

Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 40 - a.a. 2021-2022

Quesito 1 (fino a 8 punti)

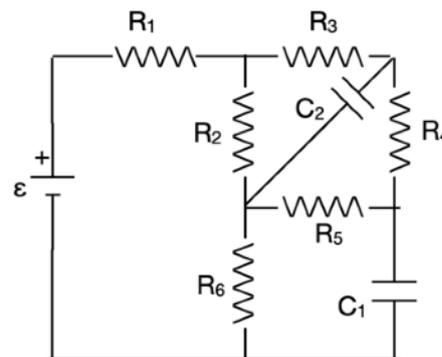
Determinare la d.d.p. ai capi del condensatore di capacità C_1 in condizioni di regime e la carica accumulata sulle armature se la sua capacità è pari a $10\mu\text{F}$.

Si assumano i seguenti valori per i parametri del circuito:

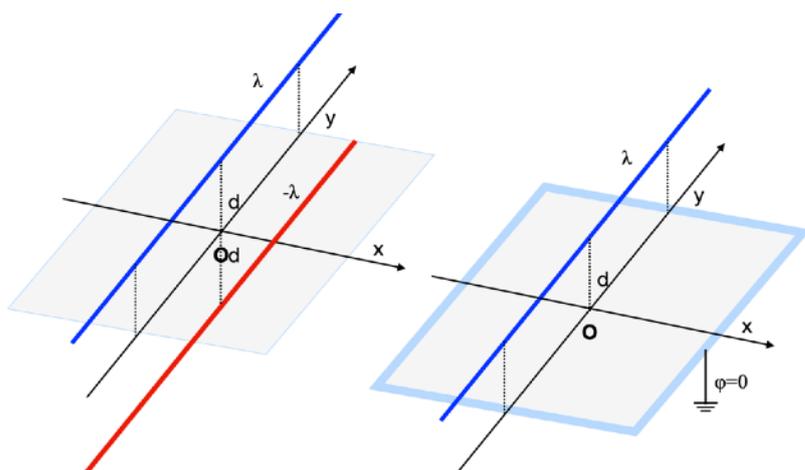
$R_1=3\Omega$, $R_2=10\Omega$, $R_3=2\Omega$, $R_4=5\Omega$, $R_5=3\Omega$, $R_6=4\Omega$, $\varepsilon=12\text{V}$, $C_2=0.2\text{nF}$.

A regime non scorre corrente nei rami con i condensatori. Quindi a regime, R_3 , R_4 e R_5 sono attraversate dalla stessa corrente I_3 ; R_2 e' attraversata da una corrente I_2 che sommata a I_3 da la corrente I_g che circola nel ramo con generatore, R_1 e R_6 . La differenza di potenziale V_{C1} ai capi di C_1 e' quindi uguale a $V_{C1} = I_3R_5 + I_gR_6$.

Per calcolare I_g si determina la resistenza equivalente di tutto il circuito $R_{eq} = R_1 + R_6 + R_2(R_3+R_4+R_5)/(R_2+R_3+R_4+R_5) = 3+4+10*10/20 = 12 \Omega$. => $I_g = 1 \text{ A}$. Inoltre $I_3 = I_2 = 0.5 \text{ A}$ perche' $R_2 = R_3+R_4+R_5$ => $V_{C1} = 3/2 + 4 = 5.5 \text{ V}$. $Q_{C1} = 55 \mu\text{C}$.



Quesito 2 (fino a 10 punti)



Dimostrare che il campo elettrico nelle due situazioni in figura coincide per tutti i punti a $z > 0$, cioè al di sopra del piano. A destra il piano rappresenta la superficie (infinitamente estesa) di un conduttore mantenuto a potenziale nullo, la retta in blu rappresenta una distribuzione di carica con densità lineare λ di lunghezza infinita, parallela all'asse y (che giace sul piano) e a distanza d da esso. A sinistra invece abbiamo due fili infiniti con densità λ e $-\lambda$ paralleli tra loro ed entrambi a distanza d dall'asse y .

La situazione a destra per lo spazio $z > 0$ rappresenta un problema generale dell'elettrostatica alla Dirichlet in cui la

condizione al contorno sulla superficie piana infinita del conduttore e sulla superficie all'infinito e' $\phi = 0$. L'equazione a cui soddisfa il potenziale elettrostatico e' $\nabla^2 \phi = 0$ e l'altra condizione e' che nei pressi del filo il potenziale abbia lo stesso andamento che si ha in assenza del piano conduttore. L'unicita' della soluzione del problema di Dirichlet implica che un sistema di sorgenti differente che pero' produca le stesse condizioni al contorno da luogo alla stessa configurazione dei campi nello spazio di interesse. Nella configurazione a sinistra si ha per il potenziale elettrostatico e per il campo elettrico che in ogni punto dello spazio essi sono uguali alla somma dei due campi (elettrico e potenziale elettrostatico) prodotti dai due fili.

Un filo infinite con densita' di carica λ produce un potenziale elettrostatico che come superfici equipotenziali superfici cilindriche con asse coincidente con il filo. Pertanto il vettore campo elettrico e' contenuto nel piano perpendicolare al filo e diretto in direzione radiale uscente o entrante e dipende solo dalla distanza dal filo. In coordinate cilindriche, applicando Gauss a una superficie cilindrica con asse sul filo, dato che solo la superficie laterale contribuisce al flusso del

campo E si ha $\Phi(\vec{E}) = 2\pi r h E(r)$. Inoltre, $Q_{int,\Sigma} = h\lambda$, quindi $\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r} \hat{r}$. Il potenziale

elettrostatico e' dato da $\phi(r) - \phi(d) = - \int_d^r \vec{E}(r) \cdot d\vec{l} = - \int_d^r \frac{\lambda}{2\pi r} dr = \frac{\lambda}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{d}\right)$. Posto arbitrariamente $\phi(d) = 0$, si ha $\phi(r) = \frac{\lambda}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{d}\right)$.

Quindi nel caso a sinistra il potenziale elettrostatico in un punto generico dello spazio e'

$\phi_{Tot}(P) = \frac{\lambda}{2\pi} \ln\left(\frac{r_+}{d}\right) - \frac{\lambda}{2\pi} \ln\left(\frac{r_-}{d}\right) = \frac{\lambda}{2\pi} \ln\left(\frac{r_+}{r_-}\right)$ dove r_+ e r_- sono le distanze del punto P dal filo con densita' di carica λ e $-\lambda$ rispettivamente. Si osserva che ogni punto P' del piano $z=0$ e' tale che $r_+ = r_-$ quindi $\phi_{Tot}(P'_{z=0}) = 0$. Sulla superficie all'infinito, a distanza molto grande dai fili sorgente, che tra l'altro hanno una carica totale nulla, il potenziale sara' ancora nullo. Infine, nelle immediate vicinanze del filo con densita' di carica lineare λ il potenziale elettrostatico e' pari a quello, ϕ_+ , che si avrebbe in presenza del solo filo con densita' λ , infatti:

$$\lim_{r_+ \rightarrow 0} \phi_{Tot} \rightarrow \frac{\lambda}{2\pi} \ln\left(\frac{r_+}{2d}\right) = \frac{\lambda}{2\pi} (\ln r_+ - \ln(2d)) \simeq \frac{\lambda}{2\pi} \ln r_+ = \lim_{r_+ \rightarrow 0} \phi_+$$

Quesito 3 (fino a 10 punti)

Un condensatore piano, con armature di area S distanti d_0 e' collegato ad una batteria che fornisce una d.d.p. V_0 . Staccata la batteria la distanza tra le armature viene dimezzata. Stabilire qual e' la nuova d.d.p. che si stabilisce tra le armature del condensatore, il rapporto tra l'energia inizialmente accumulata nel condensatore e quella finale e l'energia accumulata nella configurazione finale. Sia $S = 10 \text{ cm}^2$, $d_0 = 1 \text{ cm}$, $V_0 = 1 \text{ kV}$.

Inizialmente (condensatore collegato al generatore) $Q = C V_0$ dove $C = \epsilon_0 S / d_0 = S / (4\pi k d_0) = 10 \cdot 10^{-4} / (4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 0.01) \simeq 10^{-2} / (4\pi \cdot 10^9) = 0.0885 \cdot 10^{-11} \simeq 0.885 \cdot 10^{-12} \text{ F}$. Quindi

l'energia iniziale e' $U = 0.5 Q V_0 = \frac{1}{2} C V_0^2 \simeq 0.44 \cdot 10^{-12} \cdot 10^6 \text{ J} = 0.44 \mu\text{J}$.

Quando il condensatore e' isolato (staccato dalla batteria) la carica sulle armature rimane costante (non puo' fluire altrove). Se la distanza tra le armature di dimezza, la capacita' raddoppia e quindi, a carica invariata, la differenza di potenziale si dimezza. L'energia elettrostatica finale e'

$$U_f = \frac{1}{2} C_f V_f^2 = \frac{1}{2} 2C_i \left(\frac{V_i}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} U_i$$

Quesito 4 (fino a 10 punti)

Un solenoide di lunghezza infinita e' costituito da 1000 spire/m, di raggio $R = 10 \text{ cm}$ e' percorsa dalla corrente di 5A. Si calcoli il campo magnetico in ogni punto dello spazio e il potenziale vettore A in ogni punto dello spazio (interno ed esterno al solenoide, si faccia un grafico del modulo di A in funzione della distanza dall'asse del solenoide). Considerando che il flusso del campo magnetico si misura in unita' di Weber (wb) si stabilisca in quali unita' misuriamo il potenziale vettore.

Il campo magnetico $\vec{B} = \mu_0 i n \hat{z} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot 10^3 = 62.85 \cdot 10^{-4} \hat{z} \simeq 6.3 \text{ mT } \hat{z}$ in ogni punto interno e 0 in ogni punto esterno. Il potenziale vettore $\vec{A} \parallel \vec{J} \parallel \hat{\phi}$. Inoltre esso per simmetria dipendera' solo da r, distanza dall'asse del solenoide. $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} \implies \Phi(\vec{B})_\gamma = \oint_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{l}$

dove γ e' un circuito chiuso e $\Phi(\vec{B})_\gamma$ e' il flusso di B concatenato con γ , ossia calcolato attraverso una qualunque superficie che abbia come bordo γ . Allora considerata una circonferenza γ di raggio $r > R$ nel piano perpendicolare all'asse del solenoide, orientandola nello stesso verso in cui scorre la corrente nelle spire del solenoide, si ha $\Phi(\vec{B})_\gamma = \mu_0 i n 4\pi R^2$ e

$\oint_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{l} = A(r) 2\pi r$, quindi $\vec{A}(r) = (\mu_0 i n 2R^2 / r) \hat{\phi}$. Per $r < R$ invece $\Phi(\vec{B})_\gamma = \mu_0 i n 4\pi r^2$ e

quindi $\vec{A}(r) = 2\mu_0 i n r \hat{\phi}$. Il grafico di A(r) e' lineare fino a R dove si raggiunge il valore $2\mu_0 i n R$ e poi proporzionale a $1/r$ da R in poi. Si noti la continuita' per $r=R$ in cui il modulo di A ha valore massimo pari a $A(R) = 8\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m } \cdot 5 \text{ A } \cdot 1000 / \text{m} \cdot 0.1 \text{ m} = 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ wb/m}$.

Utilizzate le unita' di wb per il flusso del campo magnetico, A si misura in wb / m.

(Fino a +8) Si dimostri la relazione che esprime il valore del campo magnetico prodotto dal solenoide infinito assumendo noto il valore del campo magnetico sui punti dell'asse.

Si applica la legge di Ampere in forma integrale per determinare il campo alla generica distanza r dall'asse del cilindro applicandola a percorsi rettangolari con un lato sull'asse del solenoide, dove

il campo e' noto e pari a $\vec{B} = \mu_0 i n \hat{z}$ per $L \rightarrow \infty$. Si usa il fatto che per simmetria

$\vec{B} = \vec{B}(r)$ e $\vec{B} \perp \vec{A}$ inoltre B non puo' avere una componente radiale altrimenti si cadrebbe in contraddizione con $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ e quindi $\vec{B} = B(r)\hat{z}$.

Quesito 5: (fino a 10)

L'avvolgimento di un solenoide ideale di raggio R con n spire per unita' di lunghezza e percorso da una corrente oscillante $I(t) = i_0 \sin^2 \omega t$. Calcolare il campo elettrico indotto e la densita' di corrente di spostamento in funzione dalla distanza dall'asse del solenoide, sia per $r < R$ che per $r > R$.

All'interno del solenoide si ha un campo magnetico $\vec{B} = \mu_0 n i_0 \sin^2 \omega t \hat{z}$ orientato come l'asse z e variabile nel tempo, che quindi induce un campo elettrico attraverso l'eq di Faraday Neumann

$\nabla \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -2\omega \mu_0 n i_0 \sin \omega t \cos \omega t \hat{z} = -\omega \mu_0 n i_0 \sin 2\omega t \hat{z}$. Questa equazione e' analoga, nella forma matematica, all'equazione di Ampere, quindi si risolve allo stesso modo;

scelto un percorso circolare con $r < R$ si ha $\int_{\Sigma_\gamma} \nabla \wedge \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(r)2\pi r$ e

$\int_{\Sigma_\gamma} \left(- \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{s} = -\pi r^2 (\mu_0 n \omega i_0 \sin 2\omega t)$, quindi $\vec{E}(r) = - (r/2) (\mu_0 n \omega i_0 \sin 2\omega t) \hat{\phi}$;

dal momento che abbiamo un campo elettrico variabile nel tempo esiste una corrente di

spostamento $\vec{J}_s = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\epsilon_0 r (\mu_0 n \omega^2 i_0 \cos 2\omega t) \hat{\phi}$.

Quesito 6: (fino a 8)

Si discuta un argomento a scelta tra i seguenti:

- Dimostrazione del teorema di Coulomb;
- Relazione tra legge di Faraday Neumann e forza di Lorentz.
- Applicazione della legge di Gauss per il calcolo del campo elettrico dovuto ad una distribuzione cilindrica di carica con densita' uniforme ρ e lunghezza infinita;
- Formulazioni equivalenti della legge $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Formule e costanti:

$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, $k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$
 $|e| = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$, $M_{\text{He}} \approx 4 m_p$,
 Numero di Avogadro $N_A = 6.022 \times 10^{23}$

Campo \vec{E} prodotto da una carica puntiforme: $\frac{kq}{r^2} \hat{r}$

Campo \vec{E} prodotto da un dipolo: $\vec{E}(r, \vartheta) = k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5}$;

Campo \vec{B} prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r, \vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2 \vec{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r, \vartheta) = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}; \quad d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$

Campo \vec{E} prodotto da una carica puntiforme in moto con velocità \vec{v} : $\frac{kq}{r^2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \hat{r}$

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$
Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \hat{z}$	$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right) \hat{z}$	$\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi)\right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \hat{\phi}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
Laplaciano di un vettore $\nabla^2 \mathbf{A}$	$\nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z}$	$\left(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right) \hat{\rho} + \left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right) \hat{\phi} + (\nabla^2 A_z) \hat{z}$	$\left(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right) \hat{r} + \left(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right) \hat{\theta} + \left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) \hat{\phi}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$	$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$	$d\mathbf{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S} = dydz \hat{x} + dx dz \hat{y} + dx dy \hat{z}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz \hat{\rho} + \rho d\rho d\phi \hat{\phi} + \rho d\rho dz \hat{z}$	$d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} + r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{\phi}$
Volume infinitesimo	$dv = dx dy dz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$