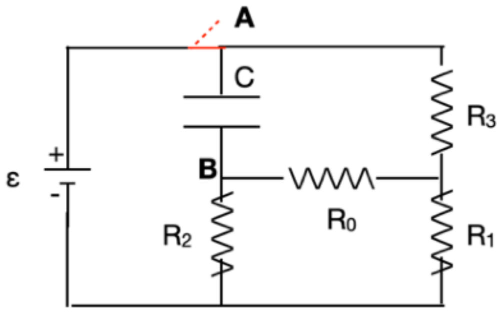
# Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 46 - a.a. 2021-2022

***Quesito 1* (fino a 10)**
Si calcoli la differenza di potenziale a regime tra i punti A e B del circuito in figura tenendo conto dei seguenti parametri:
ε = 250V, R0 = 1000 Ω, R1 = 200 Ω, R2 = 200 Ω,
R3 = 250 Ω, C=100 pF.
Si calcoli l'energia dissipata sul resistore 1 nella fase di scarica del condensatore che avviene quando l'interruttore rosso (nella prima fase chiuso su A da molto tempo) viene aperto (rosso tratteggiato).




Nella prima fase, nel circuito a regime il condensatore si comporta come un interruttore aperto, perciò la corrente che scorre ne; ramo del generatore puo' essere calcolata come $i_g = \epsilon / R_{eq}$ dove $R_{eq} = R_3 + (R_0 + R_2)R_1/(R_0 + R_2 + R_1)$ = 171.4 Ω. Quindi $i_g = 250\ V\ /\ 171.4\ \Omega = 1.46\ A$. Questa corrente scorre anche in R3 e poi si divide nel ramo in c'e' la resistenza R1 e nel ramo delle resistenze R0 e R2, secondo le relazioni: $i_g = i_1 + i_{02}; \quad i_{02}(R_0 + R_2) = i_1 R_1$. Quindi $i_{02} = i_g/(1 + R_0/R_1 + R_2/R_1)$ = 0.21 A e $i_1 = i_g - i_{02} = 1.46 - 0.21 = 1.25\ A$. La differenza di potenziale tra A e B e' quindi $V_A - V_B = i_{02}R_0 + i_g R_3$ = 1.25 x 1000 + 1.46 x 250 = 1615 V.

L'energia dissipata su R1 nella fase di scarica sara' $E_{Joule,R1} = \int_0^\infty dt R_1 i_{12}^2(t)$. La corrente $i_{12}$ e' la corrente che scorre nella serie di R1 e R2 del circuito di scarica. Questo circuito ha una resistenza equivalente $R'_{eq} = R_3 + R_0(R_1 + R_2)/(R_0 + R_1 + R_2)$ = 536 Ω. La corrente che scorrera' in R3, e si ripartirà nei due rami in parallelo con R1+R2 e con R0, avra' l'andamento tipico esponenziale $i_3(t) = \dfrac{V_A - V_B}{R'_{eq}} e^{-t/('R_{eq}C)}$. L'energia complessiva che sara' dissipata nella scarica del condensatore e'pari a quella immagazzinata nel condensatore, ossia $E_{Joule,tot} = CV_{AB}^2/2 = 10^{-10}F \times (1.6 \times 10^3 V)^2/2$ = 1.28 x $10^{-4}$J. Per le correnti valgono le seguenti relazioni: $i_{12} + i_0 = i_3; \quad i_0 R_0 = i_{12}(R_1 + R_2)$, quindi
$i_{12} = i_3 - i_{12}(R_2 + R_1)/R_0; \quad i_{12}(t) = i_3(t)/(1 + R_2/R_0 + R_1/R_0)$
L'energia dissipata su R1 sara' $E_{Joule,R1} = \int_0^\infty R_1 i_{12}^2(t) dt$.

***Quesito 2 (fino a 10 punti)***
Si calcoli il campo elettrico prodotto in ogni punto dello spazio da una quantità di carica pari a 1μC distribuita uniformemente all'interno di una sfera cava di raggio minimo e massimo rispettivamente 3 cm e 10 cm. Si tratti lo spazio all'interno della cavità e all'esterno della distribuzione come completamente vuoto.

Il sistema di cariche e' a simmetria sferica, quindi $\phi = \phi(r)$ e $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ dove r e $\hat{r}$ sono rispettivamente la coordinata radiale uscente del sistema di coordinate sferiche e il corrispondente versore. Si applica quindi la legge di Gauss utilizzando superfici sferiche concentriche con la distribuzione di carica di raggio generico r, con 1) r> 10 cm, 3cm < r<10 cm e r< 3 cm. So otterra' quindi $\Phi_{S_r}(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r) = Q_{int}(S_r)/\epsilon_0$. Per r> 10 cm Q_{int}(S_r) = $Q_0$=

1μC, e il campo sarà coulombiano $\vec{E} = \dfrac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}$ . Anche il potenziale elettrostatico avrà' la forma colombiana avendo fissato la condizione di potenziale nullo all'infinito: $\phi(r) = \dfrac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Per 3cm < r<10 cm, $Q_{int}(S_r)$ = $\int_{R_{int}}^{r} \rho(r)dV = \int_{R_{int}}^{r} \rho(r)4\pi r^2 \, dr$. La densita' di carica e' uniforme

$\rho = \rho_0 = Q_0/V = Q_0/[\ (4/3)\pi\ (R_{ext}^3 - R_{int}^3)\ ]$ =

Allora, $Q_{int}(S_r)$ = $\rho_0[\ (4/3)\pi\ (r^3 - R_{int}^3)\ ]$ = $Q_0\dfrac{r^3 - R_{int}^3}{R_{ext}^3 - R_{int}^3}$.

Quindi

$\vec{E} = \dfrac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}\dfrac{r^3 - R_{int}^3}{R_{ext}^3 - R_{int}^3}\hat{r}$.

Il potenziale elettrostatico in questa regione sara' dato da

$$\phi(r) - \phi(R_{ext}) - \int_{r}^{R_{ext}} \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{r^3 - R_{int}^3}{R_{ext}^3 - R_{int}^3}\hat{r}\cdot dr\hat{r} =$$

$$\frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0(R_{ext}^3 - R_{int}^3)}\int_{r}^{R_{ext}} r\hat{r}\cdot dr\hat{r} - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{R_{int}^3}{R_{ext}^3 - R_{int}^3}\int_{r}^{R_{ext}} \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot dr\hat{r} =$$

$$\frac{Q_0}{8\pi\epsilon_0(R_{ext}^3 - R_{int}^3)}(R_{ext}^2 - r^2) - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{R_{int}^3}{R_{ext}^3 - R_{int}^3}(1/r - 1/R_{ext})$$

Quindi

$$\phi(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 R_{ext}} + \frac{Q_0}{8\pi\epsilon_0(R_{ext}^3 - R_{int}^3)}(R_{ext}^2 - r^2) - \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{R_{int}^3}{R_{ext}^3 - R_{int}^3}(1/r - 1/R_{ext}) =$$

$$\frac{Q_0}{8\pi\epsilon_0(R_{ext}^3 - R_{int}^3)}\left(2R_{ext}^2 - 2\frac{R_{int}^3}{R_{ext}} + R_{ext}^2 - r^2 - 2\frac{R_{int}^3}{r} + 2\frac{R_{int}^3}{R_{ext}}\right) =$$

$$\frac{Q_0}{8\pi\epsilon_0(R_{ext}^3 - R_{int}^3)}\left(3R_{ext}^2 - r^2 - 2\frac{R_{int}^3}{r}\right).$$

Che per $r \to R_{int}$ diventa $\phi(R_{int})$= $\dfrac{3Q_0}{8\pi\epsilon_0(R_{ext}^3 - R_{int}^3)}\left(R_{ext}^2 - R_{int}^2\right)$

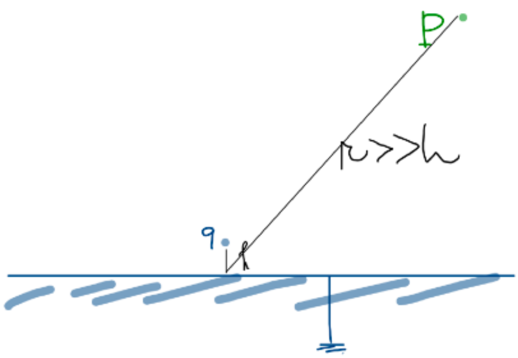
Nella cavita', l'applicazione della legge di Gauss ci dice che $\vec{E} = 0$ e il potenziale elettrostatico sara' costante e pari a

$\phi(r \le R_{int}) = \phi(R_{int})$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Gradiente $\nabla f$ | $\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$ | $\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$ | $\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$ |
| Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$ | $\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ | $\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ | $\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$ |
| Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$ | $(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\mathbf{x}} +$<br>$(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\mathbf{y}} +$<br>$(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\mathbf{z}}$ | $(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{\boldsymbol{\rho}} +$<br>$(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho})\hat{\boldsymbol{\phi}} +$<br>$\frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi})\hat{\mathbf{z}}$ | $\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi})\hat{\mathbf{r}} +$<br>$\frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi))\hat{\boldsymbol{\theta}} +$<br>$\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta})\hat{\boldsymbol{\phi}}$ |
| Laplaciano $\nabla^2 f$ | $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ | $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ | $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$ |
| Laplaciano di un vettore $\nabla^2 \mathbf{A}$ | $\nabla^2 A_x\hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y\hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_z\hat{\mathbf{z}}$ | $(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{\rho}} +$<br>$(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi})\hat{\boldsymbol{\phi}} +$<br>$(\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$ | $(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{r}} +$<br>$(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\theta}} +$<br>$(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}}$ |
| Lunghezza infinitesima | $d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$ | $d\mathbf{l} = d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\mathbf{z}}$ | $d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$ |
| Aree infinitesime | $d\mathbf{S} = dydz\hat{\mathbf{x}} +$<br>$dxdz\hat{\mathbf{y}} +$<br>$dxdy\hat{\mathbf{z}}$ | $d\mathbf{S} = \rho d\phi dz\hat{\boldsymbol{\rho}} +$<br>$d\rho dz\hat{\boldsymbol{\phi}} +$<br>$\rho d\rho d\phi\hat{\mathbf{z}}$ | $d\mathbf{S} = r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\mathbf{r}} +$<br>$r\sin\theta dr d\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} +$<br>$rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$ |
| Volume infinitesimo | $dv = dxdydz$ | $dv = \rho d\rho d\phi dz$ | $dv = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$ |

***Quesito 3 (fino a 12)***

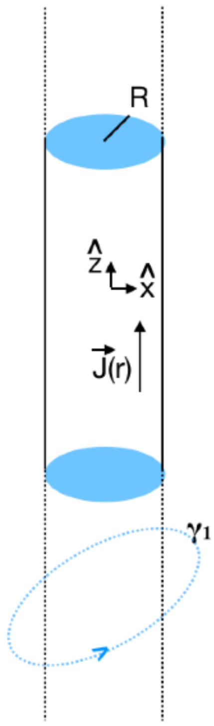
Si consideri un piano conduttore infinito mantenuto al valore di potenziale elettrostatico nullo e una carica puntiforme q a distanza h dal piano. Calcolare il campo elettrico nel punto P in figura. In un sistema di riferimento con origine nel punto proiezione della carica q sul piano, il punto P sia identificato da un raggio vettore con modulo r >> h.




Uso il metodo delle cariche immagine (il piano conduttore a potenziale nullo e la carica puntiforme sono equivalenti, per il calcolo del campo elettrico in P e del potenziale in P, alla carica q a (0,0,h) e una carica -q a (0,0,-h) e dal momento che P e' molto distante dalla carica, posso trattare le due cariche del sistema fittizio come un dipolo con momento $\overrightarrow{p} = 2hq\hat{z}$. Quindi chiamato $\vec{r} = y\hat{y} + z\hat{z} = r\cos\theta\hat{y} + r\sin\theta\hat{z}$ si ha

$$\overrightarrow{E}(P) = \frac{3(\overrightarrow{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{p}}{r^5} = \frac{3(2hq\hat{z}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2 2hq\hat{z}}{r^5} = \frac{6hq\sin\theta\ \hat{r}}{r^3} - \frac{2hq\ \hat{z}}{r^3}$$

$$= \frac{6hq\sin\theta\ (\cos\theta\hat{y} + \sin\theta\hat{z})}{r^3} - \frac{2hq\ \hat{z}}{r^3} = \frac{3hq\sin 2\theta}{r^3}\hat{y} + \frac{6hq\sin^2\theta - 2hq}{r^3}\hat{z}$$




***Quesito 4 (fino a 12)***

In un cilindro di lunghezza L e raggio R, con *L>>R*, scorre una densità di corrente uniforme $\vec{J}(r) = J_0 \hat{z}$, dove l'asse z coincide con l'asse del cilindro.
Calcolare il campo magnetico in un punto P a distanza r=R/2 e in un punto P' a distanza r'=(3/2)R dall'asse del cilindro.
Si calcoli il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito $\gamma_1$ in figura e con un circuito quadrato con un lato sull'asse del cilindro di lunghezza *a>R*. Si calcoli la circuitazione del potenziale vettore $\vec{A}$ sui circuiti $\gamma_1$ e $\gamma_2$

Data la simmetria cilindrica delle sorgenti, il potenziale vettore e' funzione solo della distanza dall'asse r ed e' parallelo alle correnti, cioe' $\vec{A} = A(r)\hat{z}$.
Quindi $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A} = B(r)\hat{\phi}$ perpendicolare al potenziale vettore e quindi alle correnti e inoltre le sue linee di campo si avvolgono attorno alle correnti. Quindi consideriamo un circuito γ costituito da una circonferenza nel piano perpendicolare all'asse z e con centro sull'asse di raggio r>R e applichiamo Ampere per calcolare il campo B:

$$\oint_\gamma B(r)\hat{\phi} \cdot dl\hat{\phi} = \mu_0 \int_{\Sigma_\gamma} \vec{J} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B(r) = \mu_0 J_0 \pi R^2$$

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2r}\hat{\phi}.$$

Per un punto interno alla distribuzione, utilizzando un circuito di raggio r<R , si avrà

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J_0 r^2}{2r}\hat{\phi} = \frac{\mu_0 J_0 r}{2}\hat{\phi}$$

Nel punto P quindi il campo vale $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 J_0 R}{4}\hat{\phi}$ e in P' $\vec{B}(P') = \frac{\mu_0 J_0 R}{3}\hat{\phi}$.

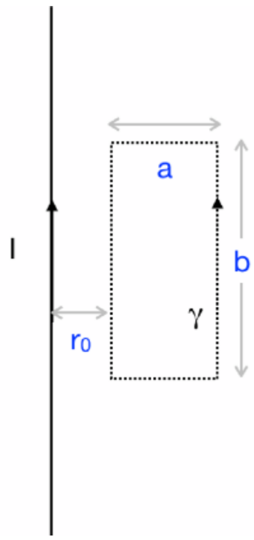
Il flusso di B attraverso γ1 e' nullo perche' qualunque sia l'inclinazione, ci sono tante linee di campo entranti quante uscenti, visto che il circuito ha certo sull'asse.

Il flusso di b attraverso un rettangolo $\gamma_R$ con un lato sull'asse di lunghezza l e l'altro lato di lunghezza a > R orientato in senso orario e'

$$\Phi_{\Sigma_{\gamma_R}}(\vec{B}) = \int_{\Sigma_{\gamma_R}} B(r)\hat{\phi} \cdot ds\hat{\phi} = l\int_0^R \frac{\mu_0 J_0 r}{2} dr + l\int_R^a \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2r} dr = l\frac{\mu_0 J_0 R^2}{4} + l\frac{\mu_0 J_0 R^2}{2}\ln\frac{a}{R} = \frac{\mu_0 J_0 l R^2}{4}\left(1 + 2\ln\frac{a}{R}\right)$$

***Quesito 5 (fino a 8 punti)***

Il filo rettilineo infinito rappresentato in figura e' percorso dalla corrente costante ***i*** =10 A. Si calcoli la forza che agisce sul circuito γ, fisso nello spazio, se esso e' percorso da una corrente $i_0$=1 A in senso antiorario.
I parametri geometrici siano $r_0$ = 2 cm, a=10cm e b=70cm.



Il campo magnetico generato dal filo e' $\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\phi}$ (Biot Savard, si calcola facilmente con Ampere).

La forza su ogni tratto del circuito in posizione $\vec{r}$ e' pari a $d\overrightarrow{F}(\vec{r}) = i_0 d\vec{l} \wedge \overrightarrow{B}(\vec{r})$. Quindi su un tratto del lato orizzontale in alto e su quello corrispondente sul lato in basso la forza e' uguale e opposta perche' B e' lo stesso e il tratto di circuito e' opposto.

Sul lato parallelo al filo piu' pontando si ha $\overrightarrow{F}(r_0 + a) = i_0 b\hat{z} \wedge \frac{\mu_0 i}{2\pi(r_0 + a)}\hat{\phi}$

$$\overrightarrow{F}(r_0 + a) = -\frac{\mu_0 i i_0 b}{2\pi(r_0 + a)}\hat{r}$$

Sul lato piu' interno $\overrightarrow{F}(r_0) = \frac{\mu_0 i i_0 b}{2\pi r_0}\hat{r}$.

La forza complessiva e' repulsiva $\overrightarrow{F}_{tot} = \frac{\mu_0 i i_0 b}{2\pi}\left(1/r_0 - 1/(r_0 + a)\right)\hat{r} = \frac{\mu_0 i i_0 b}{2\pi}\frac{a}{r_0(r_0 + a)}\hat{r}$

$$= 2 \times 10^{-7} \times 1 \times 10 \times 0.7\frac{10}{2(2 + 10)} = 5.8 \times 10^{-6} \text{ N}$$

***Quesito 6 (fino a 8 punti)***

Si discuta uno degli argomenti elencati:

1) Enunciato ed evidenze sperimentali della Legge di Faraday Neumann;
2) Definizione e proprietà fondamentali dei conduttori all'equilibrio elettrostatico;
3) La formula di Laplace per il calcolo di del campo magnetico prodotto da sorgenti filiformi e continue; si illustri con una figura l'applicazione data una sorgente generica e un punto generico della spazio in cui si desidera conoscere il campo magnetico;
4) I coefficienti di mutua induzione tra due circuiti e il loro utilizzo nella trattazione di spire accoppiate.

**RICORDA:**

$\varepsilon_0$ = 8.85 · $10^{-12}$ $C^2/Nm^2$ = 8.85 · $10^{-12}$ F/m; $\mu_0$ = 4π · $10^{-7}$ H/m, k = 1/ (4 π $\varepsilon_0$)= 9 · $10^9$ $Nm^2/C^2$

|e| = 1.6 · $10^{-19}$ C, $m_e$ = 9.1 · $10^{-31}$ Kg, $m_p$ = 1.67 · $10^{-27}$ Kg, $M_{He} \simeq 4\, m_p$

Campo $\overrightarrow{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\frac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\overrightarrow{E}$ prodotto da un dipolo: $\overrightarrow{E}(r,\vartheta) = k\,\frac{3(\overrightarrow{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{p}}{r^5}$;

Campo $\overrightarrow{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\overrightarrow{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\overrightarrow{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\overrightarrow{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}i\frac{d\vec{l}\wedge\vec{r}}{r^3}$; $\quad d\overrightarrow{F} = i d\vec{l} \wedge \overrightarrow{B}$