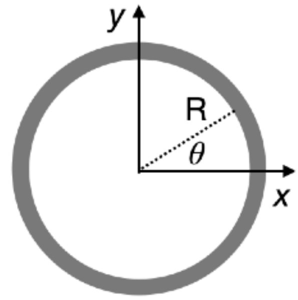
# Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 50 - a.a. 2022-2023

***Quesito 1*** **(fino a 12)**

In figura è rappresentato un anello di raggio R contenuto sul piano xy, su cui è presente carica distribuita con densità lineare $\lambda(\theta) = \lambda_0 > 0$ per $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ e $\lambda(\theta) = -\lambda_0$ altrove.




1) Si calcoli il campo elettrico nell'origine del sistema di riferimento.
2) Come è possibile approssimare il campo e il potenziale elettrostatico a grandi distanze dall'anello ?
   A. Si calcoli il campo elettrico nei punti $P_x$, $P_y$ e $P_z$ collocati rispettivamente lungo gli assi x, y e z a distanza d >> R dall'origine;
   B. Si valuti l'energia potenziale di un dipolo $\vec{p} = p_0\hat{x}$ quando esso è collocato in ciascuno dei tre punti $P_x$, $P_y$ e $P_z$.

Per $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ la densita' di carica e' positiva. Per x<0 la carica e' negativa e speculare alla distribuzione che si trova a x>0. Nel punto O il campo elettrico sara' diretto come $-\hat{x}$, infatti considerati due tratti, uno a $\theta$ e l'altro a $-\theta$ essi producono in O campi elettrici con la stessa componente x ma componenti y di segno opposto che si cancellano. Utilizzando la formula che sfrutta il principio di sovrapposizione dei contributi Coulombiani prodotti da tratti infinitesimi della distribuzione, che possono essere approssimati come cariche puntiformi, si ha

$$\vec{E}(0) = -2k\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{Rd\theta\ \lambda_0}{R^2}\cos\theta\ \hat{x}.$$

Dove il contributo di un tratto infinitesimo che si trova nella posizione $\vec{r} = R\hat{r} = R\cos\theta\hat{x} + R\sin\theta\hat{y}$ e' dato da $d\vec{E}(0) = -\frac{kdq}{R^2}\hat{r} = -k\frac{\lambda_0 Rd\theta}{R^2}\hat{r}$.

Il fattore 2 deriva dal fatto che l'arco a x>0 e quello a x<0 producono lo stesso campo che si somma; il fattore $-\cos\theta$ viene dalla proiezione sull'asse x. Quindi

$$\vec{E}(0) = -2k\frac{\lambda_0\hat{x}}{R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\ \cos\theta = -2k\frac{\lambda_0\hat{x}}{R}(\sin\pi/2 - \sin(-\pi/2)) = -4k\frac{\lambda_0\hat{x}}{R}.$$

A grande distanza la distribuzione di carica appare come un dipolo elettrico, infatti la carica totale e' nulla e la carica positiva e' tutta a x>0, mentre la carica negativa (uguale e opposta) e' tutta a x<0 (distribuita in modo speculare rispetto a x>0). Il campo e il potenziale sara' allora quello prodotto da un dipolo orientato come $\hat{x}$, $\vec{p} = q_0 d\hat{x}$. La carica $q_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Rd\theta\ \lambda_0 = \pi R\lambda_0$ e' l'interale delle cariche positive.

Per la distanza d occorre calcolare il baricentro di carica dell'archetto carico positivamente che si trova chiaramente sull'asse x ed e' dato da

$x_+ = \frac{1}{q_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x(\theta)\lambda(\theta)Rd\theta = \frac{1}{\pi R\lambda_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(R\cos\theta)\ \lambda_0 Rd\theta = \frac{2R}{\pi}$. Data la simmetria del sistema di carica $x_- = -x_+$, pertanto il momento di dipole e' $\vec{p} = \pi R\lambda_0\ \frac{4R}{\pi}\hat{x} = 4R^2\lambda_0\ \hat{x}$.

Quindi il campo elettrico in un punto generico dello spazio a distanza grande rispetto a R e' dato da $\vec{E} = k\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5} = k\frac{3(p\hat{x}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2 p\hat{x}}{r^5}$ e il potenziale elettrostatico e'

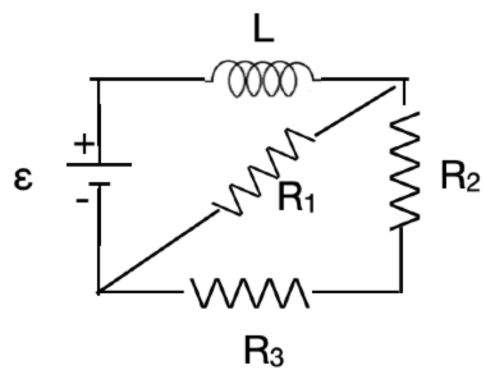
$\phi = \dfrac{p\hat{x}\cdot\vec{r}}{r^3}$. infine l'energia potenziale di un dipolo in campo elettrico e' data da $U_e = -\vec{p}\cdot\vec{E}$.
In tabella le risposte al punto 2).

| $P_x$ | $P_y$ | $P_z$ | Punto |
|---|---|---|---|
| $\vec{r}_{P_x} = x\hat{x}$ | $\vec{r}_{P_y} = y\hat{y}$ | $\vec{r}_{P_z} = z\hat{z}$ | |
| $\phi(P_x) = k\dfrac{p}{x^2}$ | $\phi(P_y) = 0$ | $\phi(P_z) = 0$ | Potenziale elettrostatico |
| $\vec{E}(P_x) = k\dfrac{2p}{x^3}\hat{x}$ | $\vec{E}(P_y) = -k\dfrac{p}{y^3}\hat{x}$ | $\vec{E}(P_z) = -k\dfrac{p}{z^3}\hat{x}$ | Campo elettrico |
| $U_e = -p_0\hat{x}\cdot\vec{E}(P_x) = -\dfrac{2kpp_0}{x^3}$ | $U_e = -p_0\hat{x}\cdot\vec{E}(P_y) = \dfrac{kpp_0}{y^3}$ | $U_e = -p_0\hat{x}\cdot\vec{E}(P_z) = \dfrac{kpp_0}{z^3}$ | Energia potenziale di un dipolo |

***Quesito 2 (fino a 12 punti)***

Dato il circuito in figura
1) si determini la corrente che scorre a regime nel resistore $R_1$;
2) si discuta la dipendenza dal tempo della corrente nel ramo del generatore;
3) Si calcoli la potenza erogata a regime dal generatore e l'energia accumulata nell'induttanza;

Si assumano i seguenti valori per i parametri del circuito:
$R_1$=300 Ω, $R_2$=$R_3$=150 Ω, L = 0.1 mH e ε = 5 V.




Nel circuito la resistenza equivalente $R_{eq} = \dfrac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}$ = 150 Ω e' in serie ad una autoinduttanza L, per cui l'equazione del circuito e' $\epsilon - L\dfrac{di}{dt} = R_{eq}i$ che ha soluzione $i(t) = \dfrac{\epsilon}{R_{eq}}\left(1 - e^{-tR_{eq}/L}\right)$. La presenza dell'autoinduttanza fa sì che la corrente si porti al valore asintotico $\epsilon/R_{eq}$=33.3 mA, che corrisponde all'assenza di L, dopo un breve periodo caratterizzato dal tempo R/L. La corrente che scorre in R1 puo' essere determinata dalle relazioni $i_g = i_1 + i_{23}$ and $i_1R_1 = i_{23}(R_2+R_3)$, implying that
$i_1 = i_{23} = i_g/2 = 16.65\ \mathrm{mA}$.
La potenza erogata a regime è $P_{erogata} = \epsilon \times i(t\to\infty) = \epsilon^2/R_{eq} = 166.5\ \mathrm{W}$, l'energia accumulata nell'induttanza e' $U_m = \dfrac{1}{2}Li_\infty^2 = \dfrac{1}{2}L\dfrac{\epsilon^2}{R_{eq}^2} = 5.5\times10^{-5}\ \mathrm{mJ}$.

***Quesito 3 (fino a 10)***
Un solenoide di lunghezza infinita e' costituito da $10^4$ spire/m, di raggio R=10 cm e' percorso da una corrente che cresce linearmente da 0 a 5A in 10 s scorrendo nel verso di $\hat{\phi}$. L'asse del solenoide coincide con l'asse z. Si calcoli la corrente indotta in una spira di raggio R=5 cm di resistenza pari a 10 Ω con centro sull'asse del solenoide e con la normale che forma in angolo di 30 gradi con l'asse z.

Il campo nel solenoide e' $\overrightarrow{B} = \mu_0 n i(t)\hat{z}$ dipendente linearmente dal tempo, a causa della dipendenza dal tempo della corrente che misurata in A e' i(t) = 0.5 (A/s) x t (con il tempo misurato in s). Per la legge di Faraday Neumann sulla spira γ e' data da

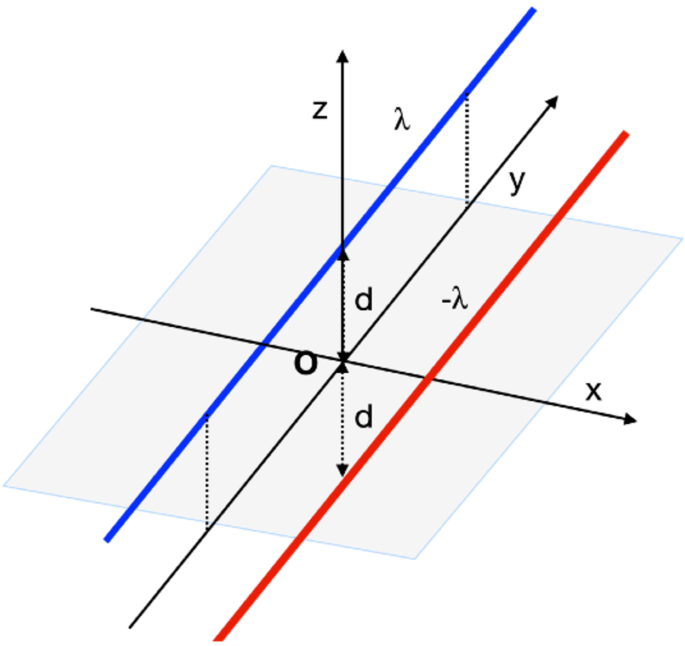
$\epsilon_{indotta} = -\dfrac{d\Phi_{\Sigma_\gamma}(\overrightarrow{B})}{dt}$ dove il fliusso e'

$$\Phi_{\Sigma_\gamma}(\overrightarrow{B}) = \mu_0 n i(t)\hat{z}\cdot(\pi R_\gamma^2)\hat{n} = \mu_0 n i(t)\pi R_\gamma^2 \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\epsilon_{indotta} = -\frac{d\Phi_{\Sigma_\gamma}(\overrightarrow{B})}{dt} = -\mu_0 n\frac{di(t)}{dt}\hat{z}\cdot(\pi R_\gamma^2)\hat{n} = -\mu_0 n \pi R_\gamma^2\cos\frac{\pi}{6}\times 0.5(A/s).$$

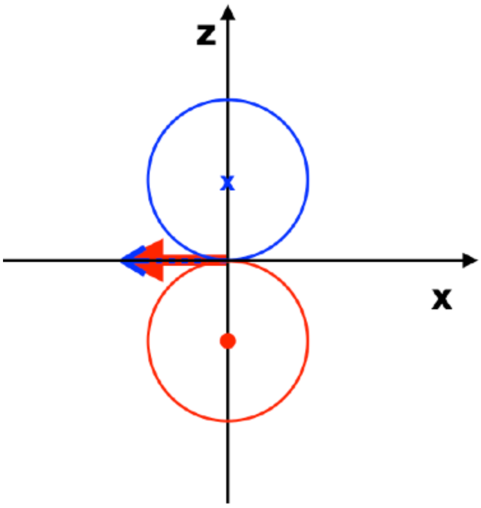
$i_{indotta} = -\mu_0 n \pi R_\gamma^2 \cos\dfrac{\pi}{6}\times 0.5(A/s)\ /R$ che scorre, come indicato dal segno, in verso orario (come $-\hat{\phi}$).

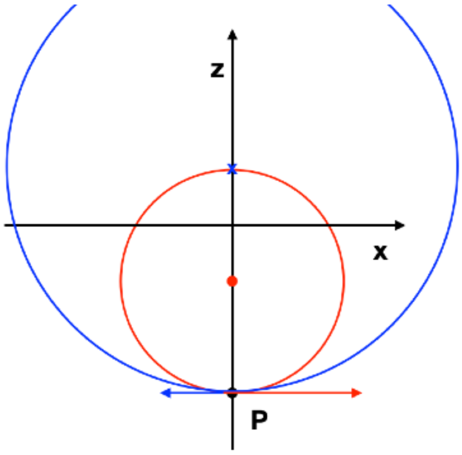
$$i_{indotta} = -\mu_0 n \pi R_\gamma^2 \cos\frac{\pi}{6}\times 0.5(A/s)\ /R =$$
$$-4\pi^2\times 10^{-7}\times 10^4\times 0.05^2\times 0.866\times 0.5/10 = 4.27\times 10^{-6}\ \text{A}.$$

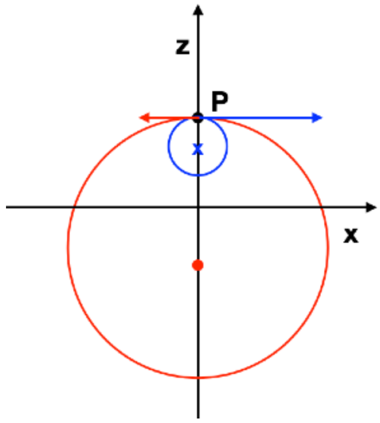



***Quesito 4 (fino a 10 punti)***
In figura sono rappresentati due fili paralleli all'asse y (contenuti nel piano yz ed entrambi a distanza d dall'asse y) su cui e' distribuita carica con densita' lineare λ e -λ. I fili scorrono nella direzione y con la stessa velocita' v. Si calcoli il campo magnetico in un punto generico dell'asse y e in un punto generico dell'asse z (con |z|>d).

I due fili carichi in moto costituiscono due correnti che scorrono in verso opposto di intensità $i = \lambda v$ separate dalla distanza 2d. Le figure rappresentano le linee di campo magnetico prodotte da ciascuno dei due fili (il campo complessivo sara' la somma dei due campi) nell'origine - figura a sinistra - (che rappresenta un punto generico dell'asse y, visto che i fili sono infinitamente lunghi e paralleli all'asse y) e in un punto generico dell'asse z - figura a destra.




Nell'origine i due campi sono entrambi anti-paralleli all'asse x, ciascuno ha intensità data dalla legge di Biot-Savard, quindi $\overrightarrow{B}_{tot}(\mathrm{y-axis}) = -2\dfrac{\mu_0 \lambda v}{2\pi d}\hat{x} = -\dfrac{\mu_0 \lambda v}{\pi d}\hat{x}.$

In un punto generico dell'asse z i campi B+ e B- dovuto alle due correnti hanno componenti in direzione opposta lungo l'asse x e nulle lungo l'asse y. Si ha quindi

$$\overrightarrow{B}(0,y,z<-d) = \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi(|z|-d)}\hat{x} - \frac{\mu_0 \lambda v}{2\pi(|z|+d)}\hat{x} = \frac{\mu_0 \lambda v\left[(|z|+d)-(|z|-d)\right]}{2\pi(z^2-d^2)}\hat{x}$$

$$= \frac{d\mu_0 \lambda v}{\pi(z^2-d^2)}\hat{x}$$

analogamente $\overrightarrow{B}(0,y,z>d) = \dfrac{d\mu_0 \lambda v}{\pi(z^2-c^2)}\hat{x}$

***Quesito 5 (fino a 10 punti)***

Si calcoli il campo elettrico e il potenziale elettrostatico in ogni punto dello spazio prodotti da una distribuzione di carica sferica con raggio R=1 cm con densità costante ρ = 1mC/m3. Si calcoli inoltre l'energia elettrostatica del sistema.

Il sistema delle sorgenti e' a simmetria sferica quindi $\phi = \phi(r)$; $\overrightarrow{E} = E(r)\hat{r}$. Il campo elettrico puo' essere calcolato usando la legge di Gauss calcolando il flusso attraverso una superficie sferica di raggio pari alla distanzadel punto in cui occorre calcolare il caso rispetto al centro della distribuzione.

La carica totale della distribuzione e' $Q = \dfrac{4\rho}{3}\pi R^3 = \dfrac{4\times 10^{-3}}{3}\pi 10^{-6} = 4.2\times 10^{-9}$ C.

Il flusso del campo e' $\Phi_{\Sigma_r}(\overrightarrow{E}) = \displaystyle\int_{\Sigma_r} \overrightarrow{E}\cdot d\overrightarrow{s} = \int_{\Sigma_r} E(r)\hat{r}\cdot ds\hat{r} = E(r)4\pi r^2.$

Per r<R la carica interna a $\Sigma_r$ e' $Q_{\Sigma_r} = \rho_0\dfrac{4}{3}\pi r^3 = Qr^3/R^3$, mentre per r>R

$Q_{\Sigma_r} = \rho_0\dfrac{4}{3}\pi R^3 = Q.$

Quindi

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r} = \frac{kQr}{R^3}\hat{r} & r < R \\ \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r} & r > R \end{cases}$$

Il potenziale elettrostatico per r>R e' $\phi(r) = \frac{kQ}{r}$ se si fissa a 0 il potenziale a distanza infinita.

Invece per r<R si ha $\phi(r) - \phi(R) = \phi(r) - \frac{kQ}{R} = \frac{kQ}{R^3}\int_r^R r\hat{r}\cdot dr\hat{r}.$

Quindi $\phi(r) = \frac{kQ}{R} + \frac{kQ}{2R^3}\left(R^2 - r^2\right) = \frac{3kQ}{2R}\left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right)$

$$\begin{cases} \phi = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r} = \frac{kQ}{r} & r < R \\ \phi = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right) = \frac{3kQ}{2R}\left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right) & r > R \end{cases}$$

L'energia elettrostatica del sistema puo' essere calcolato integrando la densita' di energia associata al campo elettrico $dU_e = \frac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}|^2$ oppure dalla relazione $U_e = \frac{1}{2}\int \rho\phi dV.$

Da questa ultima relazione, abbiamo

$$U_e = \frac{1}{2}\int \rho\phi dV = \frac{1}{2}\int_0^R \rho\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right)4\pi r^2 dr = \frac{\pi\rho^2 R^2}{\epsilon_0}\left(\frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{15R^2}\right) = = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0}$$

$$= \frac{4\pi \times 10^{-6} \times 10^{-10}}{15 \times 8.85 \times 10^{-12}} = 9.5 \text{x} 10^{-6} \text{ J.}$$

Dalla prima relazione invece $U_e = \int_{V_\infty} \frac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}|^2\, dV = \frac{\epsilon_0}{2}\int_0^R \frac{k^2Q^2r^2}{R^6}\, 4\pi r^2 dr +$

$$\frac{\epsilon_0}{2}\int_R^\infty \frac{k^2Q^2}{r^4}\, 4\pi r^2 dr = \frac{\epsilon_0}{2}\frac{k^2Q^2}{R^6}\, 4\pi\frac{R^5}{5} + \frac{4\pi\epsilon_0 k^2Q^2}{2}\left(\frac{-1}{r\to\infty} + \frac{1}{R}\right) =$$

$$= \frac{kQ^2}{10\, R} + \frac{kQ^2}{2R} = \frac{3kQ^2}{5R} = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\epsilon_0}$$ come prima.

### *Quesito 6 (fino a 8 punti)*

Si discuta ***solo uno*** degli argomenti elencati:

1) la legge di Ampere, formulazione integrale e limiti di validità
2) Densità di corrente, definizione microscopica
3) Equivalenza tra dipoli magnetici e spire percorse da corrente
4) Capacita' equivalente di una serie e di un parallelo di condensatori.

**RICORDA:**

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m;
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,
$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$

$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_{He} \simeq 4\ m_p$

Campo $\vec{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\frac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\vec{E}$ prodotto da un dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\,\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$;

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV$; $d\vec{F} = \vec{J}\wedge\vec{B}\;dV$