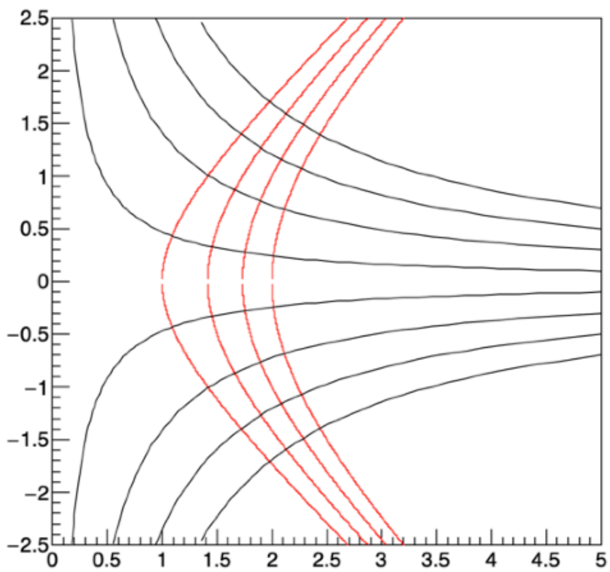
Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 37 - a.a. 2021-2022

Quesito 1 (fino a 8 punti)
Un nucleo di Ferro (numero atomico Z=26) puo' essere descritto come una distribuzione sferica uniforme di carica con raggio R=4 fm (1 fm = 10^{-15} m). Un protone si avvicina al nucleo in direzione radiale e ne raggiunge la superficie alla velocità *v.* Quale deve essere il valore minimo di di *v* affinché il protone raggiunga il centro del nucleo di Ferro. Si ricordi che la massa del protone e' m_p = 1.67 x 10^{-27} kg.
Il nucleo di Fe rappresenta una distribuzione omogenea di carica con densità costante; il protone nel momento in cui raggiunge la superficie del nucleo ha una energia meccanica totale $E_{totale} = E_{cinetica} + E_{pot.elettrica}$. Affinché il protone possa raggiungere il centro del nucleo bisogna che sia sufficientemente energetico; in particolare la condizione minima che deve essere soddisfatta è che raggiunga il centro con energia cinetica nulla. Quindi, nell'approssimazione non relativistica, in cui l'energia cinetica è pari a $E_{cinetica} = \frac{1}{2}mv^2$, dalla conservazione dell'energia meccanica si ha $v_{min}^2 = \frac{2|e|}{m_p}\Big(\phi(0) - \phi(R)\Big)$. Il potenziale elettrostatico nei punti interni alla sfera uniformemente carica dipende da r^2 visto che il campo elettrico e' lineare con r; in particolare si ha $\phi(0) - \phi(R) = \int_0^R dr\frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \int_0^R dr\frac{Z|e|r}{4\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{26|e|}{8\pi\epsilon_0 R}$.
Allora $v_{min}^2 = \frac{1.6^2 \times 10^{-38} \times 26}{1.67 \times 10^{-27} \times 4\pi\epsilon_0 \times 4 \times 10^{-15}} m^2/s^2 \simeq \frac{4 \times 10^{-38} \times 26 \times 10^9}{10^{-27} \times 10^{-15}} m^2/s^2$ $\simeq \frac{10^{-37} \times 10^{10}}{10^{-27} \times 10^{-15}} m^2/s^2 = 10 \times 10^{14} m^2/s^2$. Quindi $v_{min} \simeq 3.2 \times 10^7 m/s \simeq c/10$. Si osservi che l'approssimazione non relativistica non e' valida perche' questa velocità e' prossima alla velocità della luce, quindi il calcolo che abbiamo effettuato non e' completamente corretto.

Quesito 2 (fino a 10 punti)
In una regione dello spazio si osserva l'andamento del potenziale elettrostatico V(x,y) = a (x^2 - y^2).
Si calcoli il campo elettrico in ogni punto di questa regione. Considerato un cilindro con asse coincidente con l'asse z, raggio R e altezza h, si calcoli la carica totale contenuta nel cilindro e l'energia elettrostatica immagazzinata nella regione dello spazio corrispondente a tale cilindro.



Il campo elettrico puo' essere ottenuto calcolando il gradiente cambiato di segno del potenziale elettrostatico $\vec{E} = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{y}$ $= -2a(x\hat{x} - y\hat{y})$ e $|\vec{E}| = 2ar$.
Le curve si livello del potenziale elettrostatico sono le iperboli $y = \pm\sqrt{x^2 - k/a}$. Nel 1o e 4o quadrante del piano cartesiano x-y, le curve di livello del potenziale sono illustrate in rosso in figura (per a = 2 e valori del potenziale pari a 2, 4, 6 e 8). In nero sono disegnate le linee di campo, ottenute con un algoritmo numerico iterativo (si veda il riquadro). La densita' di carica e' data

dalla legge di Gauss $\rho = \epsilon_0 \, \nabla \cdot \overrightarrow{E}$, perciò $\rho = \epsilon_0(-2a + 2a) = 0$. Quindi l'integrale di carica nel cilindro considerato e' nullo. L'energia elettrostatica nella regione considerata e' $U_e = \dfrac{\epsilon_0}{2} \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r d\phi \; dr \; dz |\overrightarrow{E}|^2$

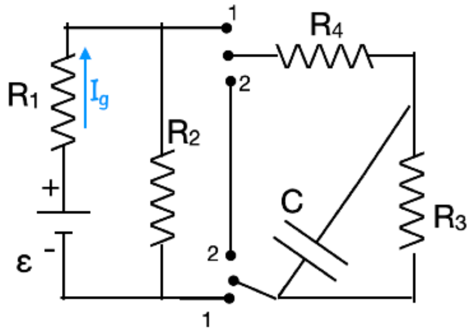
$$= 4\epsilon_0 \pi h a^2 \int_0^R dr r^3 = \epsilon_0 \pi h a^2 R^4$$

```
void drawFieldLine(double x, double y)
{
  TLine * myline = new TLine(x,y,x,y);
  double dt = 0.01;
  double gradx = 0.;
  double grady = 0.;
  double xn, yn;
  for (int i=0; ; ++i)
   {
     gradx = -2 * a * x;
     grady =  2 * a * y;
     xn = x+gradx*dt;
     yn = y+grady*dt;
     std::cout<<xn<<"  "<<yn<<std::endl;
     if (xn>5. || fabs(yn)>2.5) break;
     myline->DrawLine(x,y,xn,yn);
     if (i >1000) break;
     x = xn;
     y = yn;
   }

}
```

Quesito 3 (fino a 8 punti)

Si consideri il circuito in figura che opera da molto tempo con gli interruttori nelle posizioni 1. Si calcoli la potenza dissipata nel resistore R_2 e la carica accumulata sulle armature del condensatore. Ad un certo istante di tempo gli interruttori si spostano nelle posizioni 2 contemporaneamente. Si calcoli dopo quanto tempo la carica sulle armature del condensatore si dimezza.



Quando il circuito opera con entrambi gli interruttori nelle posizioni 1, a regime il circuito equivale al generatore connesso a un resistenza equivalente complessiva pari a R1 in serie con il parallelo di R2 e la serie di R3 e R4, ossia

$R_{eq} = \dfrac{(R_3 + R_4)R_2}{R_2 + R_3 + R_4} + R_1$. La corrente nel ramo del generatore e' $i_g = \epsilon / R_{eq} = i_2 + i_{34}$ (eq1). D'altra parte $i_2 * R_2 = i_{34} * (R_3 + R_4)$ (eq2). Quindi le due equazioni consentono di ricavare i_2 e i_{34} in funzione dei valori delle resistenze e della forza elettromotrice ε.

$i_g = i_{34} + i_{34} * (R_3 + R_4)/R_2$

$i_g = i_{34}\Big(1 + (R_3 + R_4)/R_2\Big)$, quindi $i_{34} = i_g \dfrac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4}$ e $i_2 = i_g \dfrac{R_3 + R_4}{R_2 + R_3 + R_4}$.

La carica sulle armature del condensatore sara' pari a $Q = C \; i_{34} * R_3$ e la potenza dissipata su R2 e' $r_2 \; i_2^2$. Quando gli interruttori si portano sulle posizioni 2, la carica cambierà nel tempo come $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{R_{eq}^s C}}$ dove $R_{eq}^s = \dfrac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$. Il tempo dopo il quale la carica si dimezza e'

$t_{1/2} = - R_{eq}^s \; C \ln 0.5 = 0.69 \; R_{eq}^s \; C.$

Quesito 4 (fino a 10 punti)

Un conduttore cilindrico cavo di lunghezza L, raggio interno ed esterno pari a R_0 e $2R_0$, con $L >> R_0$, e' percorso da una densità di corrente $\overrightarrow{J} = J_0(r/R_0)\hat{z}$ (l'asse z coincide con l'asse del cilindro). Si calcoli il campo magnetico in ogni punto dello spazio e l'energia potenziale di una spira circolare alla distanza d >> R_0 dall'asse del cilindro di raggio r << d percorsa dalla corrente *i* e contenuta in un piano che forma un angolo di 30° con il piano perpendicolare al cilindro.

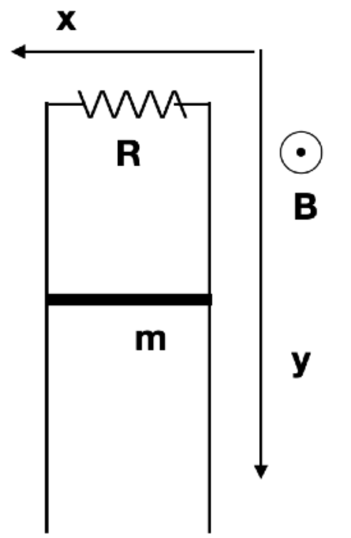
Il sistema manifesta simmetria cilindrica: tutte le grandezze fisiche dipendono solo dalla distanza dall'asse, il potenziale vettore e' diretto come z e il campo magnetico e' diretto come $\hat{\phi}$. La legge di Ampere applicata ad una circonferenza γ di raggio r coassiale alla distribuzione di corrente permette di calcolare il modulo di B: $\displaystyle\oint_\gamma \overrightarrow{B} \cdot d\overrightarrow{l} = \oint_\gamma B(r)\hat{\phi} \cdot r d\phi \hat{\phi} = 2\pi r B(r)$. La corrente concatenata con il circuito e' 0 se r<R0, e $\int_{\Sigma_r} \vec{J} \cdot ds\hat{z}$ altrimenti. Per R0<r<2R0, Ic = $\int_{R_0}^{r} \frac{J_0}{R_0} r 2\pi r dr = \frac{2\pi J_0}{3R_0}\left(r^3 - R_0^3\right)$. Per Per r>=2R0, Ic = $\int_{R_0}^{2R_0} \frac{J_0}{R_0} r 2\pi r dr = \frac{14\pi J_0 R_0^2}{3}$.

Quindi il campo magnetico sara' nullo per r<R0, per R0<r<2R0, $\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0}{3}\left(\frac{r^2}{R_0} - \frac{R_0^2}{r}\right)\hat{\phi}$, infine per r>=2R0 si ha $\vec{B} = \frac{7\mu_0 J_0 R_0^2}{3r}\hat{\phi}$. L'energia potenziale di una spira in campo magnetico e' $U_m = -\vec{m} \cdot \vec{B}$. Valuteremo il campo magnetico solo al centro della spira, visto che r << d. Quindi

$$U_m = -i\pi r^2 \hat{n} \cdot \vec{B}(d) = -\frac{7i\pi r^2 \mu_0 J_0 R_0^2}{6d} \text{ se per esempio } \hat{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z} + \frac{1}{2}\hat{\phi}.$$

Quesito 5: (fino a 10) - solo Ing. Biomedica

In una regione dello spazio in cui e' presente il campo magnetico uniforme $\vec{B} = B_0\hat{z}$ si trovano due guide conduttrici verticali collegate da un resistore di valore *R* e da una bacchetta conduttrice di massa *m* che puo' scorrere senza attrito lungo le guide. Si studi il moto della bacchetta.



L'equazione del moto del moto della bacchetta e' determinata dalla forza peso e dalla forza che agisce su si essa in quanto e' percorsa da corrente e immersa in un campo magnetico. La corrente *I* e' indotta dal fatto che quando la barretta scivola verso il basso l'area definita dal circuito costituito dalle guide la barretta e il resistore cresce e quindi cambia nel tempo il flusso di campo magnetico concatenato con il circuito. Quando le due forze si bilanciano si raggiunge una velocità limite.
Orientato il circuito in senso antiorario, in un piccolo intervallo di tempo in cui la barretta si abbassa del tratto dy, $d\Phi(\vec{B}) = l\ dy\ B$, perciò $I = -\frac{lBv(t)}{R}$ e questa corrente indotta scorre in senso orario, ossia opposto (come indicato dal segno di *I*) rispetto al verso di percorrenza che abbiamo fissato per il circuito. La forza magnetica sulla barretta e' $\vec{F} = Il(-\hat{x}) \cdot \vec{B} = IlB_0\hat{y}$.

L'eq del moto della barretta e' dettata dalla $mg + IlB_0 = ma => ma = 0 = mg - \frac{l^2B_0^2 v(t)}{R}$.

La velocita' limite e' data da $v(t) = \frac{Rmg}{l^2B_0^2}$.

Quesito 6: (fino a 8)

Si discuta un argomento a scelta tra:
- schermo elettrostatico, dimostrazione e discussione del fenomeno;
- dall'equazione di Ampere all'equazione di Ampere Maxwell (solo Ing. Biomedica);
- effetto di induttanza in un circuito in accensione (solo Ing. Biomedica);
- Il potenziale di dipolo;
- calcolo della capacita' di una coppia di conduttori in funzione dei coefficienti di potenziale;
- moto di una carica elettrica in un campo magnetico uniforme.