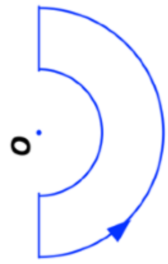
Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 38 - a.a. 2021-2022

Quesito 1 (fino a 8 punti)



Si calcoli il campo magnetico nel punto O del circuito indicato in figura, percorso dalla corrente i = 10 A, con raggi di 5 e 10 cm.

Occorre integrare sul circuito la II formula di Laplace $d\vec{B}(O) = i\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$.

I tratti rettilinei, in cui gli elementi infinitesimi di circuito $d\vec{l}$ e il vettore $\vec{r}$ che loi congiunge a O sono paralleli o anti-paralleli tra loro, danno contributo nullo.

La semicirconferenza esterna da $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} i\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{R_e d\phi\hat{\phi} \wedge (-R_e\hat{r})}{R_e^3} = i\frac{\mu_0}{4R_e}\hat{z}$, mentre quella interna $-\int_{-\pi/2}^{\pi/2} i\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{R_i d\phi\hat{\phi} \wedge (-R_i\hat{r})}{R_i^3} = -i\frac{\mu_0}{4R_i}\hat{z}$.

Quindi il campo magnetico in O vale $\vec{B}(0) = i\frac{\mu_0}{4}\frac{R_i - R_e}{R_i R_e}\hat{z} = 10A\frac{4\pi \times 10^{-7}H/m}{4}\frac{5-10}{5 \times 0.1m}\hat{z}$ $= -\pi \times 10^{-5}\ \mathrm{T}\ \hat{z}$. Il segno negativo indica che vettore il campo magnetico e' entrante nel piano della figura.

Quesito 2 (fino a 10 punti)

Una sfera di raggio $R_s = 10\ \mathrm{cm}$ contiene una quantità di carica elettrica pari a $Q_s = 10\ \mathrm{nC}$ distribuita uniformemente nel volume della sfera. Essa e' collocata al centro di un guscio sferico conduttore di raggi, interno ed esterno, pari rispettivamente a $R_i = 15\ \mathrm{cm}$ e $R_e = 20\ \mathrm{cm}$.

1) Si calcoli il potenziale elettrostatico nel centro di simmetria del sistema O e la densità superficiale di carica sulla superficie esterna della sfera conduttrice, se il conduttore e' elettricamente neutro.

2) Come cambia il potenziale elettrostatico nel punto O e la densità superficiale di carica sulla superficie esterna del conduttore se esso e' mantenuto al potenziale $\phi_c = 100\ \mathrm{V}$?

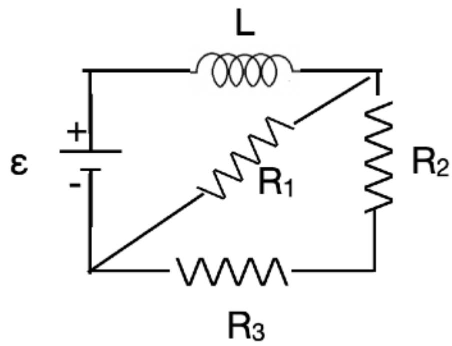
All'interno del conduttore cavo e nella cavita' il campo elettrico e' nullo => la carica Q_i indotta sulla superficie interna della cavita' e' uguale all'opposto della carica depositata nella sfera interna $Q_i = -Q_s = -10\ \mathrm{nC}$. Sulla superficie esterna del conduttore la carica e' $Q_e = Q_s + Q_c$ dove Q_c e' la carica complessiva sul conduttore. Dal momento che che il sistema e' a simmetria sferica il campo elettrico e'

	Campo elettrico $\vec{E}$
r > Re	$k\frac{Q_c + Q_s}{r^2}\hat{r}$
$R_i < r < R_e$	$\vec{0}$
$R_s < r < R_i$	$k\frac{Q_s}{r^2}\hat{r}$
r < Ri	$\frac{\rho\vec{r}}{3\epsilon_0} = k\frac{Q_s\vec{r}}{R_s^3}$

Il potenziale elettrostatico

	Potenziale elettrostatico ϕ	
r > Re	$k\dfrac{Q_c+Q_s}{r}$	
$R_i < r < R_e$	$k\dfrac{Q_c+Q_s}{R_e} = k\dfrac{Q_c}{R_e} + 9\times 10^9 \times 10^{-8}/0.2 = 450V + k\dfrac{Q_c}{R_e}$	$\phi_c = 100V$ e $Q_c = -7.7\text{nC}$ $\phi_c = 450V$ e $Q_c = 0$
$R_s < r < R_i$	$\phi(R_i) + \int_r^{R_i} \vec{E}\cdot d\vec{r} = k\dfrac{Q_c}{R_e} - 150V + k\dfrac{Q_s}{r}$	
r < Ri	$k\dfrac{Q_c}{R_e} + 750V + k\dfrac{Q_s}{R_s^3}\int_r^{R_s} r dr = k\dfrac{Q_c}{R_e} + 1200V - k\dfrac{Q_s r^2}{2R_s^3}$	$Q_c = 0$ e $\phi(0) = 1200V$; $Q_c = -7.7nC$ e $\phi(0) = 850V$;

Quesito 3 (fino a 10 punti; per il CdL di Matematica si ignori [sostituisca con un cortocircuito] l'autoinduttanza L)



Il circuito in figura opera dal tempo t = 0 in cui un interruttore sul ramo del generatore e' stato chiuso. Si calcoli:

1) l'andamento nel tempo della corrente che scorre in R1 ***(solo per Ing. Biomedica)***;
2) Il valore ***asintotico*** della corrente nei vari rami;
3) La velocita' di deriva degli elettroni di conduzione e il campo elettrico nel conduttore assumendo che esso sia costituito da argento Ag (Z=47 , A=108 g/mole, ρ=10.5 g/cm^3 , σ=63×10^6 Ω^{-1}m^{-1}) e abbia una sezione costante pari a 0.25 mm^2.

Si assuma: R1 = 300 Ω, R2 = 200 Ω, R3 = 400 Ω, ε = 1 V, L=100 nH (si ricordi che 1 H (Henry) = 1V x 1A^{-1} x 1s).

Nel circuito asintotico l'autoinduttanza e' sostituita da un corto circuito. Le resistenze R2 e R3 sono in serie, R23 = R2+R3 = 600 Ω e R23 e' in parallelo con R1, quindi la resistenza equivalente complessiva e' Req = R1R23/(R1+R23) = 200 Ω. La corrente (asintotica) che scorre nel ramo del generatore e' Ig = 5 mA = I1+I23. Inoltre I23xR23 = I1xR1; 5mA = I1 (1 + R1/R23), Quindi I1 = 3.33 mA, I2 = 1.67 mA.

L'eq del circuito per ottenere l'andamento nel tempo di Ig e' $\epsilon - L\dfrac{di_g}{dt} = i_g R_{eq}$. Quindi

$$\epsilon - i_g R_{eq} = L\frac{di_g}{dt} \text{ ossia } \frac{di}{\epsilon - i_g R_{eq}} = \frac{1}{L}dt$$

Integrando tra t e 0 (e quindi tra Ig(t) e 0) si ha

$$-\frac{1}{R_{eq}}\ln\frac{\epsilon - i_g R_{eq}}{\epsilon} = \frac{1}{L}t \text{ cioe'}$$

$$1 - i_g(t)\frac{R_{eq}}{\epsilon} = e^{-t/(L/R_{eq})}$$

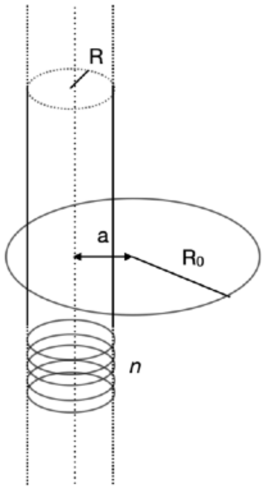
$$i_g(t) = \frac{\epsilon}{R_{eq}}(1 - e^{-t/(L/R_{eq})}) = 5\text{mA } (1 - e^{-t/(L/R)})$$

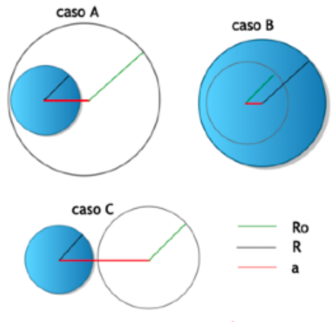
$L/R = 100 \text{ nH}/200\ \Omega = 0.5\times 10^{-9} \text{ s} = 0.5 \text{ ns}$, quindi pochi nanosecondi dopo la chiusura del circuito le correnti assumono il valore asintotico, il regime transiente e' molto veloce.

La velocita' di deriva si ricava da $j = nev_d$ dove $j = i/A = 5\ \mathrm{mA}/(0.25\times 10^{-6}\mathrm{m}^2)$=20kA/m². e=$1.6\times10^{-19}$C e infine n = densità volumetrica di elettroni liberi = densità volumetrica di atomi => n = Na x numero di moli per unita' di volume = Na x densita' volumetrica di massa / massa di una mole = Na x densita' di massa / peso atomico => n= Na ρ / A.

Quindi $v_d = \dfrac{20\mathrm{kA/m^2}\ 108\mathrm{g/mole}\ 10^{-6}\mathrm{m^3/cm^3}}{6\times10^{23}/\mathrm{mole}\ 10.5\mathrm{g/cm^3}\ 1.6\times10^{-19}\mathrm{C}} = \simeq 2\times10^{-6}\mathrm{m/s} = 2\ \mu\mathrm{m/s}.$

Il campo elettrico e' dato dalla relazione $\vec{J} = \sigma\vec{E}$, quindi $E = J/\sigma = \dfrac{2\times10^4\mathrm{A/m^2}}{63\times10^6\ \Omega^{-1}m^{-1}}$ = 3×10^{-4} V/m.





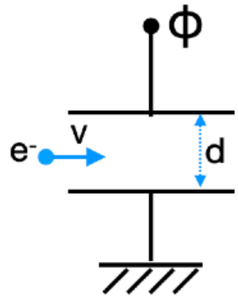
Quesito 4 (fino a 8 punti)
Si calcoli il coefficiente di mutua induzione tra i due circuiti nella figura a sinistra: il solenoide, di lunghezza L >> R (raggio) e con densita' lineare di spire n, e la spira circolare, di raggio R_0 con asse parallelo a quello del solenoide a distanza *a.* Si considerino i tre casi A, B, C (vista in sezione).

$\Phi_{spira}(\vec{B}_{sol}) = i_{sol}M$ e inoltre

$\Phi_{solenoide}(\vec{B}_{spira}) = i_{spira}M.$

Conviene utilizzare la prima relazione; nel caso A, si trova che M = $\mu_0 i_{sol} n\ \pi R^2 / i_{sol} = \mu_0 n\ \pi R^2$; nel caso B, M=$\mu_0 n\ \pi R_0^2$; nel caso C, M=0.

Quesito 5: (fino a 10)
Nella figura a destra, il condensatore ad armature quadrate e parallele di area $A = 0.1\ \mathrm{m}^2$ a distanza $d = 2\ \mathrm{cm}$ ha una delle armature collegata a massa e l'altra mantenuta al potenziale $\phi = 1\ \mathrm{V}$. Si calcoli la carica sulle armature, l'energia elettrostatica e il campo elettrico all'interno del condensatore. Si dimostri che integrando la densita' di energia associata al campo elettrico sul volume del condensatore si ottiene l'energia elettrostatica. Infine, considerato un elettrone che entra nel condensatore con velocita' orizzontale di 0.3×10^8 m/s, inizialmente alla stessa distanza dalle due armature (y=0), stabilire qual e' la posizione y e l'angolo θ di deflessione all'uscita dal condensatore.



La capacita' del condensatore e'
C = $\epsilon_0 A/d = 4\pi\epsilon_0 A/(4\pi d) = 0.1/(9\times10^9\times4\pi\times0.02) = 44\times10^{-12}$ F = 44 pF.
Quindi sull'armatura in alto c'e' una carica Q pari a Q = 44 pC.
L'energia del condensatore e' Ue = $Q\Delta V/2 = 22\times10^{-12}$J.
IL campo elettrico all'interno del condensatore e' uniforme e diretto verso il basso con modulo pari a E = V/d = 1 V / 0.02 m = 50 V/m.

Ue = $\dfrac{\epsilon_0}{2}\displaystyle\int_V dV|\vec{E}|^2 = \dfrac{1}{8\pi\ k}\int_V dV|\vec{E}|^2 =$

$= 25\times10^2\ \mathrm{V^2/m^2}\times0.1\times0.02\ \mathrm{m^3}/(8\pi\times9\times10^9\mathrm{F/m}) = 22\times10^{-12}$ J.

L'elettrone e' soggetto ad una accelerazione costante verso l'alto pari a

$a = \dfrac{1.6\times10^{-19}\mathrm{C}\times50\ \mathrm{V/m}}{10^{-30}\ \mathrm{kg}}$ = 8×10^{12} m/s². Il moto sara' parabolico. Pertanto percorre nella direzione orizzontale la distanza di $\sqrt{A} = 0.32$ m nel tempo di $\Delta t = 0.32/(0.3 \times 10^8 \mathrm{m/s}) \simeq 10$ ns in cui si sposta in verticale, verso l'alto, di $\Delta y = a(\Delta t)^2/2 = 8 \times 10^{12}\ m/s^2 \times 100 \times 10^{-18} s^2/2 = 400\ \mu m$, quindi esce dal condensatore proseguendo di moto rettilineo uniforme in una direzione che forma un angolo, rispetto alla direzione originale (all'ingresso del condensatore) di

$$\tan\theta = v_y/v_x = \frac{10ns \times 8 \times 10^{12} m/s^2}{0.3 \times 10^8\ m/s} = 2.67 \times 10^{-3} \sim \theta$$

Quesito 6: (fino a 8)
Si discuta un argomento a scelta tra:
- Le equazioni di Poisson e Laplace;
- La legge di Faraday Neumann; ***(solo ing. biomedica)***
- Equivalenza tra una spira percorsa da corrente e momento di dipolo magnetico;
- Si dimostri che all'esterno di una distribuzione di corrente a simmetria cilindrica il campo magnetico e' proporzionale a 1/r dove r e' la distanza dall'asse di simmetria.
- Descrivere l'interazione tra i due dipoli elettrici $\vec{p}_1 = p_0\hat{z}$ e $\vec{p}_2 = -p_0\hat{z}$ collocati il primo nell'origine e il secondo alla distanza a lungo l'asse z o lungo l'asse x.

Formule e costanti:
$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ C^2/Nm^2 = $8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, $k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2
$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_{He} \simeq 4\, m_p$,
Numero di Avogadro $N_A = 6.022 \times 10^{23}$

Campo $\vec{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\dfrac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\vec{E}$ prodotto da un dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\dfrac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$;

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r,\vartheta) = k\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} i \dfrac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$; $\quad d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$

Campo $\vec{E}$ prodotto da una carica puntiforme in moto con velocità $\vec{v}$: $\dfrac{kq}{r^2}\dfrac{1-\beta^2}{(1-\beta^2\sin^2\theta)^{3/2}}\hat{r}$