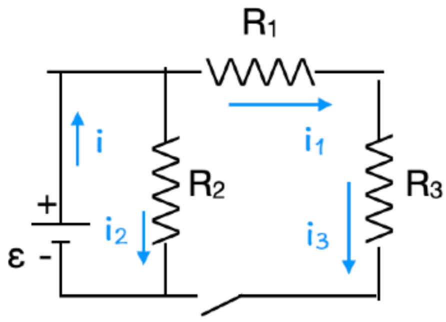
Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 52A - a.a. 2022-2023

***Quesito 1* (fino a 10) -** *si richiedono soluzioni numeriche oltre che formali*

Nel circuito in figura, l'interruttore e' chiuso al tempo t=0; si calcoli



- la potenza dissipata sulla resistenza R_2 a interruttore aperto P_{2a} =0.1W
- la potenza dissipata sulla resistenza R_2 a interruttore chiuso P_{2c}
- Il rapporto R_g tra la potenza erogata dal generatore a interruttore aperto e quella erogata a interruttore chiuso. [R_g=1/3]

Si considerino i valori seguenti dei parametri circuitali:
R_1= 1.5 kΩ, R_2= 4 kΩ, R_3= 0.5 kΩ, ε=20 V.
Si descriva l'andamento nel tempo della corrente *i* (si faccia un grafico di funzione) che scorre nel ramo del generatore tra t=-100s a t=100s. Si discuta quale approssimazione fisica e' responsabile dell'apparente discontinuità a t=0.

A interruttore aperto si ha $i_2 = \epsilon / R_2$, $i_1 = i_3 = 0$, $i = i_2$.

A interruttore chiuso si ha $i_2 = \epsilon / R_2$, $i_1 = i_3 = \epsilon / (R_1 + R_3)$, $i = i_1 + i_2 = \dfrac{\epsilon(R_1 + R_2 + R_3)}{R_2(R_1 + R_3)}$.

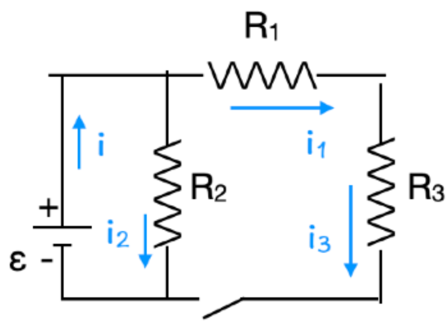
Quindi la $P_{2a} = P_{2c} = \epsilon^2 / R_2$.

Invece $R_g = \dfrac{\epsilon^2}{R_2} / \dfrac{\epsilon^2(R_1 + R_2 + R_3)}{R_2(R_1 + R_3)} = \dfrac{R_1 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

I vale 15 mA per t>0 e 5 mA per t<0. Il passaggio brusco si deve alla approssimazione che l'auto-induttanza del circuito sia 0.

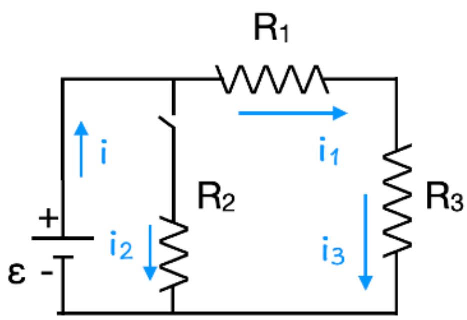
***Quesito 1* (fino a 10) -** *si richiedono soluzioni numeriche oltre che formali*

Nel circuito in figura, l'interruttore e' chiuso al tempo t=0; si calcoli



- la potenza dissipata sulla resistenza R_2 a interruttore aperto P_{2a} =50mW
- la potenza dissipata sulla resistenza R_2 a interruttore chiuso P_{2c}=50mW
- Il rapporto R_g tra la potenza erogata dal generatore a interruttore aperto e quella erogata a interruttore chiuso. [R_g=0.68]

Si considerino i valori seguenti dei parametri circuitali:
R_1=3 kΩ, R_2= 2 kΩ, R_3= 1.2 kΩ, ε=10 V.
Si descriva l'andamento nel tempo della corrente i_1 (si faccia un grafico di funzione) che scorre nel resistore R_1 tra t=-100s a t=100s. Si discuta quale approssimazione fisica e' responsabile dell'apparente discontinuità a t=0. I vale 0 per t<0 e 2.4 mA per t>0. Il passaggio brusco si deve alla approssimazione che l'auto-induttanza del circuito sia 0.



***Quesito 1* (fino a 10) -** *si richiedono soluzioni numeriche oltre che formali*

Nel circuito in figura, l'interruttore e' chiuso al tempo t=0; si calcoli

- la potenza dissipata sulla resistenza R_1 a interruttore aperto

P_{1a} =45mW
- la potenza dissipata sulla resistenza R_1 a interruttore chiuso P_{1c}
- Il rapporto R_g tra la potenza erogata dal generatore a interruttore aperto e quella erogata a interruttore chiuso. [R_g=0.48]

Si considerino i valori seguenti dei parametri circuitali:
R_1=3 kΩ, R_2= 2 kΩ, R_3= 1.2 kΩ, ε=20 V.
Si descriva l'andamento nel tempo della corrente i_2 (si faccia un grafico di funzione) che scorre nel resistore R_2 tra t=-100s a t=100s. Si discuta quale approssimazione fisica e' responsabile dell'apparente discontinuità a t=0.

A interruttore aperto si ha $i_2 = 0,\ i = i_1 = i_3 = 0 = \epsilon/(R_1 + R_3)$.

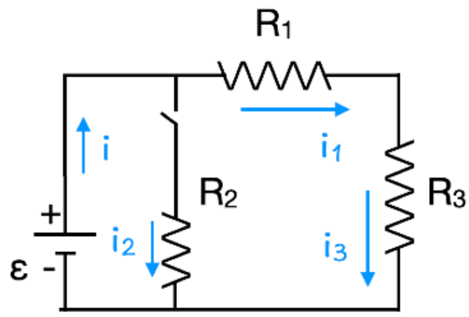
A interruttore chiuso si ha $i_2 = \epsilon/R_2,\ i_1 = i_3 = \epsilon/(R_1 + R_3),\ i = i_1 + i_2 = \dfrac{\epsilon(R_1 + R_2 + R_3)}{R_2(R_1 + R_3)}$.

Quindi la $P_{1a} = P_{1c} = R_1\epsilon^2/(R_1 + R_3)^2$.

Invece $R_g = \dfrac{\epsilon^2}{R_1 + R_3} / \dfrac{\epsilon^2(R_1 + R_2 + R_3)}{R_2(R_1 + R_3)} = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$

I_2 vale 0 per t<0 e 10 mA per t>0. Il passaggio brusco si deve alla approssimazione che l'auto-induttanza del circuito sia 0.

***Quesito 1* (fino a 10) -** *si richiedono soluzioni numeriche oltre che formali*



Nel circuito in figura, l'interruttore e' chiuso al tempo t=0; si calcoli
- la potenza dissipata sulla resistenza R_3 a interruttore aperto P_{3a} =12.5mW
- la potenza dissipata sulla resistenza R_3 a interruttore chiuso P_{3c}
- Il rapporto R_g tra la potenza erogata dal generatore a interruttore aperto e quella erogata a interruttore chiuso. [R_g=0.67]

Si considerino i valori seguenti dei parametri circuitali:
R_1= 1.5 kΩ, R_2= 4 kΩ, R_3= 0.5 kΩ, ε=10 V
Si descriva l'andamento nel tempo della corrente *i* (si faccia un grafico di funzione) che scorre nel ramo del generatore tra t=-100s a t=100s. Si discuta quale approssimazione fisica e' responsabile dell'apparente discontinuità a t=0.
I vale 5 mA per t<0 e 7.5 mA per t>0. Il passaggio brusco si deve alla approssimazione che l'auto-induttanza del circuito sia 0.

Quesito 2 (fino a 12 punti) - *si richiedono soluzioni numeriche oltre che formali*
Si consideri il sistema costituito da una distribuzione di carica sferica, di raggio R = 10 cm e densità costante ρ =ρ_0=1μC/m³. Un protone si muove verso il centro della distribuzione e quando si trova ad una distanza dal centro della sfera pari a 5R ha una velocita' pari a 4x10⁵ m/s.
Si stabilisca se
- il protone raggiunge la superficie della sfera e in tal caso con quale velocita'; si: 3.2x10⁵ m/s
- il protone raggiunge il centro della sfera e in tal caso con quale velocita'. si: 2.6x10⁵ m/s
Si trascuri ogni effetto relativistico.

Applicando Gauss al problema a simmetria sferica si ha:

$$\begin{cases} \vec{E} = \dfrac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} & r > R \\ \vec{E} = \dfrac{\rho_0 r}{3\epsilon_0}\hat{r} & r \le R \end{cases} \quad \text{mentre il potenziale e'} \quad \begin{cases} \phi(r) = \dfrac{\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r} & r > R \\ \phi(r) = \dfrac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0} - \dfrac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} & r \le R \end{cases}$$

Dalla conservazione dell'energia meccanica si ha

$$\frac{1}{2}m_p v_i^2 + e\phi(r_i) = \frac{1}{2}m_p v_f^2 + e\phi(r_f).$$

Allora la velocita' minima perche' il protone raggiunga la superficie della sfera e' determinata dal bilancio energetico quando la velocita' sulla superficie della sfera e' zero, quindi:

$$v_{i\ min}^2(R) = \frac{2e}{m_p}\Big(\phi(R) - \phi(r_i)\Big) = \frac{2\times 1.6\times 10^{-19}}{1.67\times 10^{-27}}\cdot\frac{9\times 10^9\times 4\pi}{3}\rho_0 R^3\Big(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_i}\Big) = 7.22\times 10^{18}\rho_0 R^3\Big(\frac{1}{R}-\frac{1}{r_i}\Big)$$

Allora la velocita' minima perche' il protone raggiunga il centro della sfera e' determinata dal bilancio energetico quando la velocita' al centro della sfera e' zero, quindi:

$$v_{i\ min}^2(0) = \frac{2e}{m_p}\Big(\phi(0) - \phi(r_i)\Big) = \frac{2\times 1.6\times 10^{-19}}{1.67\times 10^{-27}}\cdot\frac{9\times 10^9\times 4\pi}{3}\rho_0 R^3\Big(\frac{3}{2R}-\frac{1}{r_i}\Big) = 7.22\times 10^{18}\rho_0 R^3\Big(\frac{3}{2R}-\frac{1}{r_i}\Big).$$

In questo caso, $v_{i\ min}^2(R) = 2.4\times 10^5\ \mathrm{m/s}$ e $v_{i\ min}^2(0) = 3.1\times 10^5\ \mathrm{m/s}$

Quesito 2 (fino a 12 punti) **-** *si richiedono soluzioni numeriche oltre che formali*

Si consideri il sistema costituito da una distribuzione di carica sferica, di raggio R = 10 cm e densità costante ρ =ρ_0=10μC/m³. Un protone si muove verso il centro della distribuzione e quando si trova ad una distanza dal centro della sfera pari a 2R ha una velocita' pari a 9x10⁵ m/s.
Si stabilisca se
- il protone raggiunge la superficie della sfera e in tal caso con quale velocita'; si: 6.7x10⁵ m/s
- il protone raggiunge il centro della sfera e in tal caso con quale velocita'. si: 3.0x10⁵ m/s

Si trascuri ogni effetto relativistico.

In questo caso, $v_{i\ min}^2(R) = 6.0\times 10^5\ \mathrm{m/s}$ e $v_{i\ min}^2(0) = 8.5\times 10^5\ \mathrm{m/s}$

Quesito 2 (fino a 12 punti) **-** *si richiedono soluzioni numeriche oltre che formali*

Si consideri il sistema costituito da una distribuzione di carica sferica, di raggio R = 10 cm e densità costante ρ =ρ_0=2μC/m³. Un protone si muove verso il centro della distribuzione e quando si trova ad una distanza dal centro della sfera pari a 4R ha una velocita' pari a 4x10⁵ m/s.
Si stabilisca se
- il protone raggiunge la superficie della sfera e in tal caso con quale velocita'; si: 2.3x10⁵ m/s
- il protone raggiunge il centro della sfera e in tal caso con quale velocita'. No, la v minima per raggiungere il centro e' 4.25x10⁵ m/s.

Si trascuri ogni effetto relativistico.

In questo caso, $v_{i\ min}^2(R) = 3.4\times 10^5\ \mathrm{m/s}$ e $v_{i\ min}^2(0) = 4.25\times 10^5\ \mathrm{m/s}$

Quesito 2 (fino a 12 punti) **-** *si richiedono soluzioni numeriche oltre che formali*

Si consideri il sistema costituito da una distribuzione di carica sferica, di raggio R = 10 cm e densità costante ρ =ρ_0=100μC/m³. Un protone si muove verso il centro della distribuzione e quando si trova ad una distanza dal centro della sfera pari a 5R ha una velocita' pari a 3x10⁶ m/s.
Si stabilisca se
- il protone raggiunge la superficie della sfera e in tal caso con quale velocita'; si: 1.8x10⁶ m/s
- il protone raggiunge il centro della sfera e in tal caso con quale velocita'. No, la v minima per raggiungere il centro e' 3.06x10⁶ m/s.

Si trascuri ogni effetto relativistico.

In questo caso, $v_{i\ min}^2(R) = 2.4\times 10^6\ \mathrm{m/s}$ e $v_{i\ min}^2(0) = 3.1\times 10^6\ \mathrm{m/s}.$

Quesito 3 (fino a 8 punti)

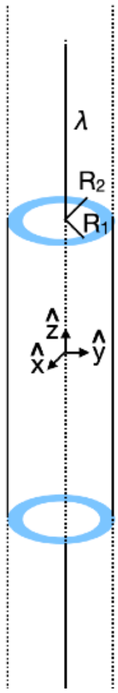
Si discuta ***solo uno*** degli argomenti elencati:

1) Il modello di conduzione di Drude e la legge di Ohm
2) L'energia elettrostatica di un sistema discreto di cariche puntiformi

3) La legge di Ampere in forma integrale e differenziale
4) L'energia potenziale di un dipolo elettrico $\overrightarrow{p} = p_0\hat{z}$ collocato nel punto di coordinate (a,0,0) nel campo di un dipolo identico collocato nell'origine.

5) Proprieta' della carica elettrica
6) Forza tra due fili paralleli percorsi da corrente della stessa intensità e verso

7) Proprieta' di un campo vettoriale solenoide
8) Energia magnetica immagazzinata in un solenoide di lunghezza h, raggio R, numero di spire N, percorso da corrente *I*



Quesito 4 (fino a 8)

Calcolare il coefficiente di mutua induzione di sue solenoidi coassiali di parametri n1 ed R1 per quello interno e n2 e R2 per il solenoide esterno.

Il campo prodotto dal solenoide di raggio R_2 in ogni punto interno e' pari a $\overrightarrow{B} = \mu_0 n_2 i_2 \hat{z}$. Il flusso concatenato con una singola spira del solenoide interno e' $\Phi_{1s}(\overrightarrow{B}_2) = \pi R_1^2 \mu_0 i_2 n_2$. Il flusso concatenato con tutto i solenoide interno e' $\Phi_{sol_1}(\overrightarrow{B}_2) = n_1 h \pi R_1^2 \mu_0 i_2 n_2$, dove h e' la lunghezza molto grande del solenoide. Perciò la mutua induttanza dei due circuiti, definita da $M = \Phi_1(\overrightarrow{B}_1)/i_1$, risulta pari a $M = n_1 h \pi R_1^2 \mu_0 n_2$, Quindi la mutua induttanza per unita' di lunghezza risulta pari a $M = \pi n_1 n_2 \mu_0 R_1^2$.

Quesito 4 (fino a 8)

Calcolare il coefficiente di auto induzione di un solenoide di parametri n ed R.

Il campo prodotto dal solenoide in ogni punto interno e' pari a $\overrightarrow{B} = \mu_0 n i \hat{z}$. Il flusso concatenato con una singola spira del solenoide e' $\Phi_{1s}(\overrightarrow{B}) = \pi R^2 \mu_0 i n$. Il flusso concatenato con tutto i solenoide interno e' $\Phi_{sol}(\overrightarrow{B}) = n^2 h \pi R^2 \mu_0$, dove h e' la lunghezza molto grande del solenoide. Perciò la auto-induttanza del circuito, definita da $L = \Phi(\overrightarrow{B})/i$, $L = n^2 h \pi R^2 \mu_0$, Quindi la auto-induttanza per unita' di lunghezza risulta pari a $L = \pi n^2 \mu_0 R^2$.

Quesito 5 (fino a 12 punti)

In figura e' rappresentato un filo infinito con densita' di carica uniforme λ e una distribuzione di corrente uniforme $\overrightarrow{J} = J_0\hat{z}$ compresa tra R_1 e R_2. Si calcoli la forza su una carica puntiforme q_0 con velocita' $\overrightarrow{v} = v_0\hat{z}$ a distanza r dall'asse per i casi:

1) $r < R_1$
2) $R_1 < r < R_2$
3) $R_2 < r$

Il campo elettrico in ogni punto dello spazio vale $\overrightarrow{E} \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$ dove $\hat{r}$ e' il versore che indica la direzione in cui cresce la distanza r dall'asse di simmetria cilindrica del sistema. Il campo magnetico puo' essere calcolato applicando la legge di Ampere, tenuto conto della simmetria cilindrica delle sorgenti che implica che $\overrightarrow{B} = B(r)\hat{\phi}$.

Si ottiene
$$\begin{cases} \overrightarrow{B} = 0 & r < R_1 \\ \overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)\hat{\phi} & R_1 \le r \le R_2 \\ \overrightarrow{B} = \frac{\mu_0 J_0}{2r}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\hat{\phi} & r \ge R_2 \end{cases}$$

La forza su una carica puntiforme immersa in un campo elettrico e magnetico e' $\overrightarrow{F} = q_0\overrightarrow{E} + q_0\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$.
Quindi per $\overrightarrow{v} = v_0\hat{z}$, si ha

$$\begin{cases} \overrightarrow{F} = \frac{q_0\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} & r < R_1 \\ \overrightarrow{F} = \frac{q_0\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} - \frac{q_0\mu_0 J_0 v_0}{2}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)\hat{r} & R_1 \le r \le R_2 \\ \overrightarrow{F} = \frac{q_0\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} - \frac{q_0\mu_0 J_0 v_0}{2r}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\hat{r} & r \ge R_2 \end{cases}$$

Per $\overrightarrow{v} = v_0\hat{r}$, si ha
$$\begin{cases} \overrightarrow{F} = \frac{q_0\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} & r < R_1 \\ \overrightarrow{F} = \frac{q_0\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} - \frac{q_0\mu_0 J_0 v_0}{2}\left(r - \frac{R_1^2}{r}\right)\hat{z} & R_1 \le r \le R_2 \\ \overrightarrow{F} = \frac{q_0\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} - \frac{q_0\mu_0 J_0 v_0}{2r}\left(R_2^2 - R_1^2\right)\hat{z} & r \ge R_2 \end{cases}$$

Quesito 5 (fino a 12 punti)

In figura e' rappresentato un filo infinito con densita' di carica uniforme λ e una distribuzione di corrente uniforme $\overrightarrow{J} = J_0\hat{z}$ compresa tra R_1 e R_2. Si calcoli la forza su una carica puntiforme q_0 con velocita' $\overrightarrow{v} = v_0\hat{r}$ a distanza r dall'asse per i casi:

1) $r < R_1$
2) $R_1 < r < R_2$
3) $R_2 < r$

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m;
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,
$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$
$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_{He} \simeq 4\, m_p$
Campo $\overrightarrow{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\frac{kq}{r^2}\hat{r}$
Campo $\overrightarrow{E}$ prodotto da un dipolo: $\overrightarrow{E}(r,\vartheta) = k\frac{3(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r})\overrightarrow{r} - r^2\overrightarrow{p}}{r^5}$;
Campo $\overrightarrow{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\overrightarrow{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{r})\overrightarrow{r} - r^2\overrightarrow{m}}{r^5}$;
Potenziale di dipolo $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3}dV; \qquad d\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B}\ dV$