \sigma_0 =$$

$$= 4\pi \left(10^{-2}\,m\right)^2 \cdot 10 \times 10^{-6} \frac{C}{m^2} =$$

$$= 12.57 \times 10 \times 10^{-6} C = \underline{\underline{12,57\,nC}}$$

$$U = \frac{1}{2} V_0 Q_0 = \frac{1}{2}\, 10kV \cdot 12.57\,\mu C =$$

$$\simeq 6.3 \times 10^{-5}\, J$$

Messe a contatto*, le due sfere si portano allo stesso potenziale V_f, $Q_{TOT} = Q_{1f} + Q_{2f} = Q_0$

* per esempio collegate con un filo di spessore trascurabile mentre sono a grande distanza l'una dall'altra

allora $V_f = V_{1f} = \frac{Q_{1f}}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = V_{2f} = \frac{Q_{2f}}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

$$\frac{Q_{1f}}{R_1} = \frac{Q_{2f}}{R_2} \Rightarrow \begin{cases} Q_{2f} = \frac{Q_{1f}}{2} \\ Q_{2f} + Q_{1f} = Q_0 \end{cases}$$

$$V_2 = \frac{1}{8} V_1 \Rightarrow R_2 = \frac{1}{2} R_1$$

visto che $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$Q_{1f} + \frac{Q_{1f}}{2} = Q_0$$

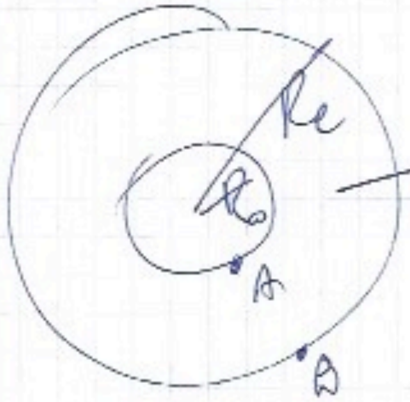
$$Q_{1f} = Q_0 \frac{2}{3} \rightarrow 4{,}2\,\mu C$$

$$Q_{2f} = \frac{1}{3} Q_0 \Rightarrow V_{2f} =$$

$$= \frac{Q_{2f}}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{\frac{1}{3}Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R_1/2} = \frac{2}{3} V_0 = 6.7\,kV$$

Quesito 2

4



$\rightarrow \rho(r) = k\frac{r}{R_0} = \frac{\rho_0 r}{R_0}$ $\quad \vec{E} = ?$

$\varphi(A) - \varphi(B)$

La distribuzione di carica ρ è simmetrica sferica
$\rho = \rho(r) \Rightarrow$ usiamo Gauss sapendo che $\vec{E} = E(r)\hat{r}$

$\underline{r > R_e}$ Consideriamo Σ una sfera di raggio $r > R_e$

$$\oint_{\Sigma_r} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}\Sigma_r$$

$4\pi r^2 E(r)$

$$\int_{R_0}^{R_e} \frac{\rho_0 r}{R_0} 4\pi r^2 dr = \frac{\rho_0 4\pi}{R_0}\int_{R_0}^{R_e} r^3 dr = \frac{\rho_0 \pi}{R_0}\left(R_e^4 - R_0^4\right)$$

Quindi
$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho_0 (R_e^4 - R_0^4)}{4 R_0 r^2 \varepsilon_0}\hat{r}}$$

per $r \in (R_0, R_e)$ $\quad \vec{E}(r) = \left(\frac{\rho_0}{4R_0\varepsilon_0} r^2 - \frac{\rho R_0^3}{4r^2\varepsilon_0}\right)\hat{r}$

per $r < r_0 = R_0$

$\vec{E} = 0$

5

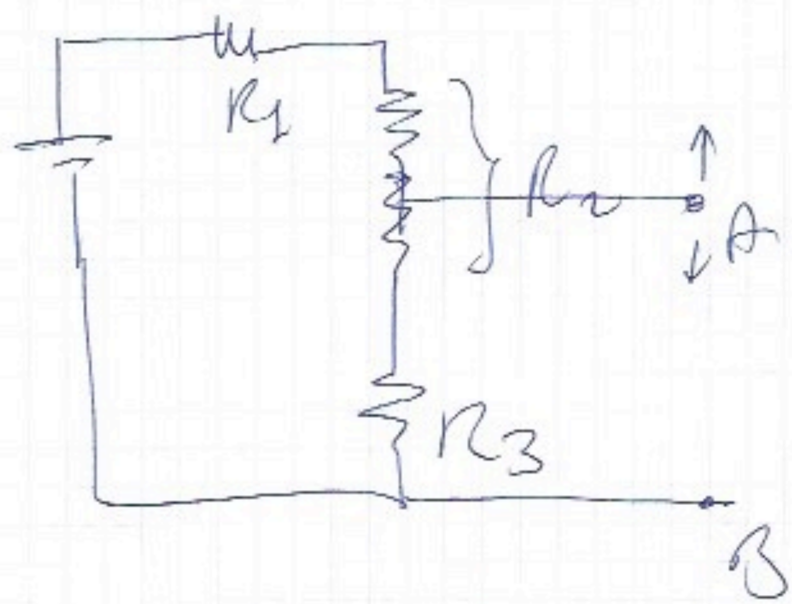
$$\varphi_A - \varphi_B = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} =$$

$$= \int_{R_0}^{R_e} \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} \hat{r} \left(\frac{r^2}{R_0} - \frac{R_0^3}{r^2} \right) \cdot dr\,\hat{r} =$$

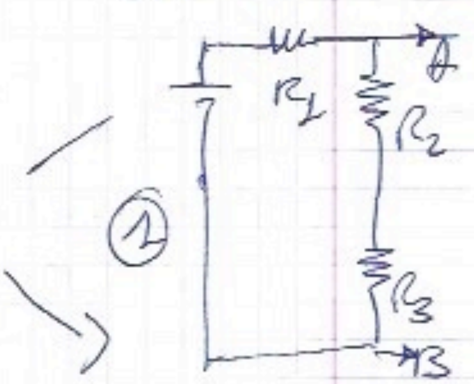
$$= \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} \int_{R_0}^{R_e} \left(\frac{r^2}{R_0} - \frac{R_0^3}{r^2} \right) dr = \frac{\rho_0}{4\varepsilon_0} \left(\frac{1}{3R_0} \left(R_e^3 - R_0^3 \right) + \right.$$

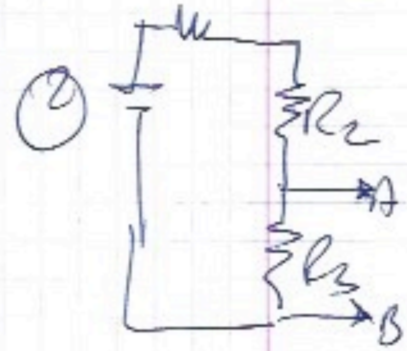
$$\left. + R_0^3 \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_0} \right) \right)$$

Questione 3



Situazioni limite





La corrente che scorre in R_1 (e anche in R_2 e R_3 che sono tutte in serie) è

$$i = \frac{\varepsilon}{R_1+R_2+R_3}$$

$$\underbrace{V_A - V_B = (R_x + R_3)\, i}_{\text{in generale}}$$

Nella struttura

3V

$V_A - V_B = R_3 i$

$V_A - V_B = (R_2+R_3) i$

6V

$$R_3 = \frac{3V\,(R_1+R_2+R_3)}{\varepsilon} = \frac{1}{4}(R_1+R_2+R_3)$$

$$\frac{3}{4}R_3 = \frac{(R_1+R_2)}{4}$$

$$3R_3 = R_1+R_2$$

$$R_2+R_3 = \frac{6V}{12V}(R_1+R_2+R_3) = \frac{1}{2}(R_1+R_2+R_3)$$

$$\begin{cases} 3R_3 = R_1+R_2 \\ 2(R_2+R_3) = \underbrace{R_1+R_2}+R_3 = 3R_3+R_3 \end{cases}$$

$$2R_2 = 2R_3 \Rightarrow \begin{cases} R_3 = R_2 \\ R_1 = 2R_2 \end{cases}$$

Infatti

$$V_A - V_B = \frac{(R_x+R_2)\,\mathcal{E}}{2R_2+R_2+R_2} = \frac{R_x+R_2}{4R_2}\,\mathcal{E} =$$

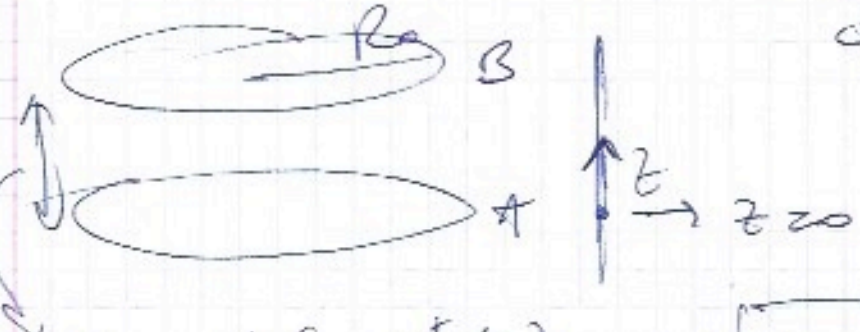
$$= \begin{cases} R_x = 0 & \frac{1}{4}\mathcal{E} = 3V \\ R_x = R_2 & \frac{1}{2}\mathcal{E} = 6V \end{cases}$$

Quesito 4

$$\frac{\pi R_0^2 \sigma_0}{\sigma_{\varepsilon_0} d} = \frac{\varepsilon A}{d}$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 \pi R_0^2}{d} = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$\sigma_d = \left(\frac{C}{\varepsilon_0 A}\right)^{-1}$$



$$V(t) = V_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = V_A - V_B$$

↳ conduttore nel fon di aria

Corrente di spostamento a $t = 1s$.

$$\vec{B}(r = 2cm)_{(t=1s)} = ?$$

$$\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Nel conduttore $\vec{J} = 0$ $\quad \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq 0$ perché

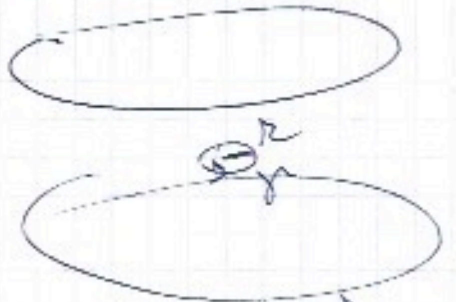
$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial}{\partial z} V(z, t) = \frac{V_0}{d}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\hat{z}$$

costante

$$\boxed{\vec{J}_s =} \; \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{V_0}{d}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right)\hat{z} = \boxed{\frac{\varepsilon_0 V_0}{d\tau} e^{-t/\tau}\hat{z}}$$

analoga a densità di corrente di conduzione

Scelto per z circ. di raggio $r = 2$ cm con centro nell'asse del condensatore ho...



$\vec{B} = B(r)\hat{\varphi}$ → linee di campo avvolgono attorno alla corrente

$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{\Sigma_\gamma} \vec{J}_s \cdot d\vec{s} = \mu_0 \frac{\varepsilon_0 V_0}{d\tau} e^{-t/\tau} \pi r^2$$

$$\cancel{2\pi} r B(r) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 V_0}{d\tau} e^{-t/\tau} \cancel{\pi} r^2$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 V_0 r e^{-t/\tau}}{d\tau} \hat{\varphi}$$

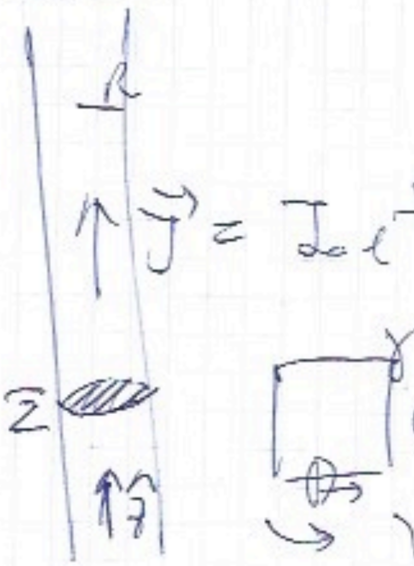
$$|\vec{B}(r = 2cm)| = \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot 100V \cdot 0.02}{(4\pi \cdot 9 \times 10^{9})\ \frac{\cancel{\varepsilon}A}{\cancel{A}C}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{10^{-6}\,s} e^{-\frac{1}{10^{-6}}} =$$

$$= \frac{4\cancel{\pi} \times 10^{-7}\ 100V \cdot 0.02 \times 10^{-5} F}{\cancel{\pi}(0.1)^2 \times 10^{-6}} \underbrace{e^{-10^{6}}}_{\sim 0} =$$

$$= 800 \times 10^{-4} e^{-10^6} = 0.08\, e^{-10^6}\ T$$

| Quest 5 | (6)



$J_0 = A(1-e^{-t/\tau})$

$\vec{J} = J_0 e^{-r/r_0}\hat{z}$

$\int_{t_1}^{t_2} i_{ind}\, dt$

$I_{\text{sezione}} = \int_{\Sigma} \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_0^{R} J_0 e^{-r/r_0}\hat{z}\cdot 2\pi r\, dr\,\hat{z} =$

$= J_0 2\pi \int_0^R r e^{-r/r_0} dr = 2\pi J_0 \left(\int_0^R r e^{-r/r_0} dr\right) = 2\pi J_0 C$

funzione del t

$\int r e^{-r/r_0} dr = r\left(-r_0 e^{-r/r_0}\right) - \int \left(-e^{-r/r_0} r_0\right)\cdot 1\, dr =$

per parti; $1 = \frac{d}{dr}(r)$

$= \underbrace{-r r_0 e^{-r/r_0} - r_0^2 e^{-r/r_0}}$

calcolato tra R e 0 da

$-R r_0 e^{-R/r_0} - r_0^2 e^{-R/r_0} + 0 + r_0^2 =$

$= \boxed{r_0^2\left(1-e^{-R/r_0}\right) - R r_0 e^{-R/r_0}} = C = 10^{-6}\ m^2$

$10^{-4}\cdot 0.1 - 10^{-5}\cdot 0.9$

$e^{-R/r_0} = e^{-1/10} = e^{-0.1} = 0.9$

All'esterno del circuito il campo $\vec{B}$ ha la forma

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}\hat{\varphi} = \frac{\mu_0 2\pi I_0 C}{2\pi r}\hat{\varphi} = \frac{\mu_0 A(1-e^{-t/\tau})C}{r}\hat{\varphi}$$

$$\Phi_\gamma(\vec{B}) = -\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi}\int_d^{d+l}\frac{1}{r}\,dr\int_0^l dz =$$

percorsa in senso antiorario $\Rightarrow \Sigma_\gamma = -l^2\hat{\varphi}$

$$= -\mu_0\frac{I(t)\,l}{2\pi}\ln\left(\frac{d+l}{d}\right)$$

$I(t)$ diminuisce con il tempo $\Rightarrow$ il flusso di $\vec{B}$ entrante diminuisce

$\parallel \hat{\varphi}$

nel tempo $\Rightarrow$ la corrente indotta

i_{ind} = scorre in verso orario

$$\boxed{i_{ind}} = \frac{1}{R}\mathcal{E}_{ind} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}\Phi(\vec{B}) =$$

$$= -\frac{1}{R}\frac{\mu_0}{2\pi}\,l\ln\left(\frac{l+d}{d}\right)\frac{d}{dt}\left(2\pi C A\left(1-e^{-t/\tau}\right)\right) =$$

$$= -\frac{CA}{R}\mu_0\, l\ln\left(\frac{l+d}{d}\right)\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$$

(B)

$$Q_{t_{12}} = \int_{t_1}^{t_2} i\,dt = + \frac{C A \mu_0}{R}\, l \ln\left(\frac{l+d}{d}\right)\frac{1}{\tau^2}\left(e^{-t/\tau}\right|_{t_1}^{t_2} =$$

$$= \frac{C A \mu_0}{R}\, l \ln\left(\frac{l+d}{d}\right)\frac{1}{\tau^2}\left(e^{-t_2/\tau} - e^{-t_1/\tau}\right) < 0$$

$$\frac{10^{-6}\,m^2 \; 10^{6}\,A/m^2 \; 4\pi\times10^{-7}}{100\,\Omega} \cdot 2\times10^{-3} \ln\left(\frac{4}{2}\right)\frac{1}{10^{-12}\,s^2} \cdot$$

$$\left(e^{-10^3} - e^{-3}\right) = -4\pi \cdot 2 \times \ln 2\, e^{-3} =$$

$$= 0.87\,C$$

Caso 2

Forza sul lato verticale più vicino (immaginando i nel verso antiorario) è repulsiva

$$d\vec{F} = i\, d\vec{l} \wedge \vec{B} = -i\, l\, \hat{z} \wedge B\hat{\varphi} =$$

$$= i\, l\, B(d;t)\,\hat{y}$$

Sul lato parallelo a questo $d\vec{F}$ sarà attrattiva ma di minore intensità $|\vec{B}(d+l)| < |\vec{B}(d)|$

$\Rightarrow$ la spira tende ad allontanarsi dalla distribuzione cilindrica