

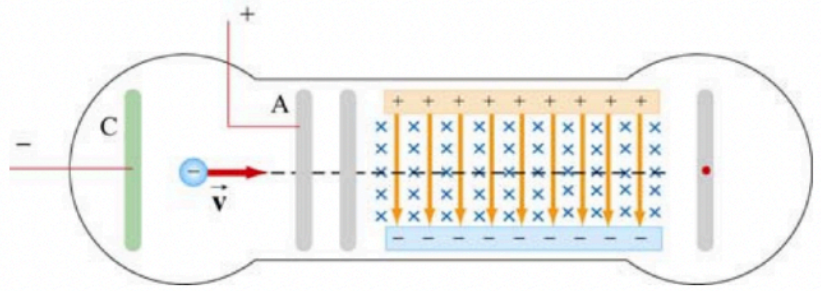
Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 44 - a.a. 2021-2022

Quesito 1 (fino a 10)

In figura e' rappresentato l'apparato sperimentale utilizzato da Thompson per misurare il rapporto tra la carica elettrica e la massa dell'elettrone: e/m .

Dal piano metallico verticale indicato con C (catodo), che si trova al potenziale V_0 , sono emessi elettroni con energia cinetica iniziale trascurabile. Il piano

indicato con A (anodo) si trova a un valore del potenziale elettrostatico V_A , con $V_A - V_0 > 0$. Con quale velocita' gli elettroni raggiungono il piano A? Superato il piano A gli elettroni entrano in una regione dello spazio in cui c'e' un campo elettrico uniforme in direzione verticale diretto verso il basso e un campo magnetico perpendicolare al piano della figura e entrante. Quali forze esercita ciascun campo sull'elettrone? Si determini la relazione tra l'intensita' del campo elettrico e del campo magnetico affinche' la traiettoria degli elettroni non risulti deflessa.



Sistema di riferimento: asse x orizzontale diretto da C verso A, asse y verticale diretto verso l'alto, di conseguenza, asse z perpendicolare e uscente dal piano della figura. L'energia potenziale di un elettrone che si sposta da un punto al potenziale V_0 a un punto al potenziale V_A subisce una variazione pari a $-e(V_A - V_0)$ a cui corrisponde una variazione di energia cinetica $E_{kf} - E_{ki} = e(V_A - V_0)$. Dal momento che $E_{ki} \sim 0$, $E_{kf} = 0.5 m_e v_A^2 = e(V_A - V_0)$. Quindi la velocita' con cui l'elettrone raggiunge A e' $v_A = \sqrt{2e(V_A - V_0) / m_e}$.

Nella regione in cui c'e' campo elettrico e campo magnetico, l'elettrone e' soggetto a una forza $\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B$ dove $\vec{F}_E = -e\vec{E} = eE\hat{y}$ e' la forza dovuta al campo elettrico (asse y diretto verso l'alto) e $\vec{F}_B = -ev_A\hat{x} \wedge (-B\hat{z}) = -ev_AB\hat{y}$ e' la forza di Lorentz all'ingresso della regione in cui sono attivi i campi. Quindi se $v_AB = E$, la risultante delle forze sull'elettrone e' nulla e quindi il moto dell'elettrone rimane rettilineo uniforme con velocita' pari a v_A nel verso positivo dell'asse x . Quindi questo apparato "seleziona" elettroni di velocita' E/B , nel senso che solo elettroni con questa velocita' raggiungono il punto indicato in rosso a valle dei campi; Se V_A non e' uguale a E/B il fascetto sara' infatti deviato in alto o in basso. Quindi regolando $V_A - V_0$ in modo da avere un fascio di elettroni non deflesso e noti E e B , Thompson determino' il rapporto e/m come

$$e/m_e = \frac{(E/B)^2}{2(V_A - V_0)}$$

Quesito 2 (fino a 10 punti)

Si consideri una sfera di raggio R carica uniformemente con densita' $\rho_0 > 0$ che si trova al centro di un guscio sferico di materiale conduttore di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2 su cui e' stata depositata la carica Q . Si determini il campo elettrico in ogni punto dello spazio: per $r < R$, $R < r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ e infine $r > R_2$. Con quale energia cinetica una particella puntiforme di carica $q_0 > 0$ e massa m_0 collocata con velocita' iniziale nulla al raggio R raggiunge il guscio conduttore?

Il sistema di cariche sorgente del campo elettrico e' una sfera in cui e' distribuita una carica complessiva $Q_0 = \rho_0 (4\pi R^3/3)$ con densita' uniforme ρ_0 e la carica Q depositata sul guscio conduttore. Il sistema e' a simmetria sferica e quindi useremo coordinate sferiche, i campi (potenziale elettrostatico e campo elettrico) dipenderanno solo da r e il campo elettrico sara' diretto nella direzione radiale. Per effetto dell'induzione elettrostatica, dal momento che il campo nei conduttori e' nullo, la legge di Gauss applicata a una superficie sferica tutta interna al conduttore ci dice che la carica indotta sulla superficie interna del conduttore (al raggio $r=R_1$) e' pari a $Q_{in} = -Q_0$. Quindi la carica sulla superficie esterna della sfera conduttrice ($r=R_2$) sara' pari a $Q_{es} = Q + Q_0$.

Per $r > R_2$, a causa della simmetria sferica delle sorgenti che sono tutte all'interno di una sfera di raggio r , il campo sarà Coulombiano e pari a

$\vec{E}(r > R_2) = k \frac{Q + Q_0}{r^2} \hat{r}$, come se tutta la carica fosse concentrata nel centro di simmetria in cui stiamo collocando l'origine del nostro sistema di riferimento.

Per $R_1 < r < R_2$, il campo è nullo (siamo all'interno del conduttore). Per $R < r < R_1$, applicando la legge di Gauss a una sfera di raggio r si trova $\vec{E}(R < r < R_1) = k \frac{Q_0}{r^2} \hat{r}$. Infine per $r < R$,

applicando la legge di Gauss a una sfera di raggio r , si ha $\Phi_{\Sigma_r}(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3$, quindi $\vec{E}(r < R) = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} \hat{r}$. La carica puntiforme q_0 nello spostarsi tra R e R_1 , sotto l'azione della

forza repulsiva $\vec{F} = \frac{kq_0Q_0}{r^2} \hat{r}$, è soggetta a una variazione di energia potenziale pari a

$$\Delta U_p = q_0 [\phi(R_1) - \phi(R)] = q_0 \int_R^{R_1} (kQ_0/r^2) \hat{r} \cdot dr \hat{r} = kq_0Q_0 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{1}{2} m v(R_1)^2$$

quindi la velocità in R_1 sarà:

$$v_{R_1} = \sqrt{\frac{2kq_0Q_0}{m} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right)}$$

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$
Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}$	$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{z}$	$\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
Laplaciano di un vettore $\nabla^2 \mathbf{A}$	$\nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z}$	$\left(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{\rho} + \left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{\phi} + (\nabla^2 A_z) \hat{z}$	$\left(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \left(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} \right) \hat{\theta} + \left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\phi}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$	$d\mathbf{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\phi \hat{\phi} + dz \hat{z}$	$d\mathbf{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S} = dydz \hat{x} + dx dz \hat{y} + dx dy \hat{z}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz \hat{\rho} + \rho dz d\phi \hat{\phi} + \rho d\rho d\phi \hat{z}$	$d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r} + r \sin \theta dr d\phi \hat{\theta} + r dr d\theta \hat{\phi}$
Volume infinitesimo	$dv = dx dy dz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

Quesito 3 (fino a 10 punti)

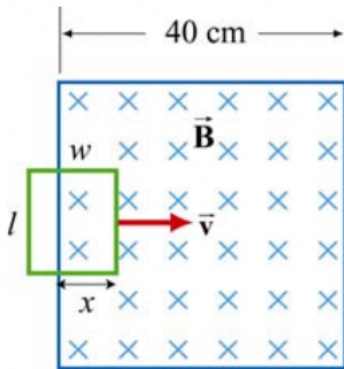
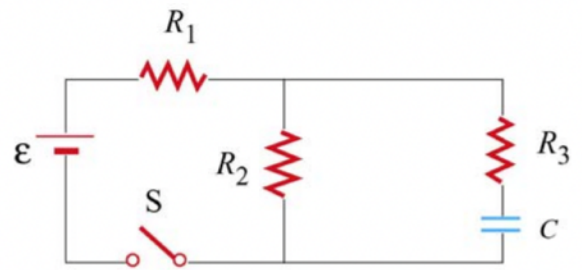
Nel circuito in figura il condensatore e' scarico e al tempo $t=0$ l'interruttore S viene chiuso. Si consideri $\epsilon = 40\text{ V}$, $R_1 = 8\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$, $R_3=4\ \Omega$, $C = 4.0\ \mu\text{F}$.

1) Trovare le correnti in ogni resistenza immediatamente dopo la chiusura di S.

Immediatamente dopo la chiusura dell'interruttore il condensatore scarico e' equivalente a un cortocircuito (non c'e' differenza di potenziale ai suoi capi), quindi $i_g = i_2 + i_3$; $i_g = \epsilon / R_{eq} = 3.85\text{ A}$, dove $R_{eq} = R_1 + R_2R_3/(R_2+R_3) = 10.4\ \Omega$. Le correnti iniziali $i_2 = i_3 = R_3 / (R_2+R_3) (3.85 - i_2) \Rightarrow i_2 = i_g R_3 / (R_2+R_3) = 1.54\text{ A}$; $i_3 = 2.31\text{ A}$.

2) Trovare la carica accumulata dopo molto tempo (carica asintotica) sulle armate del condensatore.

Molto tempo dopo la chiusura dell'interruttore nel ramo del condensatore non scorre piu' corrente, perche' il condensatore si e' completamente caricato e, dal punto di vista circuitale, si comporta come un interruttore aperto. Pertanto in quella fase nella maglia del generatore, R_1 e R_2 scorre la corrente $i_g = \epsilon / (R_1+R_2) = 2.86\text{ A}$ e la differenza di potenziale ai capi del condensatore e' uguale alla differenza di potenziale ai capi di R_2 ossia $V = 17.14\text{ V}$, quindi la carica sulle armature e' $Q = CV = 68\ \mu\text{C}$.



Quesito 4 (fino a 10 punti)

La spira quadrata di lato l , che trasla a velocita' costante per effetto di forze esterne, entra in una regione di campo magnetico diretto perpendicolarmente al piano della figura e entrante. Si calcoli e si faccia un grafico in funzione del tempo di

- 1) flusso del campo B concatenato con la spira quadrata;
- 2) Forza elettromotrice indotta nella spira quadrata.

Cosa accadrebbe se non ci fosse nessuna forza esterna applicata e \vec{v} fosse solo la velocita' iniziale nell'istante di tempo in cui la spira inizia a entrare nel campo magnetico ?

Orientata la spira in senso orario, la normale e' entrante nel piano della figura e parallela al campo magnetico. Quindi, chiamato $t=0$ l'istante di tempo in cui il lato destro della spira e' al bordo d'ingresso della regione in cui c'e' campo magnetico, il flusso del campo magnetico concatenato con la spira e' dato da

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = 0, \text{ per } t < 0, \text{ pertanto } \epsilon = 0$$

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = vt l B, \text{ per } 0 < t < l/v, \text{ pertanto } \epsilon = -v l B \text{ e nella spira scorre una corrente } I_{\text{indotta}} = \epsilon / \text{resistenza, in senso antiorario;}$$

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = l^2 B, \text{ per } l/v < t < 0.4m/v$$

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = (l - (vt - 0.4)) l B, \text{ per } 0.4m/v < t < (0.4m + l)/v, \text{ pertanto } \epsilon = v l B \text{ e nella spira scorre una corrente } I_{\text{indotta}} = \epsilon / \text{resistenza, in senso orario;}$$

$$\Phi_{\Sigma}(\vec{B}) = 0, \text{ per } t > (0.4m + l)/v.$$

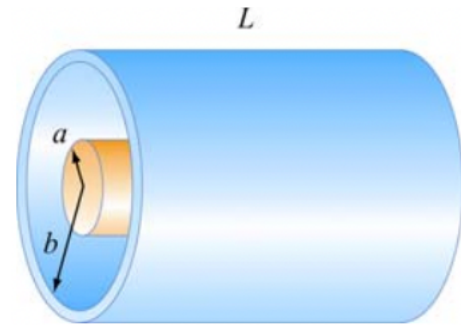
Se non ci fosse nessuna forza esterna applicata, per $0 < t < l/v$, la corrente indotta che circola nella spira produrrebbe una forza (Laplace) $\vec{F} = -li(t)B\hat{x}$ che rallenterebbe la spira opponendosi alla variazione di flusso, quindi il moto sarebbe rallentato e la corrente non sarebbe costante nel tempo. Analogamente per $0.4m/v < t < (0.4m + l)/v$ la corrente nel lato a sinistra della spira produrrebbe una forza $\vec{F} = -li(t)B\hat{x}$ che si opporrebbe alla diminuzione di flusso, la velocita' diminuirebbe e cosi' la corrente indotta. Si puo' dimostrare che la perdita di energia cinetica complessiva risulta uguale all'energia dissipata per effetto Joule dalla corrente indotta che circola nella spira. Nel caso di velocita' costante la l'energia dissipata per effetto Joule e'

fornita dal lavoro speso dalla forza esterna per compensare la forza di Laplace e mantenere costante la velocità'.

Quesito 5 (fino a 8+8 punti)

A) **La figura rappresenta un condensatore cilindrico:**

- 1) Si calcoli la capacita' nell'ipotesi $L \gg b > a$
- 2) Si stabilisca la quantità di carica contenuta nel conduttore interno se la differenza di potenziale tra il conduttore interno e quello esterno, $V(a)-V(b)$, e' pari a 1 kV, $L=1$ m, $a = 5 \times 10^{-5}$ m e $b = 2$ cm.



$C = \Delta Q_{a \rightarrow b} / (V_a - V_b)$ con $\Delta Q_{a \rightarrow b}$

Carica che deve essere spostata dal conduttore interno al conduttore esterno per annullare la differenza di potenziale $V_a - V_b$. Allora immaginiamo che sul conduttore interno ci sia

la carica Q e calcoliamo $V_a - V_b = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r}$

Il campo tra i due conduttori, nell'approssimazione di simmetrie cilindrica ci calcola usando una superficie gaussiana cilindrica di raggio r e altezza h , $\Phi_C(\vec{E}) = 2\pi r h E(r) = h\sigma 2\pi a / \epsilon_0$, con $\sigma = Q / (2\pi a L)$ quindi $\vec{E} = \sigma a / (\epsilon_0 r) \hat{r}$. Perciò $V_a - V_b = Q \ln(b/a) / (2\pi L \epsilon_0)$.

$Q = 2\pi L \epsilon_0 (V_A - V_B) / \ln(b/a) =$

$1 \text{ kV} / [2k \ln(b/a)] = 1000 / [2 \cdot 10^{10} \ln(20/0.05)] = 0.83 \cdot 10^{-7} \text{ C.}$

B) La figura rappresenta un cavo coassiale, ossia un sistema di due conduttori coassiali (il filo interno e la guaina cilindrica esterna) entrambi attraversati dalla stessa corrente ma in versi opposti.

- 1) si calcoli il campo magnetico in ogni punto dello spazio: $r < a$, $a < r < b$, $r > b$ (ossia all'esterno del sistema, si trascuri lo spessore della guaina)

Si ha campo magnetico a simmetria cilindrica solo nello spazio tra i due conduttori (e all'interno dei conduttori) dove la forma del campo e' come quella di Biot Savard per effetto delle simmetrie del sistema

$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{\phi}$ per $a < r < b$. All'interno del filo centrale ($r < a$) si ha (applicando Ampere a un circuito circolare con centro sull'asse e perpendicolare all'asse)

$\int_{\gamma} B(r) \hat{\phi} \cdot d\vec{l} = B(r) 2\pi r = \mu_0 \int_{\sigma_{\gamma}} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \mu_0 i (r^2/a^2)$, quindi per $r < a$ si ha $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i r}{2\pi a^2} \hat{\phi}$.

Per $r < b$ il campo e' nullo perche' l'acorrente totale concatenata con un circuito γ di raggio r e' la somma di quelle che scorrono nei due conduttori e queste sono uguali e opposte.

RICORDA:

$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$, $k = 1 / (4\pi \epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$
 $|e| = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$, $M_{\text{He}} \approx 4 m_p$

Campo \vec{E} prodotto da una carica puntiforme: $\frac{kq}{r^2} \hat{r}$

Campo \vec{E} prodotto da un dipolo: $\vec{E}(r, \vartheta) = k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$;

Campo \vec{B} prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r, \vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r, \vartheta) = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$; $d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$