Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 49 - a.a. 2022-2023

Quesito 1 (fino a 10)

In uno strato sottile di materiale isolante, di spessore d, è depositata carica elettrica con una densità volumetrica costante $\rho(z) = \rho_0$. Si calcoli il campo elettrico in ogni punto dello spazio e si discuta il risultato trovato nell'approssimazione di spessore trascurabile dello strato carico.
Si discuta come cambiano questi risultati se la densita' di carica e' dipendente dalla profondità secondo la relazione $\rho(z) = az^2$, dove z è la distanza dal centro dello strato.

Il sistema di sorgenti ha simmetria planare, quindi, le grandezze non dipendono da x e y ma solo da z: $\overrightarrow{E} = E(z)\hat{z}; \quad \phi = \phi(z)$. Inoltre al centro dello strato il campo e' ovviamente nullo, visto che una carica di prova collocata al centro vede la stessa quantità di carica sopra e sotto. Possiamo allora applicare Gauss, per esempio, a una superficie Σ cilindrica di raggio arbitrario [o altrimenti a un parallelepipedo con base di forma arbitraria] con una base collocata centro dello strato, l'altra base a z > d/2. Il contributo al flusso della base a z= 0 sara' 0 visto che il campo e' nullo; il contributo al flusso dalla superficie laterale sara' nullo perche' gli elementino di superficie sono vettori con direzione e verso paralleli al piano xy, quindi perpendicolari al campo elettrico.
Quindi il flusso e' pari al contributo dell'altra superficie di base: $\Phi(\overrightarrow{E})_\Sigma = A \times E(z)$ dove A e' l'area della superficie.
Di conseguenza

$$\Phi(\overrightarrow{E})_\Sigma = A \times E(z) = Q_{int}(\Sigma)/\epsilon_0 = \frac{\rho_0 \times A \times d}{2\epsilon_0}$$

Pertanto $\overrightarrow{E}(z) = \dfrac{\rho_0 d}{2\epsilon_0}\hat{z}$ costante per z>0.

A z<0 per simmetria il campo avrà verso opposto, quindi $\overrightarrow{E}(z) = -\dfrac{\rho_0 d}{2\epsilon_0}\hat{z}$ per z<0.

Per un punto P con 0<z<d/2 si applica Gauss a una superficie Σ'analoga, con una base contenente il punto P. $\Phi(\overrightarrow{E})_{\Sigma'} = A \times E(z) = Q_{int}(\Sigma')/\epsilon_0 = \dfrac{\rho_0 \times A \times z}{\epsilon_0}$, di conseguenza si ha $\overrightarrow{E}(z) = \dfrac{\rho_0 z}{\epsilon_0}\hat{z}$. Questa espressione rappresenta correttamente anche il campo per un punto P' con -d/2<z<0.
In sostanza il campo e' uniforme all'esterno dello strato e ha modulo crescente linearmente con |z| all'interno dello strato di carica.

Se lo spessore e' trascurabile lo strato puo' essere descritto come uno strato superficiale, con densita' superficiale $\sigma = \rho d$, il campo (all'esterno dello strato) vale quindi $\overrightarrow{E}(z) = \dfrac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}$ a z>0 e l'opposto a z<0. Definita la direzione $\hat{n} = \hat{z}$, si osserva che la proiezione del campo sulla direzione $\hat{n}$ subisce un salto pari a $\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}$ come e' noto dal teorema di Coulomb.

Se la densita' di carica e' dipendente da z, rimane l'invarianza per x e y e quindi $\overrightarrow{E} = E(z)\hat{z}; \quad \phi = \phi(z)$ come nel caso di densita' costante. Si potranno utilizzare quindi le stesse superfici gaussiane per il calcolo del campo. L'unica differenza sara' data dalla carica interna a queste superfici che sara':

$$Q_{int}(\Sigma') = A\int_0^{d/2} \rho(z)dz = A\int_0^{d/2} az^2dz = Aa\frac{1}{3}(d/2)^3 = \frac{aAd^3}{24} \text{ per z>d/2}$$

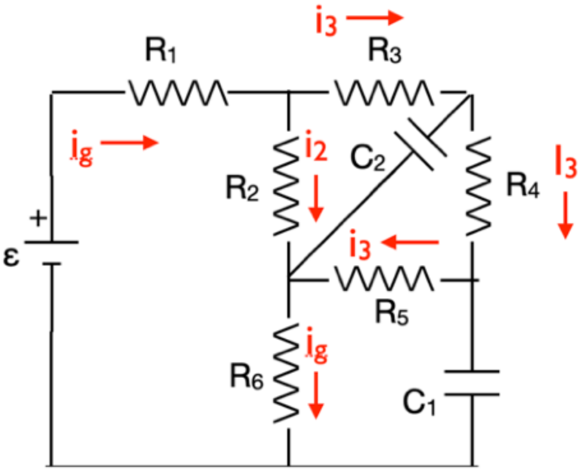
$$Q_{int}(\Sigma') = A\int_0^z \rho(z)dz = A\int_0^z az^2dz = Aa\frac{1}{3}z^3 \text{ per } 0<z<d/2$$

Quindi il campo varra'

$$\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{ad^3}{24\epsilon_0}\hat{z} & z > d/2 \\ \vec{E} = \dfrac{az^3}{3\epsilon_0}\hat{z} & -d/2 < z < d/2 \\ \vec{E} = -\dfrac{ad^3}{24\epsilon_0}\hat{z} & z < -d/2 \end{cases}$$

Quesito 2 (fino a 10 punti)

Determinare la d.d.p. V_1 e V_2 ai capi dei due condensatori di capacita' C_1 e C_2 a regime. Si calcoli inoltre la carica accumulata sulle armature dei condensatori Q_1 e Q_2.
Si assumano i seguenti valori per i parametri del circuito:
R_1=300 Ω, R_2=2 kΩ, R_3=200 Ω, R_4=500 Ω, R_5=300 Ω, R_6=400 Ω, ε=10V, C_1 = 0.1 nF e C_2 = 0.2 nF.



A regime non scorre corrente nei rami con i condensatori.
Quindi a regime, R3, R4 e R5 sono attraversate dalla stessa corrente I3; R2 e' attraversata da una corrente I2 che sommata a I3 da la corrente Ig che circola nel ramo con generatore, R1 e R6.
La differenza di potenziale Vc1 ai capi di C1 e' quindi uguale a Vc1 = I3R5 + IgR6.
Invece la differenza di potenziale ai capi del condensatore C2 e' Vc2 = I3 (R4 + R5).

Per calcolare Ig si determina la resistenza equivalente di tutto il circuito
Req = R1 + R6 + R2 (R3+R4+R5) / (R2+R3+R4+R5) = 300 + 400 + 2000 x 1000 / 3000 = 700 + 667 = 1367 Ω.
=> Ig = 7.3 mA. Inoltre I2 x R2 = I3 x (R3+R4+R5) => dati i valori delle resistenze risulta I2 = I3/2, perciò I2 = Ig / 3 = 2.43mA , e I3 = 2 Ig / 3 = 4.87 mA.

=> Vc1 = I3R5 + IgR6 = 4.87 x 300 + 7.3 x 400 mV = 4.38 V
=> Vc2 = I3 (R4 + R5) = 4.87 x 800 = 3.90 V
=> Q1 = Vc1 x C1 = 0.44 nC
=> Q2 = Vc2 x C2 = 0.78 nC

Quesito 3 (fino a 12)

Un solenoide di lunghezza infinita e' costituito da 1000 spire/m, di raggio R_0=10 cm e' percorsa dalla corrente di 5A. Si calcoli il campo magnetico in ogni punto dello spazio. Si determini il flusso del campo magnetico concatenato con una spira circolare S coassiale al solenoide di raggio R_1=20 cm e il coefficiente di mutua induzione tra il solenoide e la spira. Si calcoli il potenziale vettore A in ogni punto dello spazio (interno ed esterno al solenoide, si faccia un grafico del modulo di A in funzione della distanza dall'asse del solenoide).

Il campo magnetico e' nullo fuori dal solenoide e uniforme all'interno

$$\vec{B} = \mu_0 in\hat{z} = 4\pi\ 10^{-7}\ 5\ 10^3\hat{z} = 2\pi \times 10^{-3}\ \mathrm{T}\ \hat{z}$$

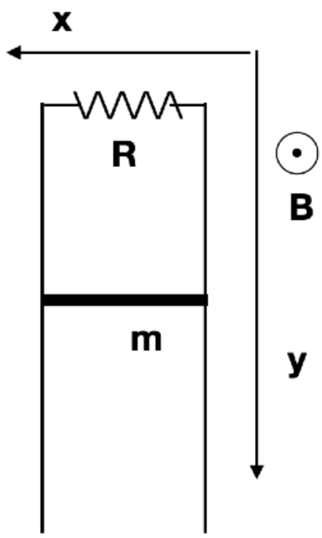
Il flusso concatenato con la spira di raggio 20 cm sara' uguale al flusso concatenato con una spira del solenoide (visto che il campo all'esterno e' nullo), quindi
$\Phi_S = B\pi R_0^2 = 2\pi \times 10^{-3} \times \pi \times 0.1^2 = 2\pi^2 \times 10^{-5}$ Weber.

$\Phi_S = \mu_0 in\pi R_0^2 = Mi$, quindi M = $\mu_0 n\pi R_0^2 = 4\pi^2 \times 10^{-6}$ H.

Il potenziale vettore ha la direzione delle correnti sorgenti del campo magnetico, ossia $\hat{\phi}$, e per simmetria dipenderà solo dalla distanza r dall'asse del solenoide. Esso e' legato al campo magnetico da $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$, quindi dati un circuito γ e una arbitraria superficie Σ_γ che ha come bordo γ, si ha $\Phi(\vec{B})_{\Sigma_\gamma} = \Phi(\nabla \wedge \vec{A})_{\Sigma_\gamma} = \oint_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{l}$ dove l'ultima eguaglianza deriva dall'applicazione del teorema di Stokes.
Allora possiamo scegliere un circuito γ che sia una circonferenza di raggio r>R0, orientato come $\hat{\phi}$ e calcolare il flusso del campo magnetico $\Phi(\vec{B})_{\Sigma_\gamma} = \mu_0 in\pi R_0^2$ =
$\oint_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{l} = A(r)2\pi r$ da cui $\vec{A}(r) = \dfrac{\mu_0 in R_0^2}{2r}\hat{\phi}$.
Invece a r<R0 con lo stesso procedimento si ottiene $\Phi(\vec{B})_{\Sigma_\gamma} = \mu_0 in\pi r^2$ e quindi
$\vec{A}(r) = \dfrac{\mu_0 inr}{2}\hat{\phi}$.

Quindi A(r) parte da zero a r=0, cresce linearmente fino a raggiungere per r=R0 il valore $A(R_0) = \dfrac{\mu_0 in R_0}{2}$ e dad li decresce come 1/r tendendo a zero.

Quesito 4 (fino a 10 punti)



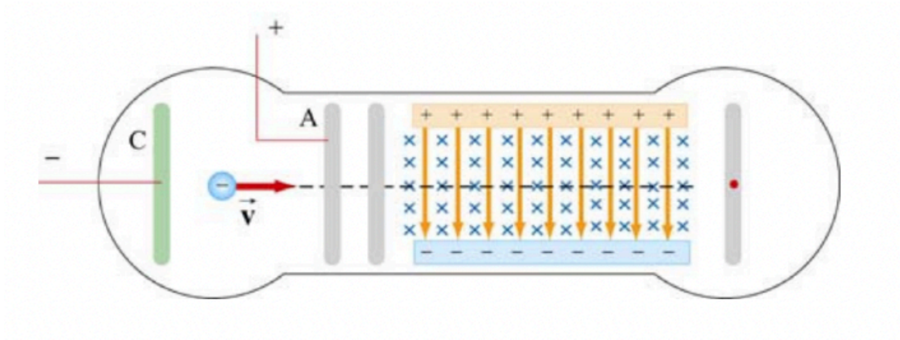
In una regione dello spazio in cui e' presente il campo magnetico uniforme $\vec{B} = B_0\hat{z}$ si trovano due guide conduttrici verticali collegate da un resistore di valore *R* e da una bacchetta conduttrice di massa *m* che puo' scorrere senza attrito lungo le guide. Si discuta il moto della bacchetta.

L'equazione del moto del moto della bacchetta e' determinata dalla forza peso e dalla forza che agisce su si essa in quanto e' percorsa da corrente e immersa in un campo magnetico. La corrente *I* e' indotta dal fatto che quando la barretta scivola verso il basso l'area definita dal circuito costituito dalle guide, dalla barretta e dal resistore cresce e quindi il flusso di campo magnetico concatenato con il circuito cambia nel tempo. Quando le due forze si bilanciano si raggiunge una velocità limite.
Orientato il circuito in senso antiorario, in un piccolo intervallo di tempo in cui la barretta si abbassa del tratto dy, $d\Phi(\vec{B}) = l\ dy\ B$,
perciò $I = -\dfrac{lBv(t)}{R}$ e questa corrente indotta scorre in senso orario, ossia opposto (come indicato dal segno di *I*) rispetto al verso di percorrenza che abbiamo fissato per il circuito. La forza magnetica sulla barretta e' $\vec{F} = Il(-\hat{x}) \wedge \vec{B} = IlB_0\hat{y}$ (si ricordi che I<0).

L'eq del moto della barretta e' dettata dalla $mg + IlB_0 = ma => ma = 0 = mg - \frac{l^2B_0^2v(t)}{R}$.
La velocita' limite e' data da $v(t) = \frac{Rmg}{l^2B_0^2}$.

Quesito 5 (fino a 10 punti)

In figura e' rappresentato l'apparato sperimentale utilizzato da Thompson per misurare il rapporto tra la carica elettrica e la massa dell'elettrone: e/m.
Dal piano metallico verticale indicato con C (catodo), che si trova al potenziale V_0, sono emessi elettroni con energia cinetica iniziale trascurabile. Il piano indicato con A (anodo) si trova a un valore del potenziale elettrostatico V_A,, con $V_A - V_0 > 0$. Con quale velocita' gli elettroni raggiungono il piano A ? Superato il piano A gli elettroni entrano in una regione dello spazio in cui c'e' un campo elettrico uniforme in direzione verticale diretto verso il basso e un campo magnetico perpendicolare al piano della figura e entrante. Quali forze esercita ciascun campo sull'elettrone ? Si determini la relazione tra l'intensità' del campo elettrico e del campo magnetico affinché la traiettoria degli elettroni non risulti deflessa.



Sistema di riferimento: asse x orizzontale diretto da C verso A, asse y verticale diretto verso l'alto, di conseguenza, asse z perpendicolare e uscente dal piano della figura. L'energia potenziale di un elettrone che si sposta da un punto al potenziale V0 a un punto al potenziale VA subisce una variazione pari a -e ($V_A - V_0$) a cui corrisponde una variazione di energia cinetica $E_{kf} - E_{ki} = e (V_A - V_0)$. Dal momento che $E_{ki} \sim 0$, $E_{kf} = 0.5\, m_e v_A^2 = e (V_A - V_0)$. Quindi la velocita' con cui l'elettrone raggiunge A e' v_A = sqrt(2 e ($V_A - V_0$) / m_e).

Nella regione in cui c'e' campo elettrico e campo magnetico, l'elettrone e' soggetto a una forza $\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B$ dove $\vec{F}_E = -e\vec{E} = eE\hat{y}$ e' la forza dovuta al campo elettrico (asse y diretto verso l'alto) e $\vec{F}_B = -ev_A\hat{x} \wedge (-B\hat{z}) = -ev_AB\hat{y}$ e' la forza di Lorentz all'ingresso della regione in cui sono attivi i campi. Quindi se $v_AB = E$, la risultate delle forze sull'elettrone e' nulla e quindi il moto dell'elettrone rimane rettilineo uniforme con velocita' pari a v_A nel verso positivo dell'asse x.
Quindi questo apparato "seleziona" elettroni di velocita' E/B, nel senso che solo elettrico con questa velocita' raggiungono il punto indicato in rosso a valle dei campi; Se VA non e' uguale a E/B il faccettò sara' infatti deviato in alto o in basso. Quindi regolando $V_A - V_0$ in modo d avere un fascio di elettroni non deflesso e noti E e B, Thompson determino' il rapporto e/m come $e/m_e = \frac{(E/B)^2}{2(V_A - V_0)}$.

Quesito 6 (fino a 8 punti)

Si discuta ***solo uno*** degli argomenti elencati:
1) Si discuta e dimostri il teorema di Coulomb;
2) Si dimostri che in un conduttore all'equilibrio elettrostatico la densita' superficiale di carica sulla superficie di una cavita' interna e' nulla punto per punto.
3) Si discuta l'equazione di Poisson e la sua soluzione generale.
4) Si enunci e discuta l'equazione di Ampere Maxwell .

RICORDA:

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\, C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m;
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,
$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\, Nm^2/C^2$

$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_{He} \simeq 4\, m_p$

Campo $\vec{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\dfrac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\vec{E}$ prodotto da un dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\,\dfrac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$;

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r,\vartheta) = k\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV;\qquad d\vec{F} = \vec{J}\wedge\vec{B}\,dV$