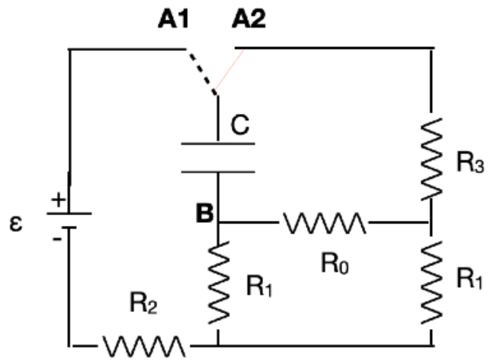
Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 53 - a.a. 2022-2023

***Quesito 1* (fino a 12)**

Il circuito in figura funziona da molto tempo con l'interruttore chiuso sulla posizione A1.

1) Si stimi la carica sulle armature del condensatore in queste condizioni di funzionamento.
2) Si valuti per quanto tempo il circuito deve aver funzionato in questa modalità perché la sulle armature si possa considerare stabile entro 0.001 del suo valore
3) Al tempo t_0 l'interruttore viene spostato sulla posizione A2. Si calcoli dopo quanto tempo la carica sulle armature del condensatore si riduce alla meta' di quella di partenza.
4) Si discuta il bilancio energetico del circuito nella fase di scarica.



Si considerino i valori seguenti dei parametri circuitali: $R_0=R_3= 500\ \Omega$, $R_1=2R_2= 2\ k\Omega$, $\varepsilon=100$ V, $C=0.1\mu F$.

La resistenza di carica è $R_{carica} = R_2 + \dfrac{R_1(R_0+R_1)}{R_0+2R_1}$ = 2.1 kΩ,

il tempo di carica $\tau_{carica} = R_{carica}C = 0.21\ \mu s$

La resistenza di carica è $R_{scarica} = R_3 + \dfrac{2R_1R_0}{R_0+2R_1}$ = 0.94 kΩ

il tempo di scarica $\tau_{scarica} = R_{scarica}C = 94$ ns

1) Q = εC = 10 μC
2) $Q(t)/Q_\infty = 0.999 = 1 - e^{-t/\tau_{carica}}$. Quindi $t = -\tau_{carica} \ln 0.001 = 14.6\ \mu s$
3) Nella scarica la corrente che scorre in R3 e' $i(t) = i_0 e^{-t/\tau_{scarica}}$, la carica e' $Q(t) = \epsilon C e^{-t/\tau_{scarica}}$, quindi $i(t) = -\dfrac{dQ}{dt} \rightarrow i_0 = \epsilon C/\tau_{scarica} = \epsilon/R_{scarica}$

Il tempo di dimezzamento della carica e' $t_{1/2} = -\tau_{scarica} \ln 0.5$ = 65 ns

4) L'energia iniziale e' quella immagazzinata nel condensatore $U_i = \dfrac{1}{2}C\epsilon^2$. Questa deve essere la somma delle energia (integrale della potenza) dissipata per effetto Joule su ciascuna delle resistenze. Occorre tener conto che in ogni resistenza scorre una corrente diversa i3 in R3, i0 in R0 e i1 nella serie delle due resistenze R1, con i3 = i0+i1; inoltre per la legge di Ohm
i0 R0 = 2 i1 R1.
Quindi

$$i_3 = i_0 + \frac{R_0}{2R_1}i_0 = \frac{2R_1+R_0}{2R_1}i_0$$

$$i_3 = i_1 + \frac{2R_1}{R_0}i_1 = \frac{2R_1+R_0}{R_0}i_1$$

$$i_0 = i_3\frac{2R_1}{R_0+2R_1} = \frac{\epsilon}{R_{scarica}}\frac{2R_1}{R_0+2R_1}e^{-t/\tau_{scarica}}$$

$$i_1 = i_3\frac{R_0}{R_0+2R_1} = \frac{\epsilon}{R_{scarica}}\frac{R_0}{R_0+2R_1}e^{-t/\tau_{scarica}}$$

Inoltre per una generica corrente $i = A\ e^{-t/\tau}$ che scorre nella resistenza R, l'energia dissipata e' $\displaystyle\int_0^\infty Ri(t)^2dt = \frac{1}{2}RA^2\tau.$

Quindi $U_i = \frac{1}{2}C\epsilon^2 = \frac{CR_{scarica}}{2}\left(i_3{}^2(0)R_3 + 2i_1{}^2(0)R_1 + i_0{}^2(0)R_0\right) =$

$$\frac{\epsilon^2 C}{2R_{scarica}}\left(R_3 + 2R_1\frac{R_0^2}{(R_0+2R_1)^2} + R_0\frac{(2R_1)^2}{(R_0+2R_1)^2}\right)$$

Quindi $R_{scarica} = R_3 + 2R_1\frac{R_0^2}{(R_0+2R_1)^2} + R_0\frac{(2R_1)^2}{(R_0+2R_1)^2}$, ossia

$$\frac{2R_1R_0}{R_0+2R_1} = 2R_1\frac{R_0^2}{(R_0+2R_1)^2} + R_0\frac{4R_1^2}{(2R_0+R_1)^2} = \frac{2R_0R_1}{(R_0+2R_1)^2}\left(R_0+2R_1\right)$$

Come si voleva dimostrare.

Quesito 2 (fino a 12 punti)

Si consideri uno strato di carica di densità volumetria uniforme ρ = 1 μC/cm³ spesso d=1cm e di larghezza A e lunghezza B, con A, B >> d. Una delle sue superfici del piano e' rivestita da uno strato superficiale di carica con densita' σ = 3 μC/cm². Si calcoli il campo elettrostatico e il potenziale elettrostatico in tutti i punti dello spazio, all'interno e all'esterno della distribuzione di carica.

Come si modifica il campo elettrico in un punto P al centro dello strato di carica se sulla superficie con densità di carica σ nel punto P' (proiezione di P) viene collocata una carica puntiforme $q_0 = -1$ nC.

Per il principio di sovrapposizione il campo complessivo e' la somma dei campi prodoti dallo strato di carica spesso d e dallo strato superficiale $\vec{E} = \vec{E_1} + \vec{E}_2$. In entrambi i casi il campo dipende solo dalla distanza dallo strato (centro dello strato di spessore d, oppure distanza dallo stato superficiale) e sara' diretto nella direzione perpendicolare agli strati, che chiamo z. Collocata l'origine dell'asse z al centro dello strato di spessore d, e scelto il verso dell'asse z in modo che lo strato superficiale di carica si trovi a z=d/2, si ha

$$\vec{E}_1 = \begin{cases} +\frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0}\hat{z} & z > d/2 \\ +\frac{\rho_0 z}{2\epsilon_0}\hat{z} & -d/2 < z < d/2 \\ -\frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0}\hat{z} & z < -d/2 \end{cases} \qquad \vec{E}_2 = \begin{cases} +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} & z > d/2 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} & z < d/2 \end{cases}$$

Quindi

$$\vec{E} = \begin{cases} +\frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0}\hat{z} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} & z > d/2 \\ +\frac{\rho_0 z}{\epsilon_0}\hat{z} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} & -d/2 < z < d/2 \\ -\frac{\rho_0 d}{2\epsilon_0}\hat{z} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z} & z < -d/2 \end{cases}$$

Il potenziale elettrostatico in ogni punto dello spazio dipendera' esclusivamente da z e puo' essere determinato, fissando, per esempio, arbitrariamente $\phi(z=0)=0$ e integrando rispetto a z la componente z del campo elettrico complessivo. Quindi sara' quadratico tra -d/2 e d/2 e lineare altrove.

Quando si aggiunge la carica puntiforme nel punto (0,0,d/2) il campo nell'origine diventa

$$\vec{E}(0,0,0) = \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{4q_0}{4\pi\epsilon_0 d^2}\right)\hat{z}$$

Quesito 3 (fino a 8 punti)

Si discuta ***solo uno*** degli argomenti elencati:

1) Si ricavi l'espressione del potenziale di dipolo e si discutano le proprietà
2) Proprietà dei conduttori all'equilibrio elettrostatico.
3) Legge di Faraday Neumann
4) Continuità e discontinuità del campo magnetico nell'attraversamento di uno strato superficiale di corrente.

Quesito 4 (fino a 10)

Il circuito in figura e' percorso da una corrente di 10 A nel verso indicato. Si calcoli il campo magnetico nel centro O delle due semicirconferenze, assumendo che il raggio interno sia pari a 20 cm e il raggio esterno a 40 cm. Chiamato x l'asse orizzontale e y l'asse verticale con origine in O si valuti l'energia potenziale di un dipolo magnetico $\vec{m} = m_0\hat{u}$ collocato in O, quando $\hat{u} = \hat{y}$ e quando $\hat{u} = \hat{z}$.

Si applica la I legge di Laplace $d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$ integrando su tutto in circuito.

Sui tratti rettilinei il contributo sara' nullo perche' $d\vec{l} \ // \ \vec{r}$ quindi il redotto vettoriale e' nullo. Nel tratti curvilinei $d\vec{l} \ \wedge \ \vec{r} = \pm \ dl \ R_{1,2} \ \hat{z}$, **d**ove il versione z e' perpendicolare al piano della figura e uscente. Si avra' il segno + sull'arco esterno, e il segno - sull'arco interno. Quindi il campo complessivo nel punto O sara'

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i \hat{z}}{4\pi}\left(\frac{2\pi R_e}{R_e^2} - \frac{2\pi R_i}{R_i^2}\right) = \frac{\mu_0 i}{2}\left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_i}\right)\hat{z}$$

L'energia potenziale di un dipolo magnetico immerso in un campo magnetico e'

$$U = -\vec{m}\cdot\vec{B} = \begin{cases} m\frac{\mu_0 i}{2}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_e}\right) & \hat{u} = \hat{z} \\ 0 & \hat{u} = \hat{y} \end{cases}$$

Quesito 5 (fino a 10)

Una spira conduttrice quadrata di lato a=10 cm e resistenza ohmica R = 10 Ω è immersa un una regione dello spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme $\vec{B} = B_0\hat{y}$ con B_0 = 0.1 T. Inizialmente la spira è contenuta nel piano xz. A partire dal tempo t_0 essa viene messa in rotazione a velocità angolare costante $\omega = 100$ giri/s attorno ad un asse parallelo all'asse z che passa per il centro della spira. Si dimostri che nella spira scorre una corrente che varia in modo sinusoidale. Si calcolino i parametri di questa corrente.

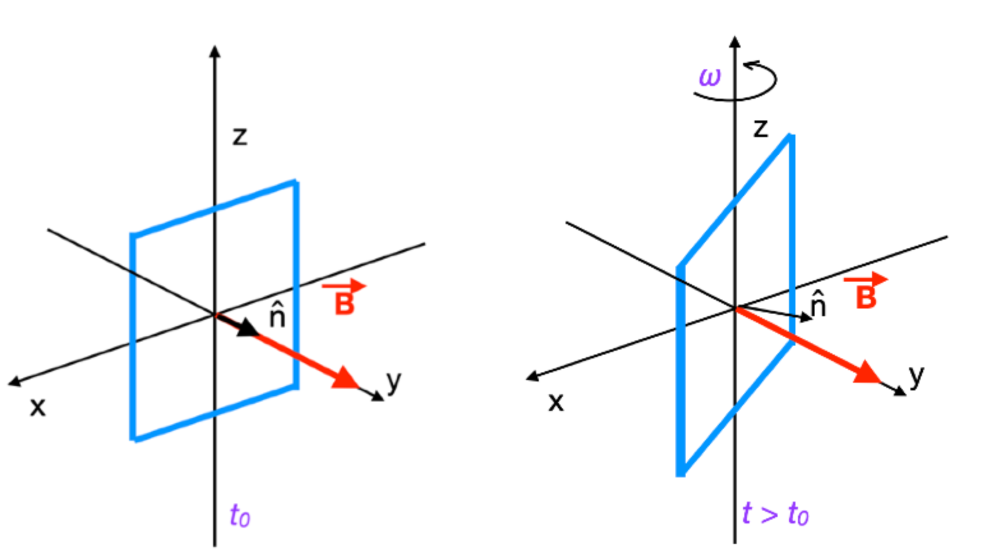
Si osservi che la normale $\hat{n}$ alla spira ruota attorno all'asse z descrivendo un angolo θ con l'asse y che varia con la legge oraria $\theta(t) = \theta_0 + \omega(t - t_0)$.

A un istante generico di tempo t il flusso del campo magnetico concatenato con la spira e' dato da

$\Phi(\vec{B})_\Sigma(t) = a^2 B_0 \cos\theta(t) = a^2 B_0 \cos(\omega(t - t_0))$. Quindi i flusso cambia nel tempo; perciò, applicando Faraday Neumann si ha $\epsilon_i = Ri_i = -\dfrac{d\Phi(\vec{B})}{dt} = a^2 B_0 \omega \sin(\omega(t - t_0))$.

Pertanto la corrente indotta e' pari a $i_i = \dfrac{a^2 B_0 \omega \sin(\omega(t - t_0))}{R}$.

Una spira che ruota a velocita' costante in un campo magnetico uniforme attorno ad un asse perpendicolare al campo e' un prototipo di generatore di corrente sinusoidale.



ε0 =8.85 · 10^{-12}C²/Nm² = 8.85 · 10^{-12} F/m;
μ0 = 4π · 10^{-7} H/m,
k = 1/ (4 π ε0)= 9 · 10^{9} Nm²/C²
|e| = 1.6 · 10^{-19} C, m_e = 9.1 · 10^{-31} Kg, m_p = 1.67 · 10^{-27} Kg, M_{He} ≃4 m_p

Campo $\vec{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\dfrac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\vec{E}$ prodotto da un dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\,\dfrac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$;

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r,\vartheta) = k\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV$; $\quad d\vec{F} = \vec{J}\wedge\vec{B}\,dV$