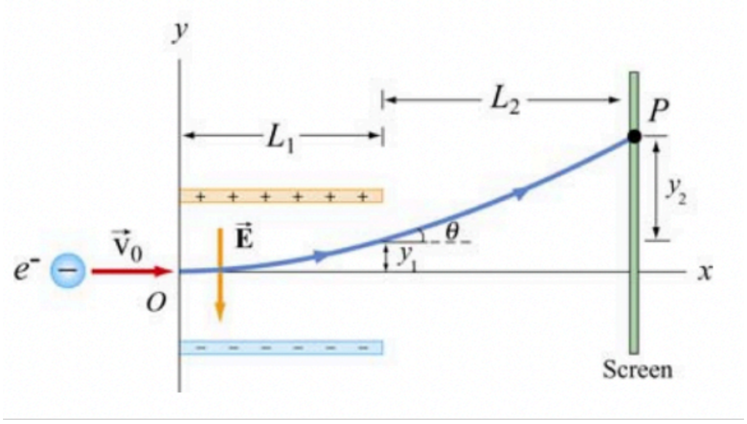
Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 43 - a.a. 2021-2022

Quesito 1 (fino a 8)



Al tempo $t_0 = 0$ un elettrone e' iniettato orizzontalmente in un campo elettrico uniforme prodotto dalle due piastre cariche indicate in figura di lunghezza L_1. La particella ha una velocita' iniziale $\overrightarrow{v} = v_0\hat{x}$ perpendicolare al campo elettrico.
Si calcoli 1) lo spostamento verticale y_1 dell'elettrone all'uscita della regione tra le due piastre cariche raggiunta nell'istante di tempo t_1; 2) l'angolo θ che la traiettoria al tempo t_1 forma con l'orizzontale; 3) lo spostamento verticale totale $y_1 + y_2$ tra il tempo t_0 e il tempo t_2 in cui l'elettrone raggiunge lo schermo dopo aver percorso una distanza complessiva in direzione x pari a $L_1 + L_2$.
L'elettrone e' soggetto a una forza dovuta al campo elettrico nell'intervallo di tempo in cui la sua traiettoria e' tra le due piastre cariche (naturalmente trascuriamo la forza peso di intensità trascurabile rispetto alla forza elettrica). In particolare, $\overrightarrow{F} = -|e|\overrightarrow{E} = |e||\overrightarrow{E}|\hat{y}$ con $\hat{y}$ che punta verso l'alto. Quindi il moto dell'elettrone tra le due piastre e' dettato dalla relazione $\overrightarrow{F} = m_e\overrightarrow{a} = |e|E\hat{y}$, mentre all'uscita della coppia di piastre il moto sara' un moto rettilineo uniforme per assenze di forze. Inoltre, in direzione x non ci sono forze quindi la velocità; in direzione x si mantiene constante e $t_1 = L_1/v_0$. In direzione y il moto uniformemente accelerato con velocità' iniziale $\overrightarrow{v}_{y_0} = 0$ fa si che $y(t) = \dfrac{1}{2}\dfrac{eE}{m_e}t^2$. Quindi a $t_1 = L_1/v_0$, visto che la velocita' iniziale in direzione y e' nulla, si ha $y(t_1) = \dfrac{eEL_1^2}{2m_e v_0^2}$ e $v_y(t_1) = \dfrac{eE}{m_e}\ t_1 = \dfrac{eEL_1}{m_e v_0}$.
L'angolo θ tra la traiettoria all'uscita dalla regione in cui si ha il campo elettrico e l'asse x e' dato da $\tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{eEL_1}{m_e v_0^2}$.
L'arrivo sullo schermo avviene dopo il tempo $t_{tot} = t_1 + t_2 = L_1/v_0 + L_2/v_0$, inoltre $y_2 = v_y(t_1)t_2 = \dfrac{eE\ L_1}{m_e v_0}\dfrac{L_2}{v_0}$. Lo spostamento totale in direzione y e' quindi

$$y_1 + y_2 = \frac{eEL_1^2}{2m_e v_0^2} + \frac{eE\ L_1L_2}{m_e v_0^2} = \frac{eEL_1^2}{m_e v_0^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{L_2}{L_1}\right).$$

Quesito 2 (fino a 10 punti)

Si consideri una sfera di raggio R in cui e' depositata carica con densità $\rho = ar$. Si calcoli il campo elettrico e il potenziale elettrostatico in ogni punto dello spazio, interno ed esterno alla sfera e infine l'energia che e' necessario spendere per costruire questa distribuzione di carica.
La distribuzione di carica ha simmetria sferica, quindi le superficie equi-potenziali sono superfici sferiche concentriche con la distribuzione di carica e il campo elettrico che dipende solo dalla distanza dal centro di simmetria ed e' diretto radialmente (in direzione perpendicolare alla superfici equi-potenziali) $\overrightarrow{E} = E(r)\hat{r}$; $\phi = \phi(r)$. Allora considerata una superficie gaussiana sferica di raggi r e centro nel centro si simmetria del sistema, l'applicazione della legge di Gauss permettera' di determinare il campo $\overrightarrow{E}$. Per calcolare il campo in un punto esterno, a distanza r>R, scegliamo una superficie gaussiana sferica Σ di raggio r e abbiamo

$\Phi(\vec{E})_\Sigma = \dfrac{1}{\epsilon_0} Q_\Sigma = \dfrac{1}{\epsilon_0}\int_\Sigma \rho(r)\, dV$, dove Q_Σ e' la carica contenuta all'interno della superficie gaussiana. Il flusso $\Phi(\vec{E})_\Sigma = \int_\Sigma \vec{E}(r) \cdot d\vec{s} = E(r)\int_\Sigma ds = 4\pi r^2 E(r)$ dal momento che ogni elemento di superficie $d\vec{s} = ds\hat{r}$ e che il campo E e' costante sulla superficie di raggio r. Calcoliamo $Q_\Sigma = \int_{V_\Sigma} \rho(r) dV = \int_{V_\Sigma} \rho(r)\ r^2 \sin\theta\ dr d\theta d\phi$ (si veda la tabella per l'elemento di volume in coordinate sferiche). Gli estremi di integrazione saranno 0, R visto che la carica e' contenuta nella sfera di raggio R, ossia visto che la densità; di carica e' nulla per r>R , 0, π per l'angolo polare θ e 1-2π per l'angolo azimutale ϕ. NOTA: dal momento che la densità' di carica dipende solo da r un modo piu' semplice di scrivere l'elemento di volume e' $dV = 4\pi r^2 dr$ (in cui si e' gia' integrato sulle variabili angolari) che corrisponde alla superficie di una sfera di raggio r moltiplicata per l'incremento infinitesimo di raggio r. In definitiva, $Q_\Sigma = \int_0^R a r^3 4\pi\ dr = a\pi R^4$, quindi il campo elettrico per r>R e' $\vec{E}(r) = \dfrac{aR^4}{4\epsilon_0 r^2}\hat{r}$. Per un punto interno si segue lo stesso procedimento con Σ superficie di raggio r<R; il calcolo del flusso e' lo stesso del primo caso, il calcolo di Q_Σ va fatto integrando solo dino a r che questa volta e' < R. Quindi $Q_\Sigma = \int_0^r a r'^3 4\pi\ dr' = a\pi r^4$. Percio' il campo elettrico risulta $\vec{E}(r) = \dfrac{ar^2}{4\epsilon_0}\hat{r}$.

Per il potenziale elettrostatico fissiamo il valore di riferimento $\phi(r \to \infty) = 0$ e per r>R possiamo

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$
Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$	$(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\mathbf{x}} +$ $(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\mathbf{y}} +$ $(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\mathbf{z}}$	$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{\boldsymbol{\rho}} +$ $(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho})\hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $\frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi})\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\hat{\mathbf{r}} +$ $\frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi))\hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
Laplaciano di un vettore $\nabla^2\mathbf{A}$	$\nabla^2 A_x\hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y\hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_z\hat{\mathbf{z}}$	$(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\rho}} +$ $(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $(\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$	$(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{r}} +$ $(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S} = dydz\hat{\mathbf{x}} +$ $dxdz\hat{\mathbf{y}} +$ $dxdy\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz\hat{\boldsymbol{\rho}} +$ $d\rho dz\hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $\rho d\rho d\phi\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\mathbf{r}} +$ $r\sin\theta dr d\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Volume infinitesimo	$dv = dxdydz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$

scrivere $\phi(r) - \phi(\infty) = -\int_\infty^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \vec{E} \cdot dr\hat{r}$. Sostituendo l'espressione del campo per r>R $\phi(r) = \frac{aR^4}{4\epsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{aR^4}{4\epsilon_0 r}$. Per r<R possiamo scrivere $\phi(r) - \phi(R) = -\int_R^r \vec{E}\cdot d\vec{l}$, quindi

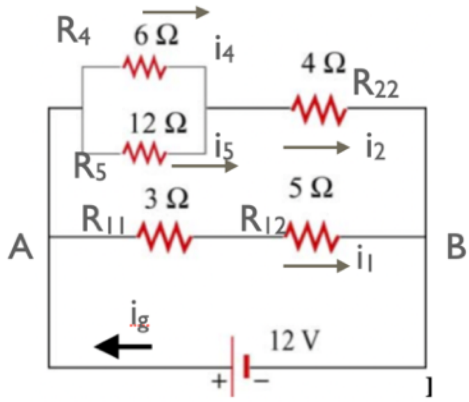
$\phi(r) - \frac{aR^3}{4\epsilon_0} = \int_r^R \frac{ar^2}{4\epsilon_0}dr = \frac{a}{12\epsilon_0}\left(R^3 - r^3\right)$. In definitiva per r<R, $\phi(r) = -\frac{ar^3}{12\epsilon_0} + \frac{aR^3}{3\epsilon_0}$.

L'energia elettrostqticq del sistema = energia necessaria a costruire la distribuzione di carica e' $U = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{r<R} |\vec{E}(r<R)|^2 dV + \frac{\epsilon_0}{2}\int_{r>R} |\vec{E}(r>R)|^2 dV$ ma puo' essere calcolata anche come $U = \frac{1}{2}\int_{r<R} \rho(r)\phi(r)\, dV$ o, infine, con la procedura seguente: si immagini di costruire la sfera strato dopo strato, trasferendo di volta in volta dall'infinito sulla superficie della sfera, costruita fino a quel momento fino al raggio r, una quantita' di carica pari a $dq = \rho(r)4\pi r^2 dr = 4a\pi r^3 dr$; in questo trasferimento bisognerà compiere il lavoro $dq\ \phi'(r)$ dove $\phi'(r) = \frac{Q_{\Sigma(r)}}{4\pi\epsilon_0 r}$ e' il potenziale prodotto al raggio r dalla carica $Q_{\Sigma(r)}$ contenuta nella sfera costruita fino a quel momento.

Quindi il lavoro complessivo necessario a costruire la distribuzione e'

$U = \int_{r<R} \phi'(r)\ \rho(r)4\pi r^2 dr$. Le tre procedure danno lo stesso risultato.

Quesito 3 (fino a 10 punti)

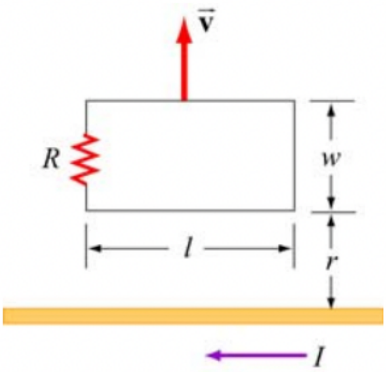


a) Nel circuito in figura si calcoli la velocità di deriva degli elettroni di conduzione nel ramo del circuito in cui è collocato il resistore da 4Ω, assumendo che il filo di rame di cui sia composto il circuito abbia una sezione circolare di diametro pari a 0.25 mm.
b) Si confronti la potenza dissipata sul resistore da 12 Ω con quella dissipata sul resistore da 5 Ω.

La resistività del rame è pari a $1.68 \times 10^{-8}\ \Omega m$, la densità di massa 8.9 g/cm^3 e il peso atomico A=63.5 g/mole.

Nel circuito diamo un nome a tutte le resistenze e alle correnti a cui attribuiamo un verso arbitrario (nella risoluzione il segno delle correnti ci dira' se il verso della corrente in ogni ramo e' coerente con la direzione fissata in partenza). si ha $V_A = V_B = \epsilon = i_1(R_{11} + R_{12}) = i_2(R_{eq(4,5)} + R_2)$. Osserviamo che R11 e R12 sono in serie => 8Ω, R4 e R5 sono in parallelo => 4Ω e la loro combinazione e' in serie con R_{22} => 8 Ω. Le due resistenze equivalenti da 8 Ω sono in parallelo e quindi la resistenza equivalente di tutta la rete e 4 Ω. Quindi ig = 3 A, e i1=i2 =1.5 A (ig si divide in parti uguali al nodo A perche' vede la stessa resistenza su entrambi i rami). Quindi la corrente che scorre in R2 e' 1.5 A. Con questa calcoleremo la velocità di deriva degli elettroni che scorrono in R_{22}. La potenza dissipata su R_{12} e' $R_{12}\, i_1^2$= 1.5 x 1.5 x 5 W = 11.25 W. In R_5=12 Ω scorre parte della corrente i_2; abbiamo i2 = i4 +i5 e i4 r4 = i5 R5, da cui si ricava i5 = i2 / 3 = 0.5 A. Quindi la potenza dissipata su R5 e' 0.5 x 0.5 x 12 W = 3 W.

La velocita' di deriva e' legata alla densità di corrente J dalla J = n e v, dove n = densita' di portatori di carica iberi per unita' di volume. Dal momento che si ha 1e- libero per atomo, n = densita' di atomi = N_A ρ / A = Numero di Avogadro (numero di atomi in una mole) x massa in una unita' di volume / peso atomico (massa in una mole) ~ 10^{23} /cm^3 = 10^{29} /m^3. Poi j = I / S , con la sezione del filo S = π (d/2)^2 ~ 5 x 10^{-8} m^2 e i=1.5 A. Quindi v = 1.5 / (5 x 10^{-8} x 10^{29} x 1.6 x 10^{-19}) ~ 0.002 m/s = 2 mm/s.



Quesito 4 (fino a 10 punti)
Si consideri la spira rettangolare di resistenza R=10 Ω e dimensioni l=50 cm e w = 20 cm, in moto con velocità costante $\vec{v} = 1$ m/s in prossimità di un filo rettilineo infinitamente lungo e percorso dalla corrente I=100 A. Si calcoli la corrente che percorre la spira quando il lato piu' vicino al filo e' pari a r = 20 cm.
Il filo infinito percorso da corrente produce un campo magnetico $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\phi}$ variabile nello spazio (Si tratta della formula di Biot-Savard che puo' altrimenti essere facilmente ricavata applicando la legge di Ampere e tenendo conto della simmetria cilindrica della sorgente del campo megnetico, ossia il filo rettilineo di lunghezza infinita).

Se la spira si muove con velocita' costante v (sotto l'azione di qualche forza) il flusso del campo magnetico concatenato con la spira varia nel tempo e cio' induce una f.e.m. nella spira e quindi una corrente per la legge di Faraday $\epsilon = r i_{ind} = -\frac{d\Phi_\Sigma(\vec{B})}{dt}$. Il flusso di campo magnetico e' entrante nella spira nel piano della figura. Orientiamo la superficie della spira per l calcolo del flusso nel verso entrante; a un istante generico di tempo t avremo

$$d\Phi_\Sigma(\vec{B}) = -B(r)\ ldr + B(r+w)\ ldr = ldr\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{r+w} - \frac{1}{r}\right)$$

$= -lvdt\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{w}{r(r+w)}$. Quindi $i_{ind} = lv\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{w}{r(r+w)} =$
= 0.5 x 1 x 4 x π x 10^{-7} x 100 (0.2 / (0.2 x 0.4)) / (2 x π x 10) ~ 10 uA.

Quesito 5 (fino a 8 punti)
Si discuta un argomento a scelta tra:

1) La legge di Ampere e la sua applicazione per il calcolo del campo magnetico prodotto una generica distribuzione di corrente con simmetria cilindrica.
   Es: enunciare, definire tutte le quantità in gioco, mostrare l'applicazione in una situazione esemplificativa. Per discutere come utilizzarla quando le sorgenti sono simmetriche per ottenere il campo magnetico, discutere il fatto che $\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$, $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$, $\vec{A}$ parallelo $\vec{J}$ e dimostrare, per esempio il campo di Biot-Savard applicando Ampere.
2) La capacita' di un condensatore sferico.
   Definizione e calcolo
3) Esperienza di Millikan
   Ok, avete tipicamente capito quali sono le forze in gioco e il fatto che le goccioline raggiungono una velocità' limite; dovete pero' far emergere il fatto che e' questa velocità e' proporzionale alla carica elettrica contenuta sulle goccioline che risulta distribuita tra valori discreti, a causa della quantizzazione della carica elettrica.
4) Potenziale di dipolo di un sistema discreto di cariche complessivamente neutro.
   … c'e' una delle lezioni su questo argomento
5) Si calcoli il momento di dipolo elettrico di una barretta sottile di lunghezza 2L su cui e' distribuita carica elettrica con densità lineare $\lambda = \lambda_0$ x / L, dove l'asse x e' parallelo alla barretta e origine dell'asse e' al centro della barretta.
   … baricentro delle cariche positive e negative separati da $\vec{d}$, $\vec{p} = q\,\vec{d}$, dove q = integrale della carica positiva.

RICORDA:

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}\,F/m$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,H/m$, $k = 1/(4\,\pi\,\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\,Nm^2/C^2$
$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}\,C$, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\,Kg$, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}\,Kg$, $M_{He} \simeq 4\,m_p$

Campo $\overrightarrow{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\dfrac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\overrightarrow{E}$ prodotto da un dipolo: $\overrightarrow{E}(r,\vartheta) = k\,\dfrac{3(\overrightarrow{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{p}}{r^5}$;

Campo $\overrightarrow{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\overrightarrow{B}(r,\vartheta) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3(\overrightarrow{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r,\vartheta) = k\dfrac{\overrightarrow{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}i\dfrac{d\vec{l}\wedge\vec{r}}{r^3}$; $\quad d\overrightarrow{F} = i\,d\vec{l}\wedge\overrightarrow{B}$