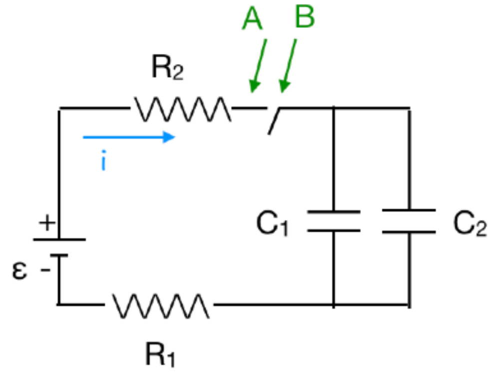
Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 45 - a.a. 2021-2022

Quesito 1 **(fino a 10)**

Si determini l'andamento nel tempo della corrente *i* e della differenza di potenziale ai capi dei condensatori dopo che l'interruttore e' chiuso sulla posizione A sapendo che
ε = 100V, R1 = 100 Ω, R2 = 2000 Ω,
C1=100 pF e C2=200 pF.
Si calcoli l'energia immagazzinata nel condensatore 1 e nel condensatore 2 e l'energia totale dissipata su ciascuna resistenza.
Si consideri il comportamento dello stesso circuito nel caso in cui i due condensatori siano collegati in serie.



L'equazione che descrive il circuito e' (chiamato A il punto del circuito tra generatore e R2, B il nodo tra R2 e i condensatori, C il nodo tra i condensatori e R1 e D il punto tra R1 e il generatore): $\phi_A - \phi_D = \epsilon = (\phi_A - \phi_B) + (\phi_B - \phi_C) + (\phi_C - \phi_D)$

$\epsilon = IR_2 + Q_1/C_1 + IR_1 = IR_2 + Q_2/C_2 + IR_1 = I(R_1 + R_2) + (Q_1 + Q_2)/C_{eq}$

dove $Q_1 + Q_2 = \int_0^t dtI(t)$ e $C_{eq} = C_1 + C_2 = 300$ pF . La condizione iniziale ci da

$\epsilon = (R_1 + R_2)\ I(t = 0)$, quindi $I_0 = I(t = 0) = \epsilon/(R_1 + R_2) = 100\ V\ /\ 2100\ \Omega = 47.6$ mA.

L'eq ha soluzione

$I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ e $\phi_B(t) - \phi_C(t) = \epsilon - (R_1 + R_2)\ I(t) = \epsilon(1 - e^{-t/\tau})$

dove $\tau = (R_1 + R_2)(C_1 + C_2) = 2100 \times 300 \times 10^{-12}$ s $= 6.3 \times 10^{-7}$s $= 0.63\ \mu$s

E1 = $\frac{1}{2}C_1V^2 = \frac{1}{2}Q_1V = \frac{Q_1^2}{2C_1}$ = 0.5 x 10^{-6} Joule

e analogamente per E2 = 10^{-6} Joule, con V = $\phi_B(t \to \infty) - \phi_C(t \to \infty) = \epsilon$.

Se i due condensatori sono in serie

$C_{eq} = C_1C_2/(C_1 + C_2) = 66.7$ pF, $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ e $\tau = (R_1 + R_2)C_{eq} = 0.14\ \mu s$. In questo caso asintoticamente $\epsilon = Q_1/C_1 + Q_2/C_2$ ma $Q_1 = Q_2 = Q$ e quindi $\epsilon = Q/C_{eq}$.

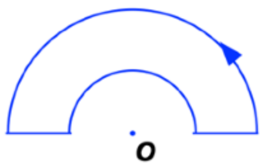
Quindi E1 = $\frac{Q^2}{2C_1} = \frac{C_{eq}^2\epsilon^2}{2C_1} = \frac{C_1C_2^2\epsilon^2}{2(C_1 + C_2)^2} =$

Analogamente: E2 = $\frac{Q^2}{2C_2} = \frac{C_1^2C_2\epsilon^2}{2(C_1 + C_2)^2}$,

e quindi $E_1 + E_2 = \frac{\epsilon^2 C_{eq}}{2(C_1 + C_2)}(C_1 + C_2) = \frac{\epsilon^2 C_{eq}}{2} = 33.4 \times 10^{-8} = 334$ nJ.

Quesito 2 (fino a 8 punti)

Si calcoli il campo magnetico nel punto O del circuito indicato in figura, percorso dalla corrente i = 10 A, con raggi di 5 e 10 cm.

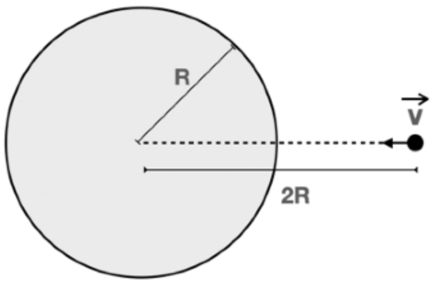


Si usa la formula di Laplace per calcolare il campo magnetico

$$\vec{B}(0) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{0.05}^{0.1}\frac{dx\hat{x} \wedge (-x\hat{x})}{x^3} + \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_{-0.1}^{-0.05}\frac{dx\hat{x} \wedge (-x\hat{x})}{|x|^3}$$

$$+\frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{R_e d\phi\hat{\phi} \wedge (-R_e\hat{r})}{R_e^3} - \frac{\mu_0 i}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{R_i d\phi\hat{\phi} \wedge (-R_i\hat{r})}{R_i^3} = \frac{\mu_0 i\pi\hat{z}}{4\pi}\frac{R_i - R_e}{R_i R_e} =$$

$$-\pi \times 10^{-6}\hat{z}\,\frac{0.1-0.05}{5\times 10^{-3}} = -\,\pi \times 10^{-5}\ \mathrm{T}\ \hat{z}$$



Quesito 3 (fino a 10 punti)

Un nucleo di Oro (numero atomico Z=79) puo' essere descritto come una distribuzione sferica uniforme di carica con raggio R = 7 fm (1 fm = 10^{-15} m).
Un protone si avvicina al nucleo in direzione radiale e raggiunge una distanza doppia del raggio nucleare alla velocità *v.* Quale deve essere il valore minimo di *v* affinché il protone raggiunga il centro del nucleo di Ferro (si trascuri qualunque interazione oltre a quella elettromagnetica).
Si ricordi che la massa del protone e' m_p = 1.67 x 10^{-27} kg.

Una distribuzioni uniforme e sferica di carica confinata nel raggio R, con densita' ρ = 3Q/(4πR³) produce un campo e un potenziale che all'esterno hanno la forma Coulombiana e all'interno hanno la dipendenza da r in tabella)

Regione	$\vec{E}(r,\theta,\phi)$	$V(r,\theta,\phi)$ con V(r->inf) = 0
r<R	$\frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}\hat{r}$	$\frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}$
r>R	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$

A r<R per calcolare il campo applichiamo Gauss a una superficie Σ sferica di raggio r concentrica con la distribuzione di carica sfruttando la simmetria sferica del sistema di carico e quindi dei campi che ci dice che $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Allora abbiamo $\Phi(\vec{E})_\Sigma = \int_\Sigma d\vec{s}\cdot E(r)\hat{r} = E(r)4\pi r^2$. Ma per Gauss $\Phi(\vec{E})_\Sigma = Q_{internaa\Sigma}/\epsilon_0 = \int_{V_\Sigma} dV\rho = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$= (Q/ε₀)(r/R)³. Quindi, $\vec{E}(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}\hat{r}$.

Il potenziale elettrostatico all'interno

$$V(r) - V(R) = V(r) - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \int_r^R dr\hat{r}\cdot\frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q(R^2-r^2)}{8\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}.$$

Il valore minimo di v e' quello che permette al protone di raggiungere il centro con velocita' nulla.
Dalla conservazione dell'energia meccanica si ha
E(iniziale) = E_cinetica_i +E_potenziale_i = m_p / ($2v^2$) + e V(2R)
E(finale) = E_cinetica_f +E_potenziale_f = e V(0)
m_p / ($2v^2$) = e [V(0) - V(2R)] quindi (2e[V(0) - V(2R)]/m_p)$^{1/2}$ = v

V(0) - V(2R) = $\frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$

Quindi v=$\sqrt{\frac{9\times10^9\times2\times79\times1.6^2\times10^{-38}}{7\times10^{-15}\times1.67\times10^{-27}}}v = \sqrt{10^{13}\frac{9\times2\times79\times1.6^2}{7\times1.67}} = 5.7\times10^7\mathrm{m/s}.$

Quesito 4 (fino a 10)

L'avvolgimento di un solenoide ideale di raggio *R* con *n* spire per unita' di lunghezza è percorso da una corrente oscillante $I(t)= i_0 \sin^2 \omega t$. Calcolare il campo elettrico indotto e la densità di corrente di spostamento in funzione dalla distanza dall'asse del solenoide, sia per $r < R$ che per $r > R$.

Il campo magnetico all'interno del solenoide (nell'approssimazione di L>>R, ossia lunghezza infinita) sara' $\vec{B} = \mu_0 n i_0 sin^2 \omega t \ \hat{z}$. Dal momento che il campo diretto lungo Z varia nel tempo ci sara' un campo elettrico indotto la cui circuitazione sara' non nulla su percorsi attraverso i quali si ha un flusso di campo magnetico. L'eq da utilizzare e' $\nabla \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ che ha la stessa struttura di $\nabla \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$. Quindi si puo' affrontare il calcolo di $\vec{E}$ cosi' come si usa la legge di Ampere per calcolare il campo magnetico prodotta da una corrente $\mu_0 \vec{J} \rightarrow -\mu_0 n i_0 \omega \ (\ 2 \ \sin \omega t \ \ \cos \omega t \ ) \ \hat{z}$. Il campo elettrico sara' diretto come il versore phi e dipenderà solo dalla distanza dall'asse. Qiundi per r<R considerata una circonferenza γ coassiale di raggio r si avrà $\int_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(r) \ 2\pi r =$

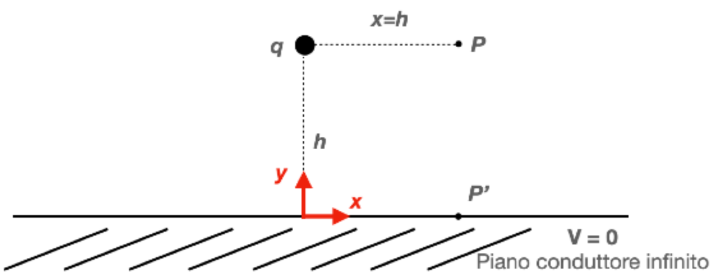
$$-\Phi_{\Sigma_\gamma}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\mu_0 n i_0 \omega \ (\ 2 \ \sin \omega t \ \ \cos \omega t \ ) \pi r^2.$$

Quindi $\vec{E}(r) = -\mu_0 n i_0 \omega \ (\ \sin \omega t \ \ \cos \omega t \ ) r \hat{\phi}$.

All'estero, r>R, si avrà $\vec{E}(r) = -\frac{\mu_0 n i_0 \omega \ (\ \sin \omega t \ \ \cos \omega t \ ) R^2}{r} \hat{\phi}$.

Quesito 5 (fino a 10 punti)

Si consideri un piano conduttore infinitamente esteso a potenziale nullo e una carica puntiforme *q* a distanza *h* dal piano. Si calcoli il potenziale elettrostatico nel punto P e il campo elettrico nel punto P e nel punto P'.
Si calcoli anche la densità di carica indotta nel punto P'.



Per l'unicita' della soluzione del problema generale dell'elettrostatica il campo elettrico e il potenziale elettrostatico prodotti dal piano conduttore a potenziale nullo e dalla carica puntiforme q sono identici in tutti i punti a y>0 a quelli prodotti dalla carica q e da una carica fittizia (immagine) -q collocata nel punto (0, -h, 0). Infatti le due cariche producono potenziale nullo sul piano y=0 e nullo a distanza infinita esattamente come il piano conduttore e la carica puntiforme del problema reale. In altri termini il sistema di carica q e carica immagine riproduce le condizioni al contorno del problema di Dirichlet che descrive matematicamente il nostro sistema fisico: $\nabla^2 \phi = 0 \ \forall (x, y, z) \in R^3 \text{ with } y > 0, \ \ \phi(y = 0) = 0.$

Quindi Il potenziale elettrostatico nel punto P vale $\phi(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{5}h}$.

Il campo elettrico $\vec{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h^2}\hat{x} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 5h^2}\frac{h\hat{x} + 2h\hat{y}}{\sqrt{5}h}$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 h^2}\left[\left(1 - \frac{1}{5\sqrt{5}}\right)\hat{x} - \frac{2}{5\sqrt{5}}\hat{y}\right]$$

$$\vec{E}(P) = -2\frac{q}{4\pi\epsilon_0 2h^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} = -\frac{q\sqrt{2}}{8\pi\epsilon_0 h^2}\hat{y}.$$

La densità di carica indotta nel punto P per il teorema di Coulomb e per le proprietà dei conduttori all'equilibrio e' $\sigma(P') = \epsilon_0 |\vec{E}(P')| = \dfrac{q\sqrt{2}}{8\pi h^2}$.

Quesito 6 (fino a 10 punti)
Si discuta uno degli argomenti elencati:

1) Equivalenza tra una spira percorsa da corrente e un dipolo magnetico;
2) Soluzione generale dell'equazione di Poisson;
3) Legge di Ohm e modello di Drude;
4) Interazioni tra due dipoli elettrici paralleli e anti-paralleli collocati sullo stesso asse in direzione parallela o anti-parallela all'asse.

RICORDA:
$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ F/m$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ H/m$, $k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$
$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}\ C$, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\ Kg$, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}\ Kg$, $M_{He} \simeq 4\ m_p$

Campo $\vec{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\dfrac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\vec{E}$ prodotto da un dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\,\dfrac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$;

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r,\vartheta) = k\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} i \dfrac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$; $d\vec{F} = i\,d\vec{l} \wedge \vec{B}$