Q1 25/01/2021

Sfera isolante $R = 0.1$ metri $= 10$ cm

$\rho(r) = Ar$ e $\rho(R) = 10^{-8}\, C/m^3$

particella di massa $M = 1\,gr = 10^{-3}\,kg$

e carica $q = 10^{-8}\,C = 10\,nC$

M, q si trova inizialmente a $d = 1m$ con velocità $\vec{v} = 0.5\, cm/s\,(-\hat{r}) = \frac{10^{-2}}{2}\, m/s\,(-\hat{r})$

→ A quale distanza dal centro della sfera ~~da~~ arriva la carica?

→ Calcolare $\vec{E}$ in un punto generico esterno alla sfera

NOTA distribuzione di carica a simmetria sferica contenuta nel raggio massimo R

⇒ all'esterno il campo è Coulombiano $\frac{kQ}{r^2}\hat{r}$

$$\text{con } \boxed{Q} = \int_0^R \rho(r)\, dV = \int_0^R \rho(r)\, 4\pi r^2 dr =$$

$$= \int_0^R 4\pi A r^3 dr = \boxed{\pi A R^4}$$

per $r \geq R$

$$\begin{cases} \varphi(r) = \frac{kQ}{r} = \frac{k\pi A R^4}{r} \\ \vec{E}(r) = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} = \frac{k\pi A R^4}{r^2}\hat{r} \end{cases}$$

NOTA $A = \frac{\rho(R)}{R} = \frac{10^{-8}\, C/m^3}{0{,}1\, m} = 10^{-7}\, C/m^4$

Q1 / 25/01/2011 (B)

NOTA all'interno della sfera
il campo è radiale ma l'espressione
analitica deve essere determinata usando
la legge di Gauss.
Consideriamo una sfera S di raggio $r<R$ con
centro in O (al centro della distribuzione)

$$\underbrace{\oint_{S_r}(\vec{E})}_{\downarrow} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{V_S} \rho \, dV$$

$$\underbrace{\int_{S_r} E(r)\hat{r}\cdot ds\,\hat{r}}_{\downarrow} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r Ar\,4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} A\, 4\pi \frac{r^4}{4} = \frac{A\pi r^4}{\varepsilon_0}$$

$$E(r)\,4\pi r^2$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{Ar^2}{4\varepsilon_0}\hat{r}} =$$

$$= \pi\, 9\times10^9 \times 10^{-7} \times r^2\,\hat{r} =$$

$$= 2{,}8\times10^3\, r^2\,\hat{r}\ \frac{V}{m}$$

NOTA
il potenziale elettrostatico avrà una
forma analitica diversa da $\propto \frac{1}{r}$ dentro la
sfera di raggio R.

Q1/25/01/2021

Dalla conservazione dell'energia meccanica (in presenza di campi conservativi!) si ha

3

$$E_i = \frac{1}{2} m v_i^2 + q\varphi(d)$$

$$= \frac{1}{2} m v_f^2 + q\varphi(R_{min})$$

$\downarrow$

$v_f = 0$ al massimo avvicinamento al centro della sfera

Dal momento che la distribuzione di carica e la carica puntiforme sono dello stesso segno la forza è repulsiva $\Rightarrow$ la carica puntiforme si decelera e ad un certo punto si ferma (se l'energia iniziale non è troppo grande)

Vediamo se esiste una distanza $R_{min} > R$ tale che

$$q\varphi(R_{min}) = q\frac{k\pi A R^4}{R_{min}} = q\frac{k\pi A R^4}{d} + \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$\Rightarrow R_{min} = \frac{qk\pi A R^4}{\frac{qk\pi A R^4}{d} + \frac{1}{2} m v_i^2} = \frac{1}{\frac{1}{d} + \frac{m v_i^2}{2qk\pi A R^4}}$$

$\boxed{Q1 / 25/01/2011}$

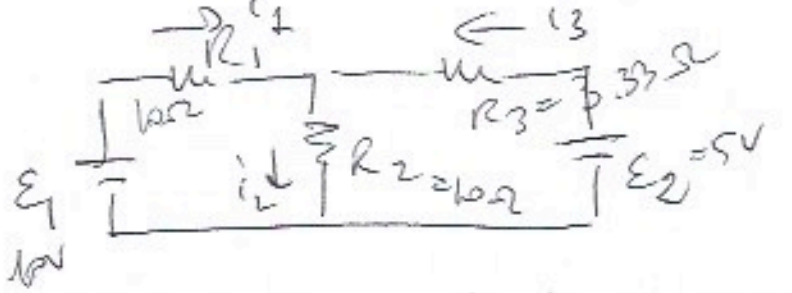
$$R_{min} = \frac{1}{\frac{1}{10}\,\rho\,\frac{10^{-3} \times \frac{1}{4}10^{-4}}{2\times 10^{-8} \times 9\times 10^{9} \times \pi \times 10^{-7} \times 10^{-4}}} = \quad (4)$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{10}\,\frac{1}{8\times 2.8\times 10^{-2}}} = 0.22\ m =$$

$$= \underbrace{22\,cm}_{ok} > R = 10\,cm$$

5

02 / 25/01/2021



P dissipata

P erogata

Attribuiti i nomi e figure alle correnti (con verso) ~~xxxx~~ nei vari rami, si ha → fanche

$$\mathcal{E}_1 = R_1 i_1 + R_2 i_2 \Rightarrow i_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} i_2$$

$$\mathcal{E}_2 = R_3 i_3 + R_2 i_2 \Rightarrow i_3 = \frac{\mathcal{E}_2}{R_3} - \frac{R_2}{R_3} i_2$$

$$i_2 = i_1 + i_3$$

$$\Downarrow$$

$$i_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1} + \frac{\mathcal{E}_2}{R_3} - \frac{R_2}{R_1} i_2 - \frac{R_2}{R_3} i_2$$

$$i_2 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_3}\right) = \frac{\mathcal{E}_1 R_3 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_3}$$

$$\boxed{i_2 = \frac{\mathcal{E}_1 R_3 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_3 + R_2 R_3 + R_1 R_2}} = \frac{33.3 + 50}{33.3 + 33.3 + 100} =$$

$$= \frac{83.3}{166.6} =$$

$$= 0.4998$$

$$\simeq 0.5 \downarrow$$ preciso numero

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{R_1} - \frac{R_2}{R_1} i_2 =$$

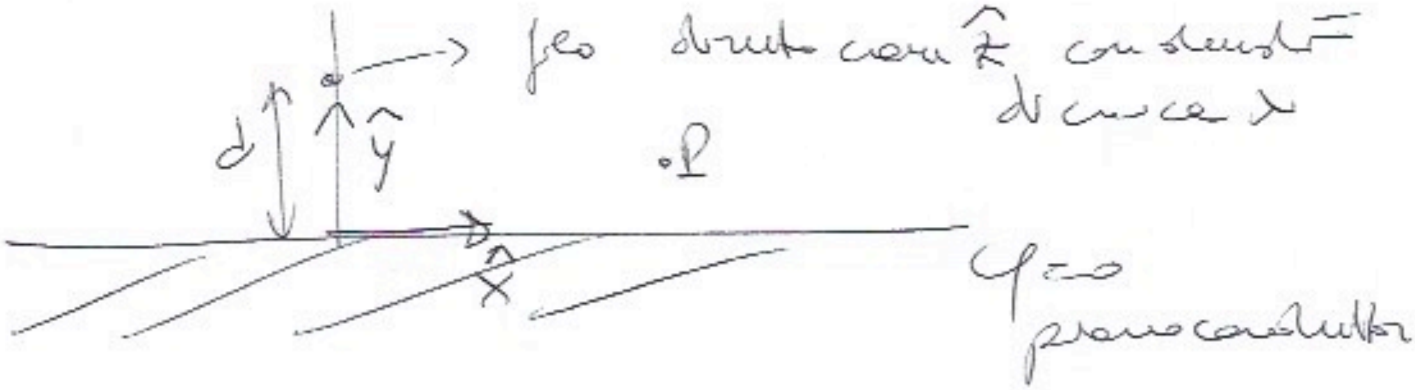
$$= \frac{10}{10} - 0.5 \simeq \underbrace{0.5\,A}_{\text{preciso numero}}$$

$$i_3 = i_2 - i_1 \simeq 0 \Rightarrow P_{er,2} \simeq 0$$

$$P_{er,1} = \mathcal{E}_1 i_1 = 5W$$

$$P_{diss,1} = 2.5W \quad P_{diss,2} \simeq 2.5W \quad P_{diss,3} \simeq 0$$

[03] 25/01/2021



La presenza del filo induce sul piano conduttore una certa distribuzione di carica σ dipendente dal punto.
In ogni punto P del semispazio il campo risultante dalla somma dei contributi dovuti al filo e alla carica indotta.

La carica indotta (densità superficiale)

$$\underbrace{\sigma = \varepsilon_0 E_n}$$

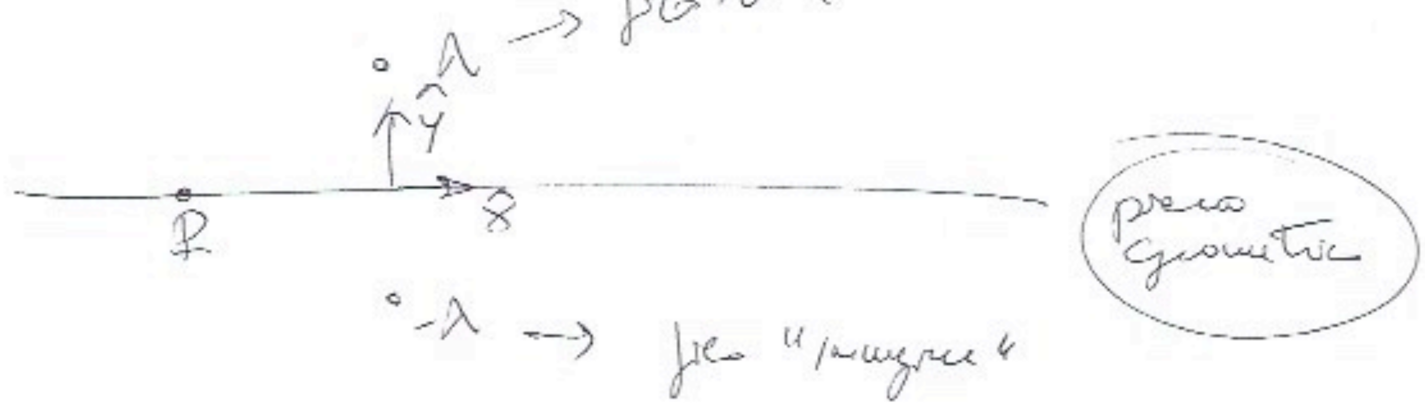
campo normale al conduttore subito all'esterno del conduttore.

Come determinare campo e potenziale —
Il Prob. generale dell'elettrostatica

$\nabla^2 \varphi = 0$ + condizioni al contorno

ammette una soluzione unica $\Rightarrow$ metodo delle cariche immagine.

Q3/ 25/01/2021 (2)



osserviamo che in ogni punto del piano P il potenziale è nullo –
infatti P dista dal filo + tanto quanto dal filo − ⇒ il potenziale prodotto da ognuno dei due fili sarà uguale e opposto –

Quindi i due fili costituiscono un sistema di cariche che riproduce il nostro problema generale dell'elettrostatica $\nabla^2\varphi=0$ e $\varphi=0$ per $y=0$ su tutto il piano conduttore.

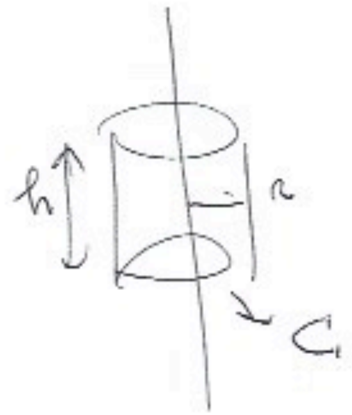
Quindi calcolo $\vec{E}$ in P con i due fili e poi $\sigma=\varepsilon_0 E$

Il campo sarà come ci aspettiamo perpendicolare al piano.

Q.B 25/01/2021 ③

Calcoliamo il campo elettrico dovuto a un filo carico uniforme

$\vec{E} = E(r)\hat{r}$ radiale (perpendicolare uscente dal filo)



alla distanza r $\quad \vec{E}(r) = ?$

per Gauss

$$\Phi_{C}(\vec{E}) = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0} \rightarrow \text{carica interna a } C$$

$$\Downarrow$$

$$2\pi r \cancel{h}\, E(r) = \frac{\lambda \cancel{h}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}}$$

Quindi 2 conduttori verticali

$$\vec{E}(P) = -\frac{2\lambda}{2\pi\varepsilon_0 (d^2+x^2)^{1/2}}\sin\vartheta\,\hat{y} =$$

$$= -\frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0 (d^2+x^2)^{1/2}}\frac{d}{(d^2+x^2)^{1/2}}\hat{y} =$$

$$= -\frac{\lambda d}{\pi\varepsilon_0 (d^2+x^2)}\hat{y}$$

$$\boxed{\sigma = -\frac{\lambda d}{\pi (d^2+x^2)}}$$

$\sigma = \frac{A}{r^2}$

→ Calcolare $\vec{B}(O)$

→ Calcolare $\vec{\mu}$ della corona circolare.

Corona ≡ somma di anelli di $R_1 < r < R_2$

un anello ha carica $\lambda 2\pi r = \sigma 2\pi r \, dr$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\lambda = \sigma \, dr}$$

Corrente di un anello

$$\boxed{i =} \int \underbrace{\vec{j}}_{nq\vec{v}} \cdot d\vec{S} = \rho \vec{v} \cdot \underbrace{d\vec{S}}_{\text{sezione del filo}} = \boxed{\lambda v} = \boxed{\sigma v \, dr} = \frac{A v}{r^2} dr = \frac{A \omega \, dr}{r}$$

$\Downarrow$

$\vec{B}$ al centro di un anello con corrente i

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \int_0^{2\pi} \frac{r \, d\varphi \, \hat{\varphi} \wedge (-r\hat{r})}{r^3} = \frac{\mu_0 i \, 2\pi}{4\pi r} \hat{z} =$$

$$\boxed{= \frac{\mu_0 i}{2r} \hat{z}}$$

5 25/01/2021 2

$$\vec{B}_{tot} = \frac{\mu_0 \hat{z}}{2} \int_{R_1}^{R_2} \frac{A\omega\, dr}{r} \cdot \frac{1}{r} =$$

$$= \frac{\mu_0 \hat{z}}{2} A\omega \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) =$$

$$= \boxed{\mu_0 \frac{A\omega}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \hat{z}}$$

$$d\vec{\mu} = i \pi r^2 \hat{z} = \frac{A\omega\, dr}{r} \pi r^2 \hat{z} =$$

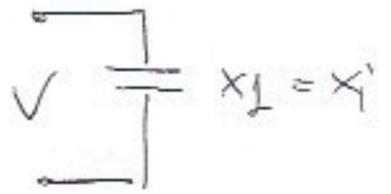
anello di raggio r

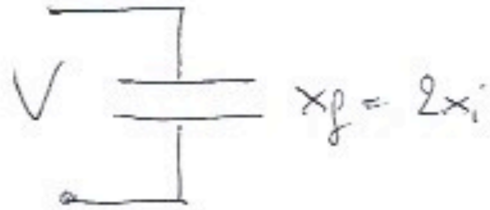
$$= \boxed{A\omega\pi r\, dr\, \hat{z}}$$

$$\vec{\mu}_{tot} = \int_{R_1}^{R_2} A\omega\pi r\, dr\, \hat{z} =$$

$$= \frac{A\omega\pi}{2} \left(R_2^2 - R_1^2 \right) \hat{z}$$

Q6 25/01/2021 (1)





$q_i = 2\,\mu C$

$V = 400\,V$

$$U_{e_i} = \frac{1}{2} Q_i V = 2\cdot 10^{-6} \cdot 400\,V = \boxed{4\times 10^{-4}\,J}$$

$$U_{ef} = \frac{1}{2} Q_f V = \frac{1}{2} C_f V^2$$

$$C_i = \frac{Q_i}{V} = 5\,nF \qquad C_f = \frac{Q_f}{V} = \frac{\varepsilon_0 A}{x_f} = \frac{\varepsilon_0 A}{2x_i} =$$

$$\rightarrow \frac{2\times 10^{-6}}{4\times 10^{-2}} = \frac{1}{2}\times 10^{-8} \qquad = \frac{1}{2} C_i = \frac{x_i}{x_f} C_i$$

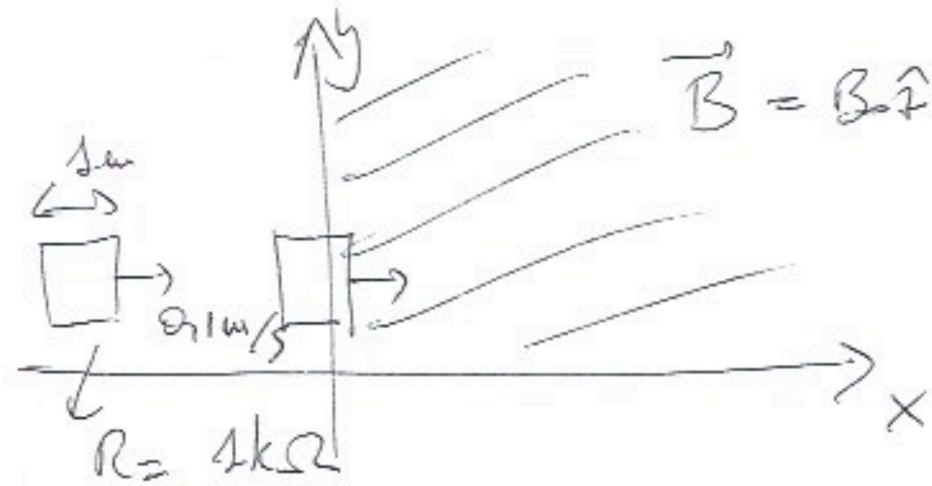
$$\Delta U_e = W = \frac{1}{2} V^2 (C_f - C_i) = \frac{1}{2} V^2 \left(\frac{x_i}{x_f} - 1\right) C_i =$$

$$= U_{ei} \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \left|\frac{U_{ei}}{2}\right|$$

$$W = 2\times 10^{-4}\,J$$

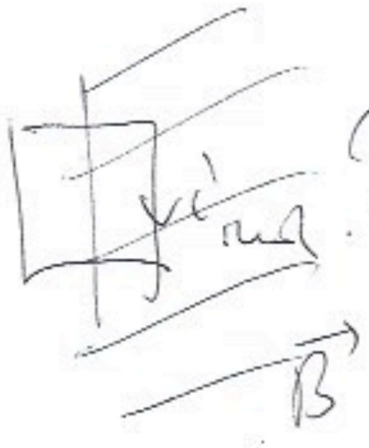
$$Q_{final} = C_f V = \frac{x_i}{x_f} C_i V = \frac{x_i}{x_f} Q_i = 1\,\mu C$$

Q4 25/07/2011 (1)



$\vec{B} = B_0 \hat{z} = 10^{-3} \hat{z}$

Quando la spira si trova parzialmente nella regione di campo magnetico $\vec{B}$ ~~e costante~~ c'è un flusso uscente (con $\hat{z}$) positivo crescente $\Rightarrow$ i indotta scorre in verso orario per contrastare l'aumento del flusso;



$$\vec{F} = i\, d\vec{l} \times \vec{B} = -i \hat{y} L \wedge B_0 \hat{z} = -i L B_0 \hat{x}$$

$\rightarrow$ si oppone al moto $\Rightarrow$ rallenta

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = -i L B_0 \hat{x}$$

$\boxed{Q4 \quad 25/01/2021}$ ②

$i = ?$

$$R i_{ind} = \mathcal{E}_{ind} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} =$$

$$= -\frac{d}{dt}\left(v\,dt\,L B_0 \right) = -vLB_0$$

$$i_{ind} = +\frac{vLB}{R} \boxed{\text{dir. senso orario}}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{vLB}{R}LB = -\frac{vL^2B^2}{R}dt$$

$$d\vec{v} = -\frac{L^2B^2}{Rm}\underbrace{\vec{v}dt}_{d\vec{r}}$$

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -\frac{L^2B^2}{Rm}\int_0^L dx =$$

$$v_f - v_i = -\frac{L^3B^2}{Rm}$$