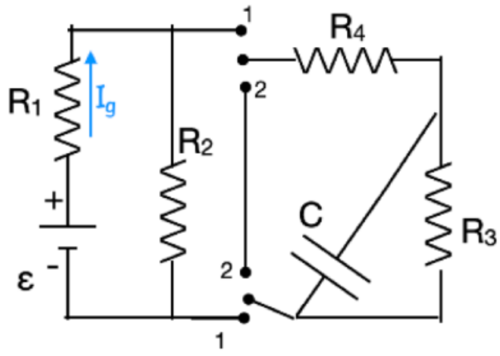
Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 47 - a.a. 2021-2022



Quesito 1 **(fino a 10)**
Si consideri il circuito in figura che opera da molto tempo con gli interruttori nelle posizioni 1. Si calcoli la potenza dissipata nel resistore R_1 e l'energia accumulata nel condensatore. Ad un certo istante di tempo gli interruttori si spostano nelle posizioni 2 contemporaneamente. Con quale andamento nel tempo si scaricherà il condensatore ?
Si consideri: R1 = R2 = R3 = 1 kΩ, ε = 10 V, R4 = 2 kΩ, C = 100 pF.

Nella configurazione 1 (interruttori sulla posizione 1) a regime (visto che il circuito opera da molto tempo) la corrente nel ramo del generatore (e quindi in R1) si dirama nel nodo in corrispondenza dell'interruttore in alto; una componente i2 (diretta verso il basso) scorrera' in R2 e un'altra scorrera' in R4 e poi in R3. Con ci sara' nessuna corrente nel ramo del condensatore che ormai e' completamente carico. Quindi R4 e R3 sono in serie e la loro combinazione e' in parallelo con R2. Infine R1 e' in serie con la resistenza eq di tutte le altre.

In definitiva $I_g = \dfrac{\epsilon}{R_1 + R_2(R_3+R_4)/(R_2+R_3+R_4)} = \dfrac{10\ \text{V}}{(1+1(3)/4)\ \text{k}\Omega} = 5.7\ \text{mA}$

La potenza dissipata in R1 e' quindi $P_{Joule,1} = R_1 I_g^2 = 10^3 \times 5.7^2 \times 10^{-6}\ \text{W} = 32.7\ \text{mW}$.

L'energia immagazzinata nel condensatore e' $U_e = 0.5 V^2 C = 0.5\ (i_4 \times R_3)^2\ C$.

Ma l'eq al nodo (in alto) ci da $I_g = I_2 + I_4$ e inoltre abbiamo $I_2 R_2 = I_4(R_4+R_3)$. Da queste due eq si ricava $I_g = I_4 + (R_4+R_3)I_4/R_2 = I_4(R_2+R_3+R_4)/R_2$ da cui $i_4 = 1.425\ \text{mA}$.

Quindi $U_e = 0.5 \times 1.425^2\ \Omega^2 \times 10^{-10}\ \text{F} \simeq 10^{-10}\text{J}$. Di conseguenza la carica sulle armature e' $Q_c = CV = CR_3 i_4 = 10^{-10} \times 10^3 \times 1.425 \times 10^{-3}\ \text{C} = 1.425 \times 10^{-10}\ \text{C}$.

Quando si passa alla configurazione 2 il condensatore si scarica su una resistenza eq che e' il parallelo di R3 e R4 ossia 0.5 kΩ. Quindi $Q(t) = Q_c(1 - e^{-t/\tau})$ con $Q_c = 1.425 \times 10^{-10}\ \text{C}$ e $\tau = CR_3R_4/(R_3+R_4)$ = 0.5 x 10^{-7} s.

Quesito 2 (fino a 10 punti)
Un cilindro cavo di lunghezza infinita contiene carica elettrica distribuita uniformemente nel suo volume con densità $\rho_0 = 1\ \text{nC/mm}^3$. Il raggio del cilindro è $R_{ext} = 5\ \text{mm}$ e la cavità ha raggio $R_{int} = 2\ \text{mm}$. Si calcoli la forza a cui è soggetta una carica puntiforme $q_0 = 1\ \text{fC}$ quando si trova nel punto P_0 a distanza di 1 cm dall'asse del cilindro e nel punto P1 a distanza di 3 mm dall'asse. Si calcoli il lavoro che e' necessario spendere contro il campo per portare la carica puntiforme $q_0 = 1\ \text{fC}$ dal punto P_0 al punto P_1.

La carica sara' soggetta in ogni punto P a una forza pari a $\vec{F} = q_0 \vec{E}(P)$. Il lavoro che dovro' spendere per portare la carica da P0 a P1 sara\ uguale alla variazione di energia potenziale della carica quindi $L = q_0(\phi(P_1) - \phi(P_0))$.

Il sistema ha simmetria cilindrica, il che significa che $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ dove r e $\hat{r}$ sono la distanza dall'asse di simmetria e il versore perpendicolare all'asse e radiale uscente che indica la direzione in cui r cresce. Quindi per calcolare il campo nel punto P0 consideriamo una superficie cilindrica C di raggio r = r0 = 1cm e altezza arbitraria, h, cosi' che P0 appartenga alla superficie laterale. Applichiamo la legge di gauss alla superficie C:

$$\Phi_C(\vec{E}) = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q_{int}(C)/\epsilon_0\ .$$

Il flusso riceve contributi solo dalla superficie laterale perche' il campo e' perpendicolare alla normale alle superfici di base =>

$$\Phi_C(\vec{E}) = \int_{S_L} E(r)\hat{r}\cdot ds\hat{r} = 2\pi r h E(r) = \pi(R_{ext}^2 - R_{int}^2)h\rho_0/\epsilon_0$$

$\vec{E}(r) = \dfrac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)\rho_0}{2\epsilon_0 r}\hat{r}$. Nel caso del punto P1, interno alla distribuzione di carica, lo stessa procedura ci da $\Phi_{C'}(\vec{E}) = 2\pi r h E(r) = \pi(r^2 - R_{int}^2)h\rho_0/\epsilon_0$ quindi $\vec{E}(r) = \dfrac{(r^2 - R_{int}^2)\rho_0}{2\epsilon_0 r}\hat{r}$.

In definitiva la forza sulla carica

In P0 e' $\vec{F}(P_0) = q_0\dfrac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)\rho_0}{2\epsilon_0 r(P_0)}\hat{r} = 10^{-15}C\dfrac{10^{-4}(0.5^2 - 0.2^2)m^2\times 10^{-9}\times 10^9 C/m^3}{2\times 8.85\times 10^{-12}C^2/Nm^2\ 0.01m}\hat{r} =$
$\simeq 1.17\times 10^{-7}\ \mathrm{N}\ \hat{r}$. Invece nel punto P1 si ha:

$$\vec{F}(P_1) = q_0\frac{(r^2 - R_{int}^2)\rho_0}{2\epsilon_0 r(P_1)}\hat{r} = 10^{-15}C\frac{10^{-4}(0.09 - 0.04)m^2\times 10^{-9}\times 10^9 C/m^3}{2\times 8.85\times 10^{-12}C^2/Nm^2\ 0.003m}\hat{r} =$$
$$\simeq 0.93\times 10^{-7}\ \mathrm{N}\ \hat{r}$$

$$L = q_0(\phi(P_1) - \phi(P_0)) = q_0(\phi(P_1) - \phi(R_{ext})) + (\phi(R_{ext}) - \phi(P_0))$$

$$\phi(P_1) - \phi(R_{ext}) = \int_{r(P_1)}^{R_{ext}} \frac{(r^2 - R_{int}^2)\rho_0}{2\epsilon_0 r}\hat{r}\cdot dr\hat{r} = \rho_0\frac{R_{ext}^2 - r^2(P_1)}{4\epsilon_0} - \rho_0\frac{R_{int}^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{R_{ext}}{r(P_1)}\right)$$

$$\phi(R_{ext}) - \phi(P_0) = \int_{R_{ext}}^{r(P_0)} \frac{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)\rho_0}{2\epsilon_0 r}\hat{r}\cdot dr\hat{r} = \rho_0\frac{R_{ext}^2 - R_{int}^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{r(P_0)}{R_{ext}}\right)$$

L = $q_0\rho_0\left(\dfrac{R_{ext}^2 - r^2(P_1)}{4\epsilon_0} - \dfrac{R_{int}^2}{2\epsilon_0}\ln\dfrac{r(P_0)}{r(P_1)} + \dfrac{R_{ext}^2}{2\epsilon_0}\ln\dfrac{r(P_0)}{R_{ext}}\right)$=(0.04-0.024+0.347)$10^{-8}$ J= **0.36x10^{-8} J**

$$q_0\rho_0/\epsilon_0 = 10^{-4}\ \mathrm{J/m^2} = 10^{-8}\ \mathrm{J/cm^2}$$

Quesito 3 (fino a 12)

In un solenoide ideale, di raggio **a** e densità lineare di spire **n** scorre una corrente sinusoidale lentamente variable $I(t) = I_0\sin(\omega t)$. Quale corrente percorrerà una spira circolare metallica coassiale al solenoide e di raggio b>a e di resistenza Rs ? Si calcoli il campo magnetico indotto, prodotto dalla corrente nella spira circolare nel punto al centro della spira e lo si confronti con il campo prodotto dal solenoide.

Siano a=10cm, I0=1A, ω = 0.628 Hz, b=20cm, Rs=1Ω.

Il campo magnetico prodotto dal solenoide e' $\vec{B} = \mu_0 n I_o\sin\omega t\ \hat{z}$, in tutti i punti interni al solenoide, se l'asse z coincide con l'asse del solenoide. Il suo flusso concatenato con la spira di raggio b e' $\Phi_b(\vec{B}) = \pi a^2\ \mu_0 n I_o\sin\omega t$. La corrente indotta nella spira sara'

$$i_{ind}(t) = -\frac{1}{R_s}\frac{d\Phi_b(\vec{B})}{dt} = -\frac{\pi a^2\ \mu_0 n I_o}{R_s}\omega\cos\omega t.$$

Al centro della spira il campo indotto e' $\vec{B}_{ind} = \dfrac{\mu_0 i_{ind}(t)}{4\pi}\displaystyle\int_{\gamma_b}\dfrac{b\ d\phi\hat{\phi}\wedge(-b\hat{r})}{b^3} = \dfrac{\mu_0 i_{ind}(t)}{2b}\hat{z}$

Il rapporto tra il campo indotto e il campo del solenoide e' quindi

$$|\vec{B}_{ind}|/|\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2b}\frac{\pi a^2\ \mu_0 n I_o}{R_s}\omega\cos\omega t\Big/\mu_0 n I_o\sin\omega t = \frac{\mu_0}{2b}\frac{\pi a^2}{R_s}\omega\cot\omega t \sim 10^{-8}$$

Quesito 4 (fino a 10 punti)
Il campo magnetico sull'asse di un solenoide di lunghezza L, raggio R e densità lineare di spire n è diretto lungo l'asse del solenoide e il suo modulo dipende dalla distanza x dal centro del solenoide come segue: $\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i n}{2}\left(\frac{L+2x}{\sqrt{(L+2x)^2+4R^2}} + \frac{L-2x}{\sqrt{(L-2x)^2+4R^2}}\right)\hat{x}$.
Si dimostri che nell'approssimazione di L infinita il campo magnetico è pari a $\vec{B} = \mu_0 i n \hat{x}$ in ogni punto dello spazio interno al solenoide, mentre è nullo all'esterno.
Il campo magnetico sull'asse e' $\vec{B}(x) = \mu_0 i n \ \hat{x}$, Applicando Ampere a un circuito rettangolare con un lato di lunghezza l sull'asse e l'altro parallelo a distanza r<R, si ha che la circolazione di $\vec{B}(x)$ e' nulla perche' non ci sono correnti concatenate, il contributo alla circuitazione dai due lati perpendicolari all'asse e\ uguale e opposto, invece i sue lati paralleli all'asse danno $\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 n i(t) l - B(r) l = 0$. Quindi $\vec{B}(r) = \mu_0 n i(t)\hat{z}$ come sull'asse. Ripetendo la procedura con un rettangolo con un lato di lunghezza l sull'asse e l'altro lato di lunghezza r>R si ha $\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 n i(t) l - B(r) l = i_{concatenata} = \mu_0 n l i(t)$. Quindi il campo e' nullo all'esterno.

Quesito 5 (fino a 8 punti)
Un protone e una particella α entrano in una regione dello spazio in cui esiste un campo magnetico uniforme muovendosi in direzione perpendicolare al campo. Si determini in che rapporto si devono trovare le energie cinetiche delle due particelle affinché esse descrivano traiettorie di uguale raggio. Si ricordi che $m_\alpha \simeq 4m_p$ e $q_\alpha = 2q_p$ e si faccia l'ipotesi di regime non relativistico.
Il moto e' circolare uniforme con $mv^2/R = qvB$ quindi $R = mv/qB$.
$R_\alpha = 4m_p v_\alpha/2eB$
$R_p = m_p v_p/eB$
Quindi raggio uguale significa che $4m_p v_\alpha/2eB = m_p v_p/eB$ cioe' $v_\alpha = v_p/2$; allora
$K_\alpha/K_p = m_\alpha v_\alpha^2/m_p v_p^2 = m_\alpha v_p^2/4m_p v_p^2 \simeq 4m_p v_p^2/4m_p v_p^2 = 1$

Quesito 6 (fino a 8 punti)
Si discuta uno degli argomenti elencati:
1) Legge di Ampere in formulazione locale e integrale;
2) Lo schermo elettrostatico;
3) Il dipolo elettrico, potenziale e campo nei punti dell'asse del dipolo e del piano a cui appartiene il dipolo perpendicolare alla sua direzione;
4) Teorema di Coulomb, enunciato e dimostrazione.

RICORDA:
$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ C^2/Nm^2 = $8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m, k = 1/ (4 π ε_0)= $9 \cdot 10^9$ Nm^2/C^2
|e| = $1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_{He} \simeq 4\, m_p$

Campo $\vec{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\frac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\vec{E}$ prodotto da un dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$;

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$; $\quad d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Divergenza $\nabla\cdot\mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$
Rotore $\nabla\times\mathbf{A}$	$(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\mathbf{x}}\ +$ $(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\mathbf{y}}\ +$ $(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\mathbf{z}}$	$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{\boldsymbol{\rho}}\ +$ $(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial \rho})\hat{\boldsymbol{\phi}}\ +$ $\frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi})\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{r}}\ +$ $\frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi))\hat{\boldsymbol{\theta}}\ +$ $\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
Laplaciano di un vettore $\nabla^2\mathbf{A}$	$\nabla^2 A_x\hat{\mathbf{x}}+\nabla^2 A_y\hat{\mathbf{y}}+\nabla^2 A_z\hat{\mathbf{z}}$	$(\nabla^2 A_\rho-\frac{A_\rho}{\rho^2}-\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\rho}}\ +$ $(\nabla^2 A_\phi-\frac{A_\phi}{\rho^2}+\frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}}\ +$ $(\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$	$(\nabla^2 A_r-\frac{2A_r}{r^2}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{r}}\ +$ $(\nabla^2 A_\theta-\frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\theta}}\ +$ $(\nabla^2 A_\phi-\frac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta}+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}+\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l}=dx\hat{\mathbf{x}}+dy\hat{\mathbf{y}}+dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l}=d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}+\rho d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}+dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l}=dr\hat{\mathbf{r}}+rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S}=\ dydz\hat{\mathbf{x}}+$ $dxdz\hat{\mathbf{y}}+$ $dxdy\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S}=\ \rho d\phi dz\hat{\boldsymbol{\rho}}+$ $d\rho dz\hat{\boldsymbol{\phi}}+$ $\rho d\rho d\phi\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S}=\ r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\mathbf{r}}+$ $r\sin\theta drd\phi\hat{\boldsymbol{\theta}}+$ $rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Volume infinitesimo	$dv=dxdydz$	$dv=\rho d\rho d\phi dz$	$dv=r^2\sin\theta drd\theta d\phi$