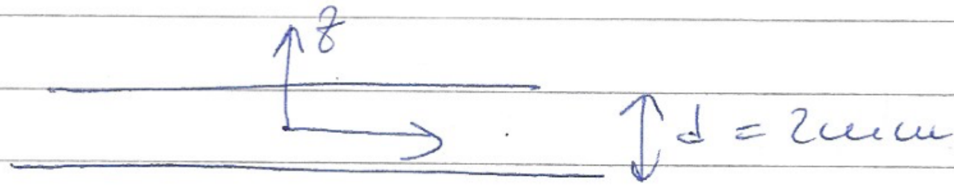
Q1 Scritto 35



$\rho = a z^2$

$a = 10\ C/m^5$

$\vec{E}(P) = ?$

E_k di un e^- che parte fermo da $z_0 = 1cm$

$\vec{E}(P) <$ P interno / P esterno alla distribuzione.

NOTA

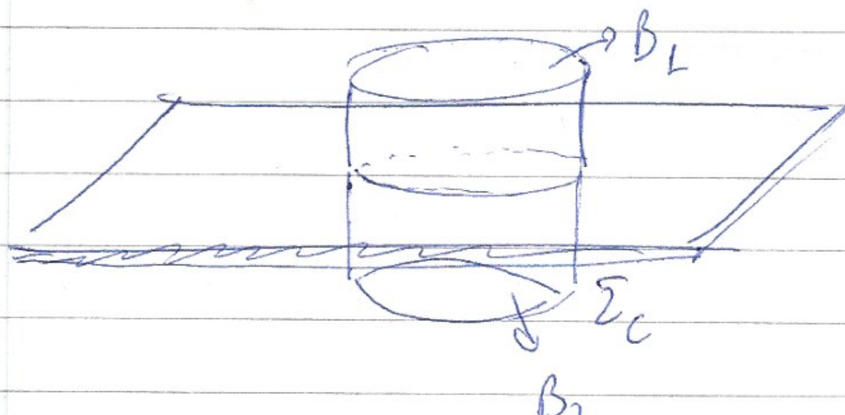
ρ dipende solo da z ed è mera funzione pari di z.

$\hookrightarrow \varphi(x,y,z) = \varphi(z) \Rightarrow \vec{E}(x,y,z) = E(z)\hat{z}$

Inoltre, siccome $\rho(z) = \rho(-z)$,

$$\vec{E}(z) = -\vec{E}(-z)$$

Quindi per calcolare $\vec{E}$ all'esterno, usiamo una superficie gaussiana cilindrica, per esempio, con le sue basi simmetriche rispetto al centro e parallele allo strato di carica.



$$\Phi_{\Sigma_c}(\vec{E}) = \frac{Q_{int\,\Sigma_c}}{\varepsilon_0}$$

Chiamiamo A l'area di base del cilindro

$$Q_{int\,\Sigma_c} = \int_{V_{\Sigma_c}} \rho(x,y,z)\, dV = A\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} a z^2 dz = A a \frac{z^3}{3}\Big|_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} =$$

$$= \frac{2}{3} A a \left(\frac{d}{2}\right)^3$$

(esempio) $\rightarrow x\, A = \cancel{}\ 100\ cm^2$

$$Q_{tot} = (10^{-2}\, m^2) \times 10\, \frac{C}{m^5} \times \frac{2}{3} \times (10^{-3})^3\, m^3 = 0.67 \times 10^{-10}\, C =$$
$$= 67\ pC$$

$$\Phi_{\Sigma_C}(\vec{E}) = \int_{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} =$$

$$\vec{E} \perp d\vec{S} \Rightarrow \int_{S_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$= \int_{B_1} E(z)\hat{z} \cdot dS\,\hat{z} + \int \underbrace{-E(z)\hat{z}}_{\vec{E}(-z)} \cdot dS(-\hat{z}) = 2E(z)A$$

Legge di Gauss $\Rightarrow$ $$2E(z)A = \frac{2}{3} a A \left(\frac{d}{2}\right)^3 \frac{1}{\varepsilon_0} \quad \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \rightarrow 4\pi k\right)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{2a}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 \frac{1}{2}\, 4\pi k\, \hat{z} =$$
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}$$

dove $$A\sigma = A\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} a z^2 dz = \frac{2Aa}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{2a}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3}$$

a distanze $z \gg d$ dallo strato ~~il campo~~ la distribuzione appare superficiale; il campo $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z}$

e $\Delta E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ è la variazione del campo nell'attraversamento della superficie.

$$\vec{E}(z) = \text{costante all'esterno} = \frac{a}{3}(10^{-3})^3\, 4\pi\, 9\times 10^9\, \frac{V}{m}\hat{z}$$

$$= \frac{10 \times 10^{-9}}{3} \times 4 \times \pi \times 9 \times 10^9\, \hat{z} \simeq 380\, \frac{V}{m}\hat{z}$$

All'esterno della distribuzione di carica si ha

$$\varphi(z) - \varphi(z_0) = -\int_{z_0}^{z} E_0 \hat{z}\cdot d\vec{l} = -E_0(z - z_0)$$

$\varphi(z) \downarrow$ $z_{\text{uscita dell'elettrone}}$ $\downarrow$ 1 cm

$\varphi(z_0) \downarrow$ $d/2$

$$E_{m\,i} = E_{m\,f}$$

$$\downarrow$$

$$E_{p\,i} = E_{k\,f} + E_{p\,f}$$

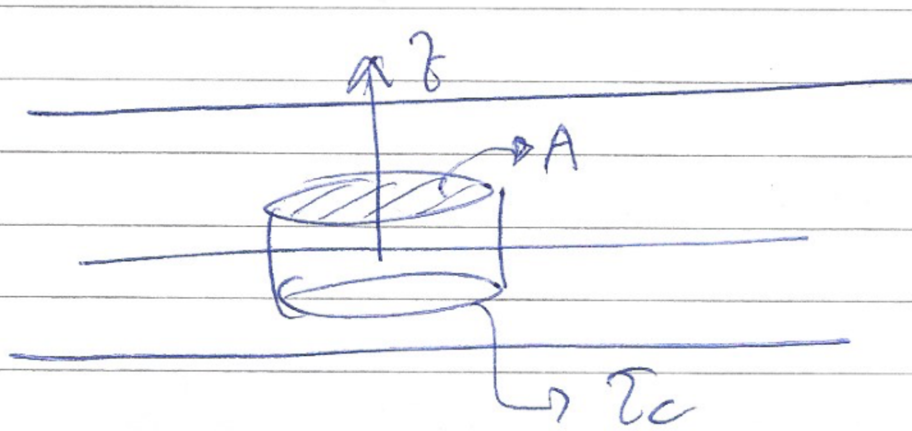
$$\boxed{E_{kf}} = E_{p\,i} - E_{p\,f} = -|e|\left(\varphi(z) - \varphi(d/2)\right) =$$

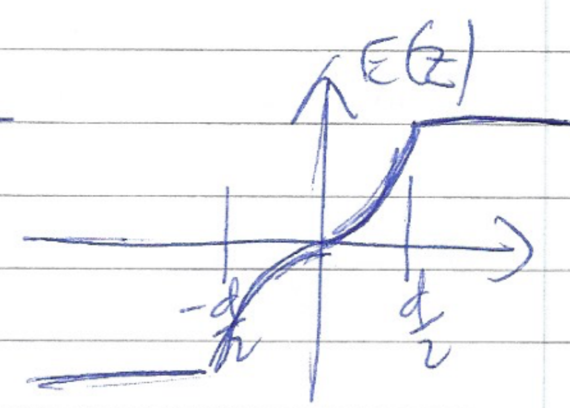
$$= +|e| \times \underbrace{E_0}_{380\ V/m} \times 0.009\ m = |e| \times 380\ V =$$

$$= \boxed{380\ eV}$$

$$\frac{E_{kf}}{E_m} = \frac{380}{511\times 10^3} \lesssim 10^{-3} \Rightarrow e^- \text{ non relativistico}$$

Campo $\vec{E}$ all'interno dello strato

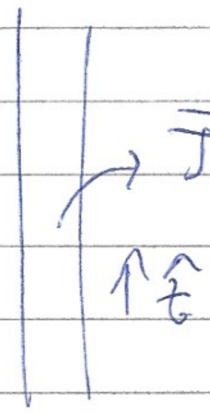




$$\Phi_{\Sigma_c}(\vec{E}) = 2E(z)A = \frac{Q_{int\,\Sigma_c}}{\varepsilon_0} = 4\pi k \times aA\int_{-z}^{z} z'^2 dz' =$$

$$= 4\pi k a A \frac{z^3}{3}\cdot 2 \Rightarrow \vec{E}(z) = 4\pi k a \frac{z^3}{3}\hat{z}$$

Q2 Scritto 35



$10\ A/m^2$

$\vec{J}(r) = J_0 \frac{r}{R}\hat{z}$

$R \rightarrow 1\,cm$

NOTA

$\vec{J}(\rho) = J(r)\hat{z} \Rightarrow$

$\vec{B} = B(r)\hat{\varphi}$

All'esterno $\Rightarrow$ usiamo la legge di Ampère considerando il circuito γ coassiale con il cilindro di raggio r per calcolare $\vec{B}(r)$

$$\oint_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_c = \mu_0 \int_{\Sigma_\gamma} \vec{J}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_0^R J_0 \frac{r\hat{z}}{R}\cdot 2\pi r\,dr\,\hat{z} =$$

$$= \frac{2\pi\mu_0 J_0}{R}\int_0^R r^2\,dr = \frac{2\pi\mu_0 J_0}{R}\frac{R^3}{3}$$

$$\oint B(r)\hat{\varphi}\cdot dl\,\hat{\varphi}$$

$$B(r)\,2\pi r = 2\pi\mu_0 \frac{J_0}{3}R^2$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{3r}\hat{\varphi} \Rightarrow = \frac{4\pi\times10^{-7}\times10^{-4}\,m^2 \cdot 10\,A/m^2}{3r}\hat{\varphi}$$

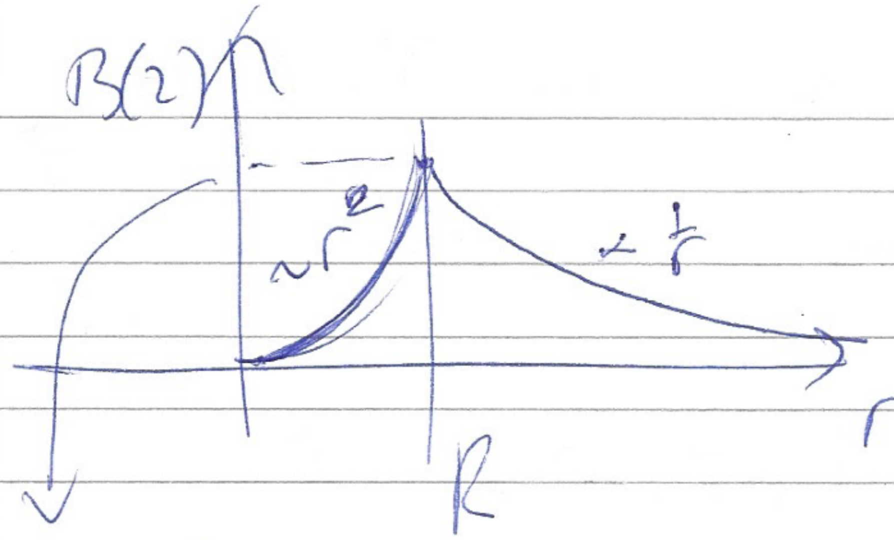
$$\simeq \frac{4\times10^{-10}}{r}\,T\,m\,\hat{\varphi}$$

All'interno (γ di raggio $r < R$)

$$2\pi r B(r) = \mu_0 \int_0^r J_0 \frac{r}{R}\,2\pi r\,dr = \mu_0 \frac{2\pi J_0 r^3}{3R}$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J_0}{3R} r^2\hat{\varphi} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times10\,r^2}{3\times10^{-2}} \simeq \hat{\varphi}\,4\times10^{-4} r^2 \frac{T}{m^2}$$

$$4\times10^{-4} r^2 \frac{T}{m^2}\hat{\varphi}$$



$4\times10^{-8}\,T$

$$\varphi \perp \hat{z}$$

$$\Phi_{\gamma_1}(\vec{B}) = \int_{\Sigma_{\gamma_1}} B(r)\hat{\varphi}\cdot dS\hat{z} = 0$$

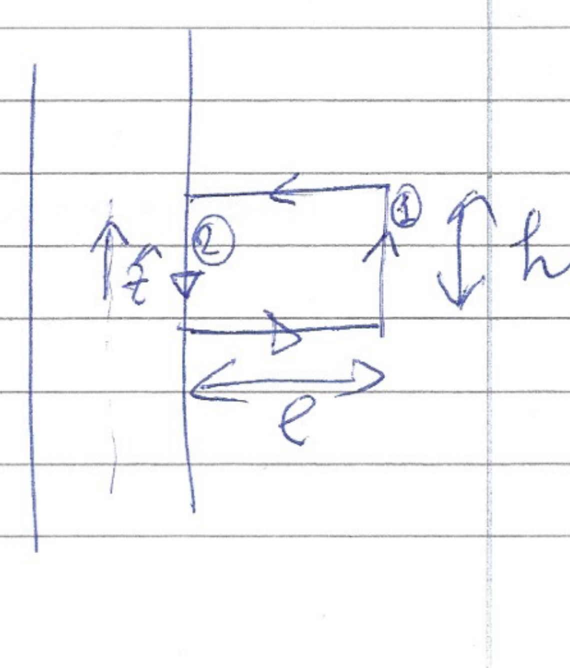
per esempio superficie piana circolare

$$d\vec{s} = h\,dr\,\hat{\varphi}$$

$$\Phi_{\gamma_2}(\vec{B}) = -\int_R^{l+R} \frac{B_0}{r}\hat{\varphi}\cdot h\,dr\,\hat{\varphi} =$$

$$= -B_0 h \int_R^{l+R} \frac{dr}{r} = -B_0 h \ln\frac{l+R}{R}$$

$B_0 = 4\times10^{-10}\,T\cdot m$

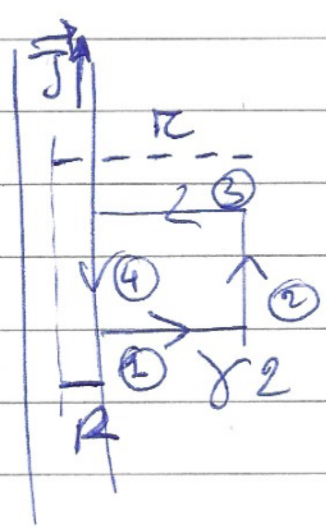


Calcolo di $\vec{A}$: si osservi che $\vec{A} = A(r)\hat{z}$ (parallelo a $\vec{J}$)

Si consideri, per esempio, il circuito γ_2

$$\underbrace{\int_{\Sigma_{\gamma_2}} \vec{B}\cdot d\vec{S}}_{\text{flusso di } \vec{B} \text{ concatenato con } \gamma_2} = \int_{\Sigma_{\gamma_2}} \nabla \wedge \vec{A}\cdot d\vec{S} \underset{\text{teorema di Stokes}}{=} \int_{\gamma_2} \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$$-\underbrace{B_0 h}_{4\times10^{-10}\ \mathrm{T \cdot m}} \ln\left(\frac{r}{R}\right) = \underbrace{\int_{②} \vec{A}\cdot d\vec{l}}_{A(r)h} + \underbrace{\int_{④} \vec{A}\cdot d\vec{l}}_{-A(R)h}$$



Quindi

$$\underset{r>R}{\vec{A}(r)} = \left(A(R) - B_0 \ln\left(\frac{r}{R}\right)\right)\hat{z}$$

analogamente all'interno.

$$V_A - V_B = \underset{\downarrow \atop 0.1A}{i}R + \frac{i}{2}R = \frac{3}{2} \cdot 0.1A \cdot 100\Omega = 15V$$

$$= \frac{3}{2}Ri$$

$$Q_C = (V_A - V_B)C = 100pF \times \frac{3}{2} \times 0.1A \times 100\Omega =$$

$$= 1.5nC$$

Nella fase di scarica

$$i(t) = I_0 e^{-t/2RC}$$

$$2RC = \tau = 2 \times 100\Omega \times 100pF = \boxed{20nS}$$

$$I_0 = \frac{Q_0}{2RC} = \frac{1.5nC}{20ns} = 0.075A$$

Nella prima fase del circuito

$$i = 0.1A \Rightarrow \underset{\uparrow}{J} \text{ nel filo di rame } = \frac{i}{\pi\left(\frac{r_0}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{0.1A}{\pi(0.25)^2 \times 10^{-6}\ m^2} \simeq \boxed{0.5 \times 10^6 A/m^2} \qquad r_0 = 0.5mm$$

$$J = nev \Rightarrow v = \frac{0.5 \times 10^6 A/m^2}{1.6 \times 10^{-19} \times 10^{23} \times 10^6 C/m^3} = \boxed{0.3 \times 10^{-4} m/s}$$

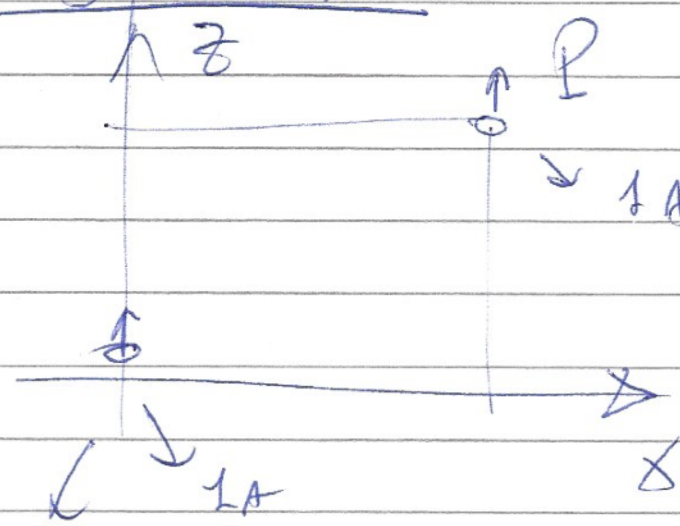
n → densità volumetrica di elettroni

Nei solidi $n \approx 10^{23}/cm^3$ → 1/atomo

densità di atomi $\Rightarrow \dfrac{\rho N_A}{A}$ — ρ → densità di massa → 8.98 g/cm³; N_A → numero di Avogadro; $= 0.86 \times 10^{23}$

A → peso atomico $= 63.5\ g/mol$

Q4 Scritto 35



$\vec{m} = i\underbrace{A}\hat{z} = 1A \times \pi \times 10^{-4}\, m^2\, \hat{z} = \pi \times 10^{-4}\, Am^2\, \hat{z}$

$\vec{B}(P)$ = costante nei punti della spira $\Rightarrow \vec{F}$ nulla (*)

E_p (spira 2 in P) $= -\vec{m}\cdot\vec{B} =$
$= -\pi \times 10^{-4}\, Am^2\, \hat{z}\cdot\vec{B}(P)$

$\vec{\tau} = \vec{m} \wedge \vec{B} \parallel \hat{y}$

$\Downarrow$

il momento di dipolo magnetico della spira 2 si orienterà ruotando nel piano xz fino ad allinearsi con la direzione del campo $\vec{B}$ in P.

$\downarrow$

non è nella posizione di equilibrio perché E_p è minima x $\vec{m} \parallel \vec{B}(P)$

(*) $\vec{F} = \oint_{(2)} i\, \underbrace{d\vec{l}} \wedge \vec{B}$

→ ad ogni $d\vec{l}$ corrisponde un tratto uguale orientato in modo opposto