Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 54 - a.a. 2022-2023

***Quesito 1* (fino a 12)**

La rigidità dielettrica $E^\star$ di un mezzo isolante è il valore massimo del modulo del campo elettrico che si può stabilire tra due conduttori immersi nel mezzo. Superato tale valore del campo si sviluppa una scintilla come effetto di una conduzione diretta di cariche tra i due conduttori che li neutralizza. Si considerino due resistori di uguale resistività ***R= 1 MΩ*** collegati in parallelo tra di loro e poi in serie con un condensatore piano con armature di area ***S*** distanti ***d=2 μm*** l'una dall'altra. Il mezzo dielettrico tra le armature ha costante dielettrica relativa ***k=4***. Il sistema viene chiuso su un generatore di f.e.m. ***ε= 300 V***. La rigidità dielettrica del mezzo isolante nel condensatore è $E^\star$***=100 MV/m.*** Si determini il valore di ***S*** sapendo che la scintilla si produce dopo un tempo $t^\star$***= 1 ms*** dalla chiusura del circuito.

Il circuito RC e' caratterizzato da una R=0.50 MΩ (le due resistenze sono in parallelo) e una capacita' data da C=$k\epsilon_0 S/d$. Il campo all'interno del condensatore e'

$E = V(t)/d = \epsilon(1 - e^{-t/\tau})/d$, dove τ=RC.

Dal momento che la scintilla di generata al tempo $t^\star$ = 1ms, si ha

$E^\star = 100\ \mathrm{MV/m} = \epsilon(1 - e^{-t^\star/(RC)})/d.$

Quindi risolvendo l'equazione per S, superficie delle armature del condensatore si ottiene

$S = -\dfrac{dt^\star}{Rk\epsilon_0 \ln\left(1 - \frac{E^\star d}{\epsilon}\right)}$. Ricordando che $\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$, si puo' calcolare

S = $-\dfrac{36\pi \times 10^{-6}}{\ln \frac{1}{3}} \simeq 10^{-4}\mathrm{m}^2 = 1\ \mathrm{cm}^2$

Quesito 2 (fino a 12 punti)

Una sfera di raggio ***R=50 cm*** con densità di carica uniforme ***ρ*** genera un campo elettrostatico il cui valore alla distanza ***2R*** dal centro è pari a $|\vec{E}| = 37.5\ \mathrm{N/C}$. Si calcoli

1) la densità di carica volumetrica ρ;
2) il campo in un punto distate R/3 dal centro;
3) La differenza di potenziale $\phi(2R) - \phi(R)$;
4) La differenza di potenziale $\phi(0) - \phi(R)$

All'esterno della distribuzione di carica, che presenta una simmetria sferica, il campo elettrico e' uguale al campo colombiano, prodotto da una carica puntiforme di valore pari a Q= $\displaystyle\int_V \rho dV$ = ρV $= \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho$ posta nel centro di simmetria. Quindi

$37.5\ \mathrm{N/C} = |\vec{E}(2R)| = \dfrac{kQ}{4R^2} = 9 \times 10^9 \rho \dfrac{4}{3}\pi R^3 \dfrac{1}{4R^2}$. Quindi

$\rho = \dfrac{37.5}{3\pi \times 0.5 \times 10^9} = 7{,}96 \times 10^{-9}\ \mathrm{C/m^3}$. La carica totale nella distribuzione e' Q= 4.17 nC.

Il campo elettrico in un punto interno (r<R) puo' essere calcolato con la legge di Gauss noto, da simmetria, il fatto che $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Quindi considerata la superficie sferica gaussiana di raggio r, si

ha $\Phi_{S_r}(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{S_r} E(r)\hat{r} \cdot ds\hat{r} = E(r)\ 4\pi r^2 = Q_{S_r}/\epsilon_0 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$, quindi

$E(r) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{4\pi k Q}{3 \times 4\pi R^3/3} r = \frac{kQr}{R^3}$, dove Q = carica totale sulla sfera.

La risposta la punto 2) e' quindi $\vec{E}(R/3) = \frac{\rho R}{9\epsilon_0}\hat{r} = \frac{\rho 4\pi k R}{9}\hat{r} = \rho 4\pi \times 10^9 R\hat{r}$.

$\vec{E}(r > R) = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$ e per r=2R si ha $\vec{E}(2R) = \frac{kQ}{4R^2}\hat{r}$.

Quindi osserviamo che $\vec{E}(R/3) = \frac{4}{3}\vec{E}(2R) = 50\ \mathrm{N/C}\ \hat{r}$

All'esterno della distribuzione $\phi(2R) - \phi(R)$ puo' essere calcolato come differenza di potenziali colombiani:

$\phi(2R) - \phi(R) = kQ\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{R}\right) = -\frac{kQ}{2R} = -\frac{k\rho 4\pi R^3}{6R} = -\frac{k\rho 2\pi R^2}{3} =$
$-3 \times 10^9 \times 7.96 \times 10^{-9} \times 2\pi \times 0.5^2 \simeq -12\pi$ = -38 V

$\phi(0) - \phi(R) = \int_0^R \frac{kQr}{R^3}\hat{r} \cdot d\vec{r} = \frac{kQ}{R^3}\frac{R^2}{2} = \frac{kQ}{2R}$ = 38 V.

Quesito 3 (fino a 12)

Si considerino due fili conduttori, di grande lunghezza, rettilinei paralleli l'uno all'altro, distanti ***d=20 cm***, e percorsi nello stesso verso dalle correnti ***i_1 = 1 A*** e ***i_2 = 4 A*** rispettivamente. Un terzo filo parallelo ai precedenti giace nel piano che contiene i due fili ed è a sua volta percorso dalla corrente ***i_3 = 2 A*** concorde a quella nei due fili. Si determini la posizione di equilibrio per il terzo filo (espresso in termini della distanza ***x*** dal primo filo). Si calcoli , inoltre, il modulo direzione e verso della forza $\Delta\vec{F}$ per unità di lunghezza che agisce sul terzo filo quando si trova alla stessa distanza dai due fili.

Immaginiamo i tre fili nel piani xy, paralleli all'asse y, e con le correnti che scorrono nel verso concorde all'asse y. Per esempio immaginiamo il filo 1 nella posizione x=0, il filo 2 nella posizione x=d, il filo 3 si trova in una posizione x3 che puo' essere x3< 0, oppure 0<x3<d, o infine x>d.

Ogni filo produce il campo $\vec{B}_k = \frac{\mu_0 i_k}{2\pi r}\hat{\phi}$ dove k e' l'indice del filo. Quindi il filo 1 produce in un punto di coordinata x_3 un campo che e' diretto come -z se x_3> 0 e come z se x_3<0.
Il filo 2 produce in un punto di coordinata x_3 un campo che e' diretto come -z se x_3> d e come z se x_3<d.

La forza che il filo 1 produce su un tratto di lunghezza dl del filo 3 e' data da

$d\vec{F_{13}} = i_3 dl\ \hat{y} \wedge \vec{B_1}(x_3) = i_3 dl\ \hat{y} \wedge \left(-\frac{\mu_0 i_1}{2\pi x_3}\right)\hat{z} = -\frac{\mu_0 i_1 i_3\ dl}{2\pi x_3}\hat{x}$.

Analogamente, La forza che il filo 2 produce su un tratto di lunghezza dl del filo 3 e' data da

$d\vec{F_{23}} = i_3 dl\ \hat{y} \wedge \vec{B_2}(x_3) = i_3 dl\ \hat{y} \wedge \left(-\frac{\mu_0 i_2}{2\pi(x_3 - d)}\right)\hat{z} = -\frac{\mu_0 i_2 i_3\ dl}{2\pi(x_3 - d)}\hat{x}$

Quindi se x_3> d entrambe le forze saranno dirette come -x; se x_3< 0 entrambe le forze saranno dirette come x. Quindi in entrambi questi caso non ci puo' essere un bilanciamento delle due forze e quindi una posizione di equilibrio. Occorre allora considerare 0<x3<d, in tal caso si puo' avere che la forza per unita' di lunghezza

$\Delta \overrightarrow{F} = -\frac{\mu_0 i_1 i_3}{2\pi x_3}\hat{x} - \frac{\mu_0 i_2 i_3}{2\pi(x_3-d)}\hat{x} = -\frac{\mu_0 i_3}{2\pi}\left(\frac{i_1}{x_3} + \frac{i_2}{x_3-d}\right)\hat{x} = 0$ se $\frac{i_1}{x_3} + \frac{i_2}{x_3-d} = 0$ ossia

$(x_3 - d)i_1 = -x_3 i_2 \Rightarrow x_3 = di_1/(i_2+i_1) = 4$ cm

Quando $x_3=d/2$ la forza per unita' di lunghezza sara' $\Delta \overrightarrow{F} = -\frac{\mu_0 i_3}{\pi}\left(\frac{i_1}{d} - \frac{i_2}{d}\right)\hat{x}$

$= -\frac{\mu_0 i_3}{d\pi}\left(i_1 - i_2\right)\hat{x} = -\frac{4\pi\times 10^{-7}\times 2(1-4))}{0.2\pi}\hat{x} = \frac{2\times 10^{-7}\times 6}{0.1}\hat{x} = 12\ \mu\mathrm{N/m}.$

Quesito 4 (fino a 12)

Il flusso del campo magnetico attraverso una spira metallica circolare di raggio R=0.3m varia nel tempo secondo la relazione $\phi(t) = 2(\beta t^2 - \gamma t + 4)$. La spira è costituita da una conduttore a filiforme con sezione S=0.6 cm^2 e conducibilità $\sigma = \pi \times 10^7\ (\Omega m)^{-1}$. Calcolare l'energia dissipata nell'intervallo di tempo tra t=0 e t=2s. Si assuma β = 3Wb/s^2 e γ=1 Wb/s.

L'energia dissipata sara' $\Delta U = R\int_{t_0}^{t_f} I_i^2\ dt$. La resistenza R della spira e' data da

R$=2\pi R\rho/S = 2\pi R/(S\sigma) = 2\pi\times 0.3/(0.6\times 10^{-4}\times\pi\times 10^7) = 10^{-3}\ \Omega.$

Inoltre $I_i(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\phi(\overrightarrow{B})}{dt} = -\frac{1}{R}(4\beta t - 2\gamma).$

Quindi

$\Delta U = (1/R)\int_{t_0}^{t_f}(16\beta^2t^2 - 16\beta\gamma t + 4\gamma^2)\ dt = = \frac{1}{R}\left(16\beta^2 t_f^3/3 - 8\beta\gamma t_f^2 + 4\gamma^2 t_f\right) =$

$= \frac{1}{10^{-3}}\left(16\times 3\times 8 - 24\times 4 + 8\right) = 0.296$ MJ

Quesito 5 (fino a 12)

Si risolva con il metodo delle cariche immagine uno dei seguenti problemi, a scelta:

1) piano conduttore infinito a ***potenziale nullo*** e carica puntiforme $\boldsymbol{q_0}$ a distanza $\boldsymbol{d}$ dal piano; si calcoli il campo elettrico in un punto che si trova a meta' tra la carica puntiforme e il piano; si calcoli inoltre la densità superficiale di carica elettrica nel punto del piano piu' vicino alla carica puntiforme;

2) sfera conduttrice di raggio ***R*** a ***potenziale nullo*** e carica puntiforme $\boldsymbol{q_0}$ a distanza ***d>R*** dal centro della sfera; si calcoli il campo elettrico in un punto che si trova a meta' tra la carica puntiforme e la superficie della sfera; si calcoli inoltre la densità superficiale di carica elettrica nel punto della sfera piu' vicino alla carica puntiforme.

Caso 1): il sistema di cariche l'immagine e' composto dalla carica $\boldsymbol{q_0}$ e da una di segno opposto dall'altra parte del piano alla stessa distanza => $\overrightarrow{E}(d/2) = kq_0\left(-\frac{4}{d^2} - \frac{4}{9d^2}\right)\hat{z} = -\frac{4kq_0}{d^2}\frac{10}{9}\hat{z}.$

Inoltre, $\sigma = \epsilon_0 E_z(0).$

$\overrightarrow{E}(0) = kq_0\left(-\frac{1}{d^2} - \frac{1}{d^2}\right)\hat{z} = -2kq_0\frac{1}{d^2}\hat{z}$, quindi $\sigma(0) = -\frac{2kq_0\epsilon_0}{d^2}$

Quesito 6 (fino a 8 punti)

Si discuta ***solo uno*** degli argomenti elencati:

1) L'energia elettrostatica di un sistema discreto e continuo di cariche
2) Modello di Drude a giustificazione della legge di Ohm.
3) Legge di Ampère in forma integrale e suo limite di applicazione.
4) Considerazioni di simmetria che consentono di determinare il campo elettrico provocato da una distribuzione cilindrica di cariche statiche mediante la legge di Gauss.

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m;
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,
$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$
$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_{He} \simeq 4\, m_p$

Campo $\overrightarrow{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\dfrac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\overrightarrow{E}$ prodotto da un dipolo: $\overrightarrow{E}(r,\vartheta) = k\,\dfrac{3(\overrightarrow{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{p}}{r^5}$;

Campo $\overrightarrow{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\overrightarrow{B}(r,\vartheta) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3(\overrightarrow{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{m}}{r^5}$;

Potenziale di dipolo $\varphi(r,\vartheta) = k\dfrac{\overrightarrow{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Formule di Laplace: $d\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\overrightarrow{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV;\qquad d\overrightarrow{F} = \overrightarrow{J}\wedge\overrightarrow{B}\,dV$