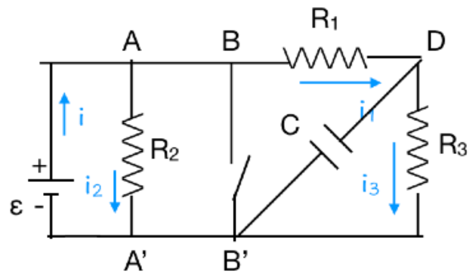
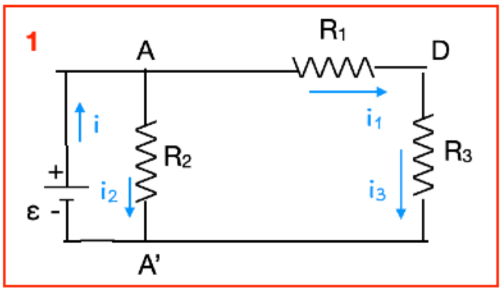
Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 51 - a.a. 2022-2023

Quesito 1 **(fino a 12)**
Il circuito in figura funziona da molto tempo con l'interruttore aperto.



1) Si stimi la carica sulle armature del condensatore in queste condizioni di funzionamento.
2) Al tempo t_0 l'interruttore viene chiuso e il collegamento tra i punti A' e B' del circuito viene interrotto. Si calcoli dopo quanto tempo la carica sulle armature del condensatore si riduce a un decimo del valore iniziale.
3) Si discuta il bilancio energetico del circuito nella fase di scarica.

Si considerino i valori seguenti dei parametri circuitali: $R_1=2R_2=R_3=$ 2 kΩ, ε=100 V, C=1μF.

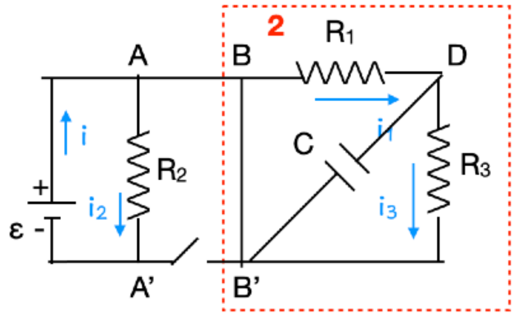


Per rispondere al quesito 1) basta schematizzare il circuito come nella figura 1. La differenza di potenziale ai capi del condensatore e' pari a V_D-$V_{A'}$ che e' uguale a i3 R3 = i1 R3 = i2 R2 - i1 R1 (si osservi che i1 = i3). Quindi la carica sulle armature sara' Q = C x V_D-$V_{A'}$. La corrente nel ramo del generatore $i = \dfrac{\epsilon(R_1+R_2+R_3)}{R_2(R_1+R_3)} =$

$100V(2000+1000+2000)\Omega/(4000\times1000)\Omega^2$
=0.125 A

Inoltre $i = i_1 + i_2$ e $i_2R_2 = i_1(R_1+R_3) \ \rightarrow i_2 = 4i_i$. Allora $i_1 = i/5 = 0.025$ A, $i_2 = 0.1$ A, e pertanto $V_D - V_{A'} = i_1 \times R_3 = 0.025 \times 2000$ V $= 50$ V. Quindi Q = 1μF x 50 V = 50 μC.

Per rispondere al quesito 2) si schematizza il circuito come in fig 2. Si noti che generatore e resistore 2 sono irrilevanti in quanto scollegati dal circuito di scarica del condensatore. Il generatore insomma fa circolare corrente solo in R2 e il condensatore si scarica sul parallelo di R1 e R3, R13, pari a 1kΩ.
Quindi la carica sulle armature del condensatore avrà un andamento $Q(t) = Q_0e^{-t/\tau}$
dove $\tau = CR_1R_3/(R_1+R_3)$ = 1ms.
Allora $Q(t_{10})/Q_0 = 1/10 = e^{-t_{10}/\tau}$
da cui $t_{10} = -\tau \ln \dfrac{1}{10} = 2.3$ ms.



Nella fase di scarica del condensatore l'energia iniziale a disposizione e' $U = \dfrac{1}{2C}Q_0^2 =$ $U = \dfrac{1}{2\times1\mu F}(50\mu C)^2 = 0.125$ J questa viene dissipata in parti uguali sui due resistori (che hanno la stessa resistenza e quindi sono percorsi dalla stessa corrente). L'energia dissipata su R1 e' $U = \int_0^\infty dtR_1i_1^2(t)$.

La carica esponenzialmente decrescente e' $Q(t) = Q_0e^{-t/\tau}$ e la corrente in ciascun resistore sara' quindi $i_1(t) = i_3(t) = \dfrac{i_0}{2}e^{-t/\tau}$ dove $i_0 = \dfrac{Q_0}{CR_{13}} = \dfrac{2Q_0}{CR_1} = \dfrac{2Q_0}{CR_3}$.

Quindi $U_{R_1} = \int_0^\infty dt R_1 i_1^2(t) = \int_0^\infty dt R_1 \frac{Q_0^2}{C^2 R_1^2} e^{-2t/R_{13}C} = \frac{Q_0^2}{C^2 R_1}(R_{13}C/2) = \frac{Q_0^2}{C^2 R_1}(R_1 C/4)$
$= \frac{Q_0^2}{4C} = U_{R_3} = \frac{1}{2}U.$

Quesito 2 (fino a 12 punti)
Si consideri il sistema costituito da una distribuzione di carica cilindrica, con L>>R e densità costante ρ =ρ_0, contenuto all'interno della cavita' di uno strato conduttore di raggio interno R_i e raggio esterno R_e elettricamente neutro. Gli assi del conduttore e della distribuzione di carica coincidono entrambi con l'asse z del sistema di riferimento.
1) Chiamata *r* la distanza di un punto generico dello spazio dall'asse, si calcoli il campo elettrico per $r < R$, $R < r < R_i$, $R_i < r < R_e$ e infine $r > R_e$
2) Si calcoli la differenza di potenziale tra il conduttore e la superficie esterna della distribuzione di carica, ossia $\phi(R_i) - \phi(R)$.

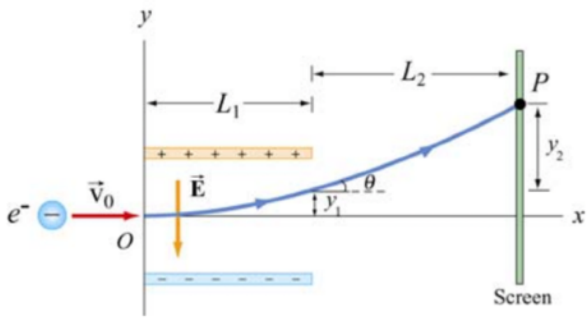
La distribuzione di carica cilindrica induce carica superficiale σ_i sulla parete interna del conduttore che e' compensata sulla superficie esterna da σ_e dato che il conduttore e' neutro. Si deve avere quindi $\pi R^2 h \ \rho_0 = -2\pi R_i h \ \sigma_i = 2\pi R_e h \ \sigma_e$, ossia considerato un tratto di altezza h del sistema di sorgenti, la carica contenuta nella distribuzione interna e' opposta alla carica indotta sulla superficie interna del conduttore e uguale alla carica indotta sulla superficie esterna dello stesso.
Quindi $\sigma_i = -\frac{R^2\rho_0}{2R_i}$ mentre $\sigma_e = \frac{R^2\rho_0}{2R_e}$.
Data la simmetria cilindrica delle sorgenti il campo sara' $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ dove r e' la distanza dall'asse di simmetria e $\hat{r}$ e' il versore perpendicolare all'asse uscente.
Per calcolare il campo in un punto generico dello spazio di considera una superficie gaussiana cilindrica alla cui superficie laterale appartiene il punto in esame
$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = 2\pi r h E(r)$; la carica contenuta all'interno della superficie gaussiana sara' $\rho_0 \pi r^2 h$ e $\rho_0 \pi R^2 h$ per $r < R$ e $r \geq R$ rispettivamente.
Quindi il campo sara' $\vec{E} = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0}\hat{r}$ all'interno della distribuzione volumetrica di carica e
$\vec{E} = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r}$ all'esterno, con l'eccezione della spazio interno al conduttore dove il campo e' nullo.

$$\phi(R_i) - \phi(R) = \int_{R_i}^{R} dr\hat{r} \cdot \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r} = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{R}{R_i}.$$

Quesito 3 (fino a 8 punti)
Si discuta ***solo uno*** degli argomenti elencati:
1) La corrente di spostamento ed equazione di Ampere-Maxwell
2) Resistenza equivalente di serie e parallelo di due resistori
3) Legge di Faraday Neumann
4) Continuita' e discontinuita' del campo elettrico nell'attraversamento di uno strato superficiale di carica.

Quesito 4 (fino a 10)
Al tempo $t_0 = 0$ un elettrone con velocita' iniziale $\vec{v} = v_0\hat{x}$ e' iniettato orizzontalmente in un campo elettrico uniforme $\vec{E} = -E_0\hat{y}$ prodotto da un condensatore carico ad armature piano

parallele di lunghezza L_1 come indicato in figura e distanza tra le armature d <<L_1. Si calcoli:



1) lo spostamento verticale y_1 dell'elettrone all'uscita della regione tra le due piastre cariche raggiunta nell'istante di tempo t_1 in funzione della differenza di potenziale elettrostatico ΔV tra le due armature del condensatore;
2) l'angolo θ che la traiettoria al tempo t_1 forma con l'asse orizzontale x e lo spostamento verticale totale $y_1 + y_2$ della posizione dell'elettrone tra il tempo t_0 e il tempo t_2 in cui l'elettrone raggiunge lo schermo dopo aver percorso una distanza complessiva in direzione x pari a $L_1 + L_2$.

L'elettrone e' soggetto a una forza dovuta al campo elettrico nell'intervallo di tempo in cui la sua traiettoria e' compresa tra le due piastre cariche (naturalmente trascuriamo la forza peso di intensità trascurabile rispetto alla forza elettrica). In particolare, $\vec{F} = -|e|\vec{E} = |e||\vec{E}|\hat{y}$ con $\hat{y}$ che punta verso l'alto. Quindi il moto dell'elettrone tra le due piastre e' dettato dalla relazione $\vec{F} = m_e\vec{a} = |e|E\hat{y}$, mentre all'uscita della coppia di piastre il moto sara' un moto rettilineo uniforme per assenze di forze. Inoltre, in direzione x non ci sono forze quindi la velocità; in direzione x si mantiene constante e $t_1 = L_1/v_0$. In direzione y il moto uniformemente accelerato con velocità' iniziale $\vec{v}_{y_0} = 0$ fa si che $y(t) = \frac{1}{2}\frac{eE}{m_e}t^2$. Quindi a $t_1 = L_1/v_0$, visto che la velocita' iniziale in direzione y e' nulla, si ha $y(t_1) = \frac{eEL_1^2}{2m_e v_0^2}$ e $v_y(t_1) = \frac{eE}{m_e}\ t_1 = \frac{eEL_1}{m_e v_0}$.

L'angolo θ tra la traiettoria all'uscita dalla regione in cui si ha il campo elettrico e l'asse x e' dato da $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{eEL_1}{m_e v_0^2}$.

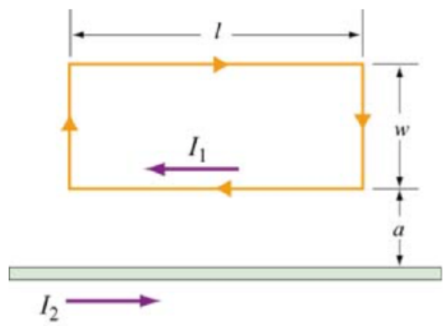
L'arrivo sullo schermo avviene dopo il tempo $t_{tot} = t_1 + t_2 = L_1/v_0 + L_2/v_0$, inoltre $y_2 = v_y(t_1)t_2 = \frac{eE\ L_1}{m_e v_0}\frac{L_2}{v_0}$. Lo spostamento totale in direzione y e' quindi

$$y_1 + y_2 = \frac{eEL_1^2}{2m_e v_0^2} + \frac{eE\ L_1L_2}{m_e v_0^2} = \frac{eEL_1^2}{m_e v_0^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{L_2}{L_1}\right).$$

3)

Quesito 5 (fino a 12 punti)

Un circuito rettangolare di lunghezza *l* e larghezza w è percorso da una corrente continua I_1. Il circuito è collocato vicino a un filo di lunghezza L >> *l,* come illustrato in figura percorso da una corrente continua di valore I_2. Calcolare la forza esercitata sul circuito dal campo magnetico prodotto dal filo. Si calcoli il flusso del campo magnetico prodotto dal filo concatenato con il circuito.
Si assuma I_2=10 A, I_1=20 mA , a=10 mm, w=5 cm l=20cm .



Il campo magnetico prodotto dal filo e' $\vec{B} = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi r}\hat{\phi}$. Con riferimento alla figura nei punti del piano al di sopra del filo il campo e' perpendicolare uscente dal piano della figura. Su ogni tratto della spira percorsa da corrente agira' una forza data da $d\vec{F} = i_1 d\vec{l} \wedge \vec{B}$. Su tratti corrispondenti (alla stessa distanza r dal filo) dei lati perpendicolari al filo la forza avrà la stessa intensità e verso opposto, per cui l'integrale delle forze su questi due lati si equilibra. Invece la forza su un tratto parallelo al filo e a distanza a la forza e' repulsiva, mentre sul lato piu' distante la forza e' attrattiva ma di intensità minore. Quindi complessivamente la spira sara' respinta dal filo.

In dettaglio, chiamati x e y gli assi orizzontale e verticale nel piano della figura, la forza complessiva e' $\int_{y=a} d\vec{F} + \int_{y=a+w} d\vec{F} = -\int_0^l i_1 dl\hat{x} \wedge \frac{\mu_0 i_2}{2\pi a}\hat{z} + \int_0^l i_1 dl\hat{x} \wedge \frac{\mu_0 i_2}{2\pi(a+w)}\hat{z} =$

$$\frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{2\pi a}\hat{y} + -\frac{\mu_0 i_1 i_2 l}{2\pi(a+w)}\hat{y} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 l w}{2\pi a(a+w)}\hat{y}$$

$$= \frac{4\pi 10^{-7} \times 10 \times 0.02 \times 0.05 \times 0.2}{2\pi 0.01 \times (0.05+0.01)}\hat{y} = 0.67\ \mu\text{N}\ \hat{y}$$

Quesito 6 (fino a 12)

Il campo magnetico sull'asse di un solenoide di lunghezza L, raggio R e densità lineare di spire n è diretto lungo l'asse del solenoide e il suo modulo dipende dalla distanza x dal centro del solenoide come segue: $\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 i n}{2}\left(\frac{L+2x}{\sqrt{(L+2x)^2+4R^2}} + \frac{L-2x}{\sqrt{(L-2x)^2+4R^2}}\right)\hat{x}$.

Si applichi la legge di Ampere per dimostrare che nell'approssimazione di L infinita il campo è pari a $\vec{B} = \mu_0 i n \hat{x}$ in ogni punto dello spazio interno al solenoide, mentre è nullo all'esterno.

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m;
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,
$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$
$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_{He} \simeq 4\ m_p$

Campo $\vec{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\frac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\vec{E}$ prodotto da un dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$;

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV$; $\quad d\vec{F} = \vec{J}\wedge\vec{B}\ dV$