# Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 30 - a.a. 2020-2021

***Quesito 1 (fino a 8 punti + 6 punti)***

1) Una sfera conduttrice di raggio R0 e' mantenuta a potenziale nullo e una carica puntiforme q0 si trova alla distanza R>R0 dal centro della sfera. Si calcoli la carica complessiva indotta sulla superficie in funzione della distanza R.
2) Immaginando che nella sfera conduttrice ci sia una cavita' sferica concentrica di raggio pari a Ri, si dimostri che per ogni valore di R la densita' superficiale di carica in ogni punto della superficie della cavita' e' nulla.

La presenza della carica puntiforme in prossimita' della sfera conduttrice determina in fenomeno dell'induzione elettrostatica: la carica sul conduttore si distribuisce sulla superficie esterna in modo tale da compensare il campo colombiano determinato dalla carica puntiforme in ogni punto interno al conduttore. Il campo elettrico nelle immediate vicinanze del conduttore sara' perpendicolare alla superficie in ogni punto e di valore pari alla densita' superficiale di carica locale (dipendente dal punto) diviso per la costante dielettrica del vuoto. Il problema si risolve con il metodo delle cariche immagine. Una ***carica q' collocata alla distanza d dal centro della sfera*** (lungo la retta che congiunge il centro della sfera don q0) assieme alla ***carica puntiforme q0 alla distanza R dal centro della sfera*** costiuiscono un sistema di cariche fittizie che riproduce il ***problema generale dell'elettrostatica che descrive il potenziale elettrostatico nella situazione proposta dal problema***:

$\nabla^2\phi = 0$ in ogni punto dello spazio e $\phi = 0$ sulla superficie della sfera e all'infinito.

Infatti le due cariche q0 e q1 per un punto generico Ps della superficie della sfera producono un potenziale elettrostatico

$\phi(P_s) = kq0/r + kq'/r'$

Imponendo che questa quantita' sia zero si trova $r/r' = -q_0/q' = costante.$

Il luogo geometrico dei punti le cui distanze da due punti fissi (P0 e P' in cui sono collocate le cariche q0 e q') sono in un rapporto costante e' un'ellisse.

Quindi una la superficie sferica del conduttore, caso particolare di un'ellisse, puo' essere un luogo geometrico che soddisfa la condizione $\phi(P_s) = 0$ scelti opportunamente P' (ossia d) e q'.

Per fissare questi due valori, esplicitiamo la condizione $\phi(P_s) = 0$ per Ps uguale ai due punti della sfera intersecati dalla retta che congiunge la carica puntiforme q0 con il centro della sfera:

$$\phi(P_1) = 0 \rightarrow \frac{R - R_0}{R_0 - d} = -q_0/q'$$

$$\phi(P_2) = 0 \rightarrow \frac{R + R_0}{R_0 + d} = -q_0/q'$$

Queste due equazioni in due incognite permettono di trovare q' e d in funzione di q0, R e R0.
Riscrivendo come

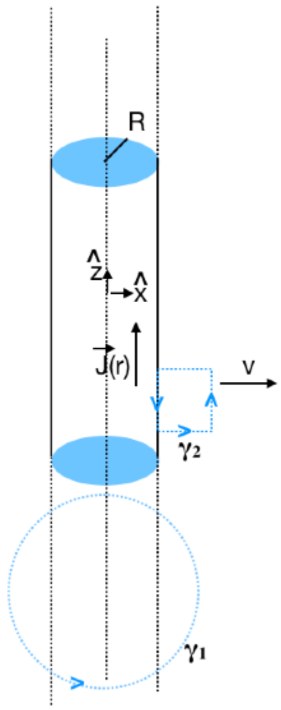
$q'(R - R_0) = -q_0(R_0 - d)\ e\ q'(R + R_0) = -q_0(R_0 + d)$ e sommando membro a membro si trova $q' = -q_0R_0/R.$

Allora, la carica totale indotta sulla sfera sara' l'integrale della densita' superficiale di carica $\sigma(P_s) = \epsilon_0 E_n(P_s)$ dove $E_n(Ps)\hat{r} = kq'\hat{r}'/r' + kq_0\hat{r}/r$ … problema abbastanza complicato in generale. Tuttavia, possiamo usare la legge di Gauss, applicata ad una superficie chiusa qualunque che contiene la sfera ma non q0.

Su tutti i punti della superficie gaussiana il campo elettrico reale e' calcolabile con il sistema di cariche fittizie. Quindi il flusso del campo elettrico e' calcolabile in modo indifferente nel sistema delle carica fittizie e nel sistema reale. La legge di Gauss ci dice che il flusso del campo attraverso la superficie e' uguale alla carica totale interna alla superficie divisa per la costante dielettrica del vuoto. Nel caso reale, la carica interna e' la carica indotta sulla sfera. Nel caso delle cariche immagine, la carica interna e' q'. Ne consegue che la carica totale indotta sulla sfera e' proprio pari a q', gia' determinato in funzione di R.

La seconda domanda e' di carattere teorico: dimostrare che la carica elettrica e' punto per punto nulla sulla superficie della cavita' di un conduttore all'equilibrio elettrostatico.

***Quesito 2 (fino a 8 + 8 punti)***




Si consideri un cilindro in figura di raggio R e lunghezza L >> R nel quale sia distribuita una densità volumetrica di corrente J(r)=a r /R diretta come l'asse del cilindro (sia r la distanza dall'asse).

1) Si calcoli il flusso del campo magnetico concatenato con i due circuiti $\gamma_1$ e $\gamma_2$ collocati in un piano che contiene l'asse del cilindro. ***(CdS Matematica, CdS Ingegneria Civile)***

Per calcolare il flusso attraverso γ2 occorre calcolare il campo magnetico in un punto generico estero al cilindro, prodotto dalla densita' di corrente. La distribuzione ha simmetria cilindrica quindi il campo magnetico dipendera' solo dalla distanza r dall'asse del cilindro e sara' diretto come il versore $\hat{\phi}$ di un sistema di coordinate cilindriche con asse coincidente con l'asse (z) del cilindro orientato nel verso della densita' di corrente.

Per calcolare il campo a una distanza r>R dall'asse applichiamo la legge di Ampere a una circonferenza di raggio r contenuta nel piano xy e con centro sull'asse z, orientata come $\hat{\phi}$.

$$\int_{\gamma} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{conc} = \mu_0 \int_{\Sigma_\gamma} \vec{J}\cdot d\vec{s}$$

$$B(r)2\pi r = \mu_0 \int_0^R a(r/R)\hat{z}\cdot 2\pi r dr\hat{z} = \frac{\mu_0\ a\ 2\pi}{R}R^3/3 = \frac{\mu_0\ 2\pi\ a\ R^2}{3}$$

quindi

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0\ a\ R^2}{3\ r}\hat{\phi}$$

Il flusso attraverso γ2 e' quindi pari a

$$\Phi(\vec{B})_{\Sigma_{\gamma_2}} = \int_{z_0}^{z_0+l_z}\int_R^{R+l_R} dr\frac{\mu_0 a R^2}{3r}\hat{\phi}\cdot(-dz\ dr\hat{\phi}) = -l_z\frac{\mu_0 a R^2}{3}\int_R^{R+l_R}\frac{dr}{r} = -l_z\frac{\mu_0 a R^2}{3}\ln\frac{R+l_R}{R}$$

Si noti il segno - che deriva dal fatto che γ2 e- orientato in senso antiorario (la normale alla superficie che ha come bordo γ2 e' - $\hat{\phi}$).

Il flusso concatenato con γ1 e' zero perche' ogni linea di campo di B che entra in una superficie che abbia come bordo γ1, ne esce => flusso netto 0.

2) Descrivere cosa accade al circuito (2) immaginando che si tratti di una spira conduttrice di resistenza R se all'istante di tempo t0 esso comincia a traslare con velocita' costante allontanandosi dall'asse del cilindro, partendo dalla posizione indicata in figura. ***(CdS Ingegneria Civile)***

Se la spira γ2 si muove con velocita' costante come indicato in figura, ossia il suo centro ha un'equazione del moto data da $r(t) = l_r/2 + vt$, allora il flusso calcolato in precedenza dipende dal tempo come

$$\Phi(\vec{B})_{\Sigma_{\gamma_2}}(t) = -l_z\frac{\mu_0 a R^2}{3}\ln\frac{r(t)+l_R}{r(t)}$$

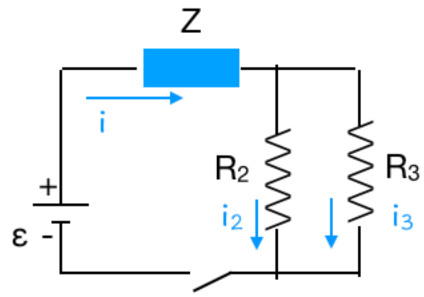
e pertanto per la legge di Faraday Neumann nella spira scorrera' una corrente variabile nel tempo data da $i_{ind} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$

Dalla legge di Lentz sappiamo che questa corrente deve scorrere in verso orario (con riferimento alla figura) per contrastare la diminuzione progressiva di flusso entrante nel piano della figura. Questo significa che i deve essere <0, dato il verso in cui e' orientata γ2. Controlliamo che questo sia il caso. Posto A=$l_z \frac{\mu_0 a R^2}{3} > 0$, si ha

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\Big(-A\ln\frac{r(t)+l_r}{r(t)}\Big) = A\frac{r(r)}{r(t)+l_r}\Big(-\frac{l_r}{r(t)^2}\Big)v < 0.$$

***Quesito 3 (fino a 8 punti)***

Nel circuito in figura l'interruttore e' chiuso all'istante di tempo t0=0.
Si calcoli
1) la corrente che scorre in R2 immediatamente dopo la chiusura del circuito;
2) la corrente che scorre in R3 asintoticamente;
3) il tempo t1 in cui la corrente in R3 e' pari a 1/10 del valore asintotico;
4) l'andamento nel tempo della corrente i3




Si utilizzino i valori *$R_2$ =100 Ω, $R_3$ = 200 Ω, ε = 10 V* e

*A) Z sia un condensatore di capacita' C= 10 nF* ***(CdS Matematica, CdS Ingegneria Civile)***

*B) Z sia una induttanza di valore L= 10 mH* ***(CdS Ingegneria Civile)***

Si osservi che R2 e R3 sono collegate in parallelo (la differenza di potenziale ai capi di R2 e' uguale alla differenza di potenziale ai capi di R3), Quindi per ogni successiva considerazione possono essere sostituite con Re = 1/ (1/R2 + 1/R3) = R2 R3 / (R2+R3) = 66.7 Ω. Inoltre la corrente i erogata dal generatore sara' i=i2+i3 e i2R2 = i3R3,
quindi i2 = R3 i / (R2+R3) e i3 = R2 i / (R2+R3).

Se Z e' un condensatore, il circuito e' un circuito di carica del condensatore con costante di tempo τ = CRe. Asintoticamente la carica accumulata sulle armature del condensatore bilancera' la differenza di potenziale prodotta dal generatore e la corrente eroga dal generatore sara' nulla. Pertanto la corrente in R3 sara' asintoticamente nulla. Appena chiuso l'interruttore invece non c'e' caduta di potenziale tra le armature del condensatore (Z si comporta in quel momento come un cortocircuito) => la corrente iniziale i(t0) = ε/Re e quindi i2(t0) = R3 (ε/Re) / (R2+R3), mentre i3(t) = [ R2 (ε/Re) / (R2+R3) ]$e^{-(t-t0)/R_eC}$, quindi questa sara' pari a 1/10 del valore iniziale quando $e^{-(\bar{t}-t_0)/R_eC} = 0.1$

Se Z e' un'induttanza, il circuito appena chiuso l'interruttore e' percorso da corrente nulla che cresce fino a portarsi al valore asintotico corrispondente alla sostituzione dell'autoinduttanza con un cortocircuito. Quindi i2(asint.) = R3 (ε/Re) / (R2+R3) e i3(asint.) = R2 (ε/Re) / (R2+R3).
L'andamento nel tempo della corrente i e' dato dall'equazione seguente:

$\epsilon - L\frac{di}{dt} = R_e i$ la cui soluzione e' $i(t) = \frac{\epsilon}{R_e}\big(1-e^{-R_e t/L}\big)$.

La corrente i3 e' pari a un decimo del valore asintotico nell'istante di tempo $\bar{t}$ tale che $0.9 = e^{-R_e\bar{t}/L}$ ossia $\bar{t} = -(L/R_e)\ \ln 0.9$

***Quesito 4 (fino a 8 punti)***

Si considerino due dipoli $\vec{p_1} = q_1 d_2 \hat{z}$ e $\vec{p_2} = q_2 d_2 \hat{z}$ collocati entrambi nel piano xy in punti distanti tra loro r. Si calcoli l'energia potenziale del dipolo 2 nel campo del dipolo 1 e la forza sul dipolo 2 nel caso in cui le cariche $q_1$ e $q_2$ siano di segno uguale o opposto.
Il dipolo 2 e' immerso nel campo elettrico prodotto dal dipolo 1. Chiamato x l'asse che congiunge i due dipoli, e posta l'origine nella posizione del dipolo 1, se r=x>>d1, d2, il campo e' dato

dall'espressione $\vec{E}(\vec{r}_2)$ = k $\frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r}_2)\vec{r}_2 - r_2^2\vec{p}_1}{r_2^5}$ dove il prodotto scalare e' nullo, perche' il dipolo e' parallelo a z e il vettore $\vec{r}_2$ e' un vettore del piano xy. Quindi $\vec{E}_1(\vec{r}_2) = -k\frac{\vec{p}_1}{r^3}$. L'energia potenziale di un dipolo immerso in campo elettrico e' data da $U_e = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ quindi nel nostro caso $U_e = k\frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1}{r^3}$ che e' >0 se le cariche sono i dipoli sono paralleli, <0 al contrario. Energia potenziale >0 => forza repulsiva sul dipolo 2. Confermiamo questo risultato calcolando esplicitamente la forza sul dipolo 2. Dal momento che siamo in regime conservativo, abbiamo $\vec{F}_2 = -\nabla U_e = = -\frac{dU_e}{dr}\hat{r} = 3k\frac{\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1}{r^5}\hat{r}$, quindi la forza diretta radialmente (uscente) dal centro di forza, che e' la posizione del dipolo 1, respinge il dipolo 2 se $\vec{p}_2 \cdot \vec{p}_1 > 0$ ($q_1q_2$>0) mentre lo attrae nel caso contrario.

***Quesito 5 (fino a 8 punti)***
Si discuta un argomento a scelta tra:

1) Derivazione del campo magnetico prodotto da una spira circolare percorsa dalla corrente stazionaria in un punto generico dell'asse.
2) Condizioni di continuita' e discontinuita' delle componenti del campo elettrico nell'attraversamento di uno strato superficiale di carica con densita' σ.
3) Definizione di capacita' di una coppia di conduttori generici e relazione con i coefficienti di potenziale.
4) Equivalenza tra spira percorsa da corrente e momento di dipolo magnetico.

**RICORDA:**

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ C²/Nm² = $8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, k = 1/ (4 π $\varepsilon_0$)= $9 \cdot 10^9$ Nm²/C²
|e| = $1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_{He} \simeq 4\, m_p$

Campo $\vec{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\frac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\vec{E}$ prodotto da un dipolo: $\vec{E}$(r,$\vartheta$) = k $\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$;

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}$(r,$\vartheta$) = $\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi$(r,$\vartheta$) = k$\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}i\frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$; $d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$