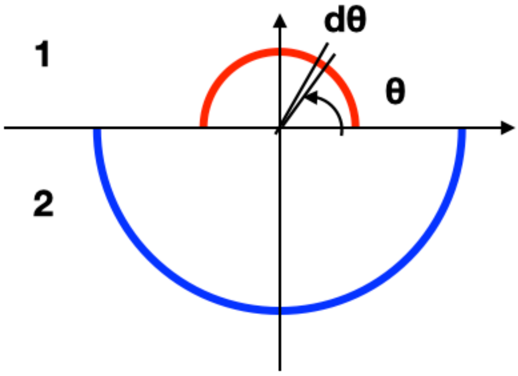
Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 56 - a.a. 2022-2023

***Quesito 1* (fino a 12)**

1) Su una bacchetta semicircolare di raggio R_1 costituita di materiale isolante e' depositata carica con densita' uniforme λ. La bacchetta e' collocata nel piano xy con il diametro lungo l'asse x e la concavita' rivolta verso il basso. Nello stesso piano giace un'altra bacchetta isolante semicircolare con lo stesso centro, diametro orizzontale, concavità rivolta verso l'alto, raggio R_2. Sulla seconda bacchetta e' depositata carica con densita' 2λ. Determinare per quale valore del raggio R_2 il campo elettrico e' nullo nel centro delle due semiconferenze.



Il tratto di arco di lunghezza $dl_1 = R_1\ d\theta$ contribuisce al campo in (0,0) con $d\vec{E}_1 = -k\frac{\lambda\ dl_1}{R_1^2}\hat{r} = -k\frac{\lambda\ d\theta}{R_1}\hat{r}$.

Tratti di arco alla stessa y e a x opposte produrranno contributi le cui componenti x si cancelleranno, mentre le componenti y, proporzionali a $\sin\theta$, si sommeranno, quindi il campo complessivo prodotto in (0,0) sara' diretto solo come y. Possiamo percio' calcolare

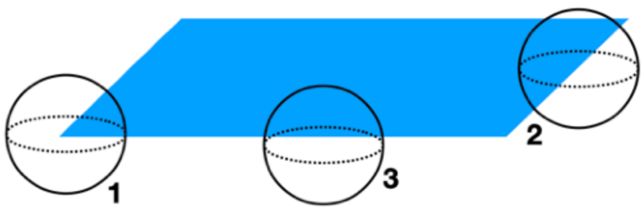
$$\vec{E}_1 = -k\lambda\frac{\hat{y}}{R_1}\int_0^{\pi}\sin\theta\ d\theta = -k\lambda\frac{\hat{y}}{R_1}\Big(-\cos\pi + \cos 0\Big) = -\frac{2k\lambda}{R_1}\hat{y}.$$

Con un calcolo analogo si trova che url campo $\vec{E}_2$ prodotto dall'archetto in basso e' diretta come l'asse y ma punta verso l'alto e l'espressione completa si ottiene sostituendo λ-> 2λ e R_1 con R_2.

Quindi il campo complessivo in (0,0) e' dato da $\vec{E}(0,0) = -\frac{2k\lambda}{R_1}\hat{y} + \frac{4k\lambda}{R_2}\hat{y}$ che si annulla per

$R_2 = 2R_1$.

2) Un foglio piano di lato L e' caricato con una densita' superficiale omogenea σ. Si considerino tre superfici sferiche puramente geometriche di raggio R<L con ciascuna con centro collocato sullo stesso piano in cui giace url foglio carico. Si calcoli il flusso del campo elettrostatico attraverso S_1, con centro della superficie sferica coincidente con uno spigolo del figlio, S_2 con centro coincidente con il punto di mezzo di un lato del foglio, S_3 con centro fuori dal foglio a distanza $d=R/\sqrt{2}$ dal lato del foglio piu' vicino.



Questo problema si risolve applicando la legge di Gauss il cui enunciato e': data una superficie chiusa qualsiasi Σ il flusso del campo elettrico attraverso al superficie $\Phi(\vec{E})_\Sigma = \int_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{s}$ risulta uguale al valore della carica totale contenuta all'interno della superficie divisa per la costante dielettrica del vuoto, ossia $\Phi(\vec{E})_\Sigma = \frac{Q_\Sigma^{int}}{\epsilon_0}$. Per definizione, $\Phi(\vec{E})_\Sigma = \int_\Sigma \vec{E}\cdot d\vec{s}$ e

$Q_\Sigma^{int} = \int_{V_\Sigma}\rho(\vec{r}')\ dV'$.

Quindi per rispondere ai quesiti basta calcolare $Q_{S_1}^{int} = \sigma\ \pi R^2/4$ (la parte di piano carico contenuto in S1 e' 1/4 della superficie πR^2), $Q_{S_2}^{int} = \sigma\ \pi R^2/2$, $Q_{S_3}^{int} = \sigma\ \left[\pi R^2 \alpha/\pi - dR\sin\alpha\right]$, e siccome $\cos\alpha = \dfrac{d}{R}$, e $d = R/\sqrt{2}$, allora $\alpha = \pi/4$.

$$Q_{S_3}^{int} = \sigma\ \left[\pi R^2/4 - R^2/2\right] = \frac{\sigma R^2}{2}\ \left[\frac{\pi}{2} - 1\right].$$

Quesito 2 (fino a 12 punti)

Si consideri un circuito composto da due resistenze R1 e R2 collegate in serie tra di loro e collegate al parallelo di due altre resistenze, R3 ed R4. La sequenza di resistenze e' collegata ai due poli di un generatore di f.e.m. ε. Si calcoli il valore di R1 che massimizza la potenza dissipata su R1, noti i valori delle altre resistenze: R_2=5 Ω, R_3=2 kΩ, R_4=200 Ω, Si calcoli inoltre la potenza dissipata su R3 in tali condizioni di massima dissipazione di energia su R1, sapendo che ε = 10 V. Si calcoli la velocita' di deriva degli elettroni di conduzione, nel ramo del generatore, che assumiamo essere gli unici portatori di carica liberi se la sezione del filo conduttore che collega gli elemento circuitali e' circolare con raggio di 250 μm (si consideri una densita' volumetrica di elettroni di conduzione n=10^{23}/cm^3).

La potenza dissipata su R_1 e $P_1=R_1 i_1^2$. Occorre quindi calcolare la corrente che scorre in i1 che sara' $i_1 = \dfrac{\epsilon}{R_1 + R_2 + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4}}$ => $P_1 = \dfrac{\epsilon^2 R_1}{(R_1+R_\alpha)^2}$ con $R_\alpha = R_2 + \dfrac{R_3R_4}{R_3+R_4}$.

P_1 sara' massima quando $\dfrac{dP_1}{dR_1} = 0 = \epsilon^2 \dfrac{(R_1+R_\alpha)^2 - 2R_1(R_1+R_\alpha)}{(R_1+R_\alpha)^4}$

La condizione di massimo di P1 e' verifica quando il numeratore e' nullo ossia quando $R_\alpha^2 = R_1^2$.

Quindi la potenza massima dissipata su R1 e' ottenuta per $R_1 = R_2 + \dfrac{R_3R_4}{R_3+R_4}$ =

$R_1 = 5 + \dfrac{2\times 0.2}{2.2}$ = 5.18 Ω.

In queste condizioni $P_3 = R_3 i_3^2$, $i_3R_3 = i_4R_4$, $i = 10\ \mathrm{V}/(10.18\ \Omega + 0.4/2.2\ \Omega)$ = 0.965 A = $i_3 + i_4$ = $i_3(1 + R_3/R_4)$ => $i_3 = i\ /11 = $ 0.0877 A.

$P_3 = R_3 i_3^2$ = 15.39 W.

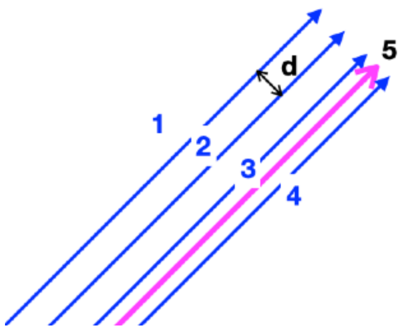
Lal densita' di corrente $\vec{J} = ne\vec{v_d}$ con n = densita' volumetrica di elettroni di conduzione.

Quindi $v_d = \dfrac{i}{ne\ \pi r^2}$ = $\dfrac{0.965\ A}{10^{23}\times 10^6\ 1.6\times 10^{-19}\ \pi 250^2 \times 10^{-12}}$ = 3 x 10^{-4} m/s.

Si osservi che la densita' volumetrica di elettroni di conduzione n e' uguale alla densita' volumetrica di atomi, perche' in un tipico conduttore un elettrone per atomo ha energia tale da trovarsi nella banda energetica di conduzione, ossia libero di muoversi nel volume del conduttore. Allora n = Natomi / V = N_A n_{mol} / V = N_A x (M/V) / A, cioe' il numero di atomi per unita' di volume e' uguale al numero di Avogadro (= numero di atomi in una mole) x numero di moli per unita' di volume. Ma numero di moli per unita' di volume n_{mol} / V e' uguale alla massa per unita' di volume (densita' di massa) diviso per la massa di una mole (= peso atomico A). Percio' per un elemento come il rame, Cu: Z = 29, A =63.5 g/mol, densita' di massa ρ = 8,92 g/cm^3 si ha: n = 6x10^{23} (mol^{-1}) x 8.92 (g/cm^3) / 63.5 (g/mol) = 0.84 x 10^{23} cm^{-3} ossia n~10^{23}/cm^3.

Quesito 3 (fino a 12 punti)

Si considerino 4 fili rettilinei di lunghezza infinita collocati nel piano xy, paralleli l'uno all'altro ed equidistanti tra loro. I fili sono percorsi tutti dalla stessa corrente i_0 nello stesso verso. Si collochi un quinto filo, percorso dalla corrente $\boldsymbol{I_5}$ a meta' tra il terzo e il quarto.



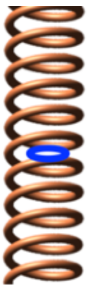
Si valuti la forza sul quinto filo.
I parametri del problema sono: $i_0 = 5$ A, $i_5 = 3$ A, d=4 cm

I fili 3 e 4 producono sui punti del filo 5 un campo uguale e opposto => effetto 0.

I fili 2 e 1 producono un campo $\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0 i_1}{2\pi 5d/2}\hat{z} + \dfrac{\mu_0 i_1}{2\pi 3d/2}\hat{z} = \dfrac{8\mu_0 i_1}{15\pi d}\hat{z}$ dove $\hat{z}$ e' perpendicolare al piano ed entrante. Quindi la forza sul filo e'

$\overrightarrow{F} = \displaystyle\int_0^L i_5\, dl\hat{\imath} \wedge \overrightarrow{B} = i_5\, LB\ \hat{u} = \dfrac{8\mu_0 i_1 i_5 L}{15\pi d}\hat{u}$ dove $\hat{u}$ e' il versore perpendicolare ai fili nel piano, che punta da 5 a 2(1). Quindi e' una forza che attrae 5 verso 3(2,1). Il modulo e'

$\dfrac{8\times 4\pi\times 10^{-7}\times 5\times 3L}{15\pi\times 0.04}$ => per unita' di lunghezza (L=1 m), F/L = 0.8 x 10^{-4} N/m



Quesito 4 (fino a 12 punti)

Nell'avvolgimento di un solenoide, di lunghezza L >> R=raggio delle spire del solenoide, con una densita' lineare di spire *n* scorre la corrente $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$. Un filo di Ni-Cr (di resistività *ρ*, lunghezza *l* e sezione *S*) e' avvolto a forma di anello e collocato al centro del solenoide coassiale alle spire di quest'ultimo. Calcolare la potenza istantanea $P^\star$ dissipata nell'anello nell'istante di tempo t=$t^\star$. I parametri del sistema sono: *n*=50/cm, i_0=10 A, τ=1 s, *ρ*=10^{-6} Ωm,
l=62.8 cm, *S=0.2 x 10^{-12}m²*, $t^\star$=0.5 s.

La superficie piana concatenata con l'anello γ di Ni-Cr e' pari a

$\Sigma = \pi r^2 = \pi(l/2\pi)^2 = \dfrac{l^2}{4\pi}$. Il flusso del campo magnetico concatenato con l'anello e'

$\Phi(\overrightarrow{B})_\gamma = \mu_0 n\ i(t)\dfrac{l^2}{4\pi} = \dfrac{\mu_0 n l^2 i_0 e^{-t/\tau}}{4\pi}$.

Per la legge di Faraday Neumann, la forza elettromotrice indotta sulla spira sara'

$\epsilon_{indotta} = -\dfrac{\mu_0 n l^2 i_0 e^{-t/\tau}}{4\pi\tau} = R i_{indotta}$, dove R, la resistenza ohmica dell'anello e'

$R = \rho l/S = 10^{-6}\times 0.628/(0.2\times 10^{-12}) = 3.14\ \mathrm{M\Omega}$.

La potenza P dissipata a $t^\star$=0.5 s sara' P = R $\epsilon^2_{indotta}/R^2$ = $\epsilon^2_{indotta}(t^\star)/R$ =

$\dfrac{1}{R}\left(\dfrac{\mu_0 n l^2 i_0}{4\pi\tau}\right)^2 e^{-2t^\star/\tau} = \dfrac{1}{Re}\left(\dfrac{\mu_0 n l^2 i_0}{4\pi\tau}\right)^2 = \dfrac{1}{\pi e\times 10^6}\dfrac{16\pi^2\times 10^{-14} n^2\times 0.628^4\times 10^2}{16\pi^2\times 1^2} =$
= 25 x 10^6 x 0.15 x 10^{-18}/(2.72 π) = 0.440 pW

Quesito 5 (fino a 12)

Si consideri un tubo di raggio 2cm con la superficie laterale costituita da una sottile strato metallico. Sull'asse del tubo e' teso tra i centri delle due basi isolanti un sottile filo metallico la cui sezione circolare ha un raggio di 25 µm. La parete esterna del tubo e' collegata a massa (si trova a potenziale elettrostatico nullo) e il filo e' collegato a un generatore di HV che produce 2 kV. Si calcoli la capacita' per unita' di lunghezza del sistema considerando che il tubo e' vuoto o riempito di un gas con costante dielettrica relativa molto vicina a 1. Si calcoli il modulo del campo elettrico sulla superficie del filo e immediatamente all'interno della superficie della parete. Si discuta anche direzione e verso, adottando un sistema di coordinate cilindriche, in cui l'asse z coincide con il filo.

Il sistema di conduttori ha simmetria cilindrica se assumiamo la lunghezza L del tubo >> del suo raggio. Di conseguenza il campo elettrico sara' $\overrightarrow{E} = E(r)\hat{r}$ dove r e' la distanza dall'asse e $\hat{r}$

rappresenta il versione radiale uscente del sistema di coordinate cilindriche in cui l'asse z coincide con il filo. Quindi, chiamata Q la carica sul conduttore interno, il filo, Q = λ L (dove λ e' la densita' lineare), applicando la legge di Gauss a una superficie cilindrica di raggio r<R e altezza h si ha $\Phi(\vec{E})_C = E(r)2\pi rh$ = Q_C^{int}/ϵ_0 = λh. Pertanto $E(r) = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$.

La differenza di potenziale tra filo e superficie esterna, $\phi(r_f) - \phi(R) = \int_{r_f}^{R} d\vec{l}\cdot\vec{E}$ =

$$= \int_{r_f}^{R} dr\hat{r}\cdot E(r)\hat{r} = \int_{r_f}^{R} dr\hat{r}\cdot\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{R}{r_f}\right) = 2k\lambda\ln\left(\frac{0.02}{25\times 10^{-6}}\right) = 120 \times 10^9\,\lambda =$$

ΔV = 2 kV => λ = 16.7 nC/m

La capacita' C = Q / ΔV = λ L / $\left(\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\left(\dfrac{R}{r_f}\right)\right) = \dfrac{L2\pi\epsilon_0}{\ln(R/r_f)} = \dfrac{L}{2k\ln(R/r_f)}$

= L x 7.5 10^{-2} x 10^{-10} F => la capacita' per unita' di lunghezza e' di 7.5 pF/m.

Il campo elettrico in prossimità del filo e'

$$\vec{E}(r_f) = 2\times 16.7\ \mathrm{nC/m}\times 9\times 10^9/(25\times 10^{-6})\hat{r} \simeq 12\ \mathrm{MV/m}$$

Il campo elettrico in prossimità della parete del tubo e'

$$\vec{E}(r_f) = 2\times 16.7\ \mathrm{nC/m}\times 9\times 10^9/(2\times 10^{-2})\hat{r} \simeq 15\ \mathrm{kV/m}$$

Quesito 6 (fino a 8 punti)

Si discuta ***solo uno*** degli argomenti elencati:

1) Le proprietà della carica elettrica.
2) Formulazione locale e differenziale della legge di Ampere e limiti di validità.
3) Teorema di Coulomb.
4) Relazione tra potenziale vettore e campo magnetico.

ε_0 =8.85 · 10^{-12} C^2/Nm^2 = 8.85 · 10^{-12} F/m
μ_0 = 4π · 10^{-7} H/m,
k = 1/ (4 π ε_0)= 9 · 10^9 Nm^2/C^2
|e| = 1.6 · 10^{-19} C, m_e = 9.1 · 10^{-31} Kg, m_p = 1.67 · 10^{-27} Kg, M_{He} ≃4 m_p ; N_A = 6.022 x 10^{23} mol^{-1}

Campo $\vec{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\dfrac{kq}{r^2}\hat{r}$

Campo $\vec{E}$ e potenziale $\varphi(r,\vartheta)$ di dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\dfrac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$; $\varphi(r,\vartheta) = k\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV$; $d\vec{F} = \vec{J}\wedge\vec{B}\,dV$

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Divergenza $\nabla\cdot\mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$
Rotore $\nabla\times\mathbf{A}$	$(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\mathbf{x}}\ +$ $(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\mathbf{y}}\ +$ $(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\mathbf{z}}$	$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{\boldsymbol{\rho}}\ +$ $(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial \rho})\hat{\boldsymbol{\phi}}\ +$ $\frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi})\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\hat{\mathbf{r}}\ +$ $\frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi))\hat{\boldsymbol{\theta}}\ +$ $\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l}=dx\hat{\mathbf{x}}+dy\hat{\mathbf{y}}+dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l}=d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}+\rho d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}+dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l}=dr\hat{\mathbf{r}}+rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S}=dydz\hat{\mathbf{x}}+dxdz\hat{\mathbf{y}}+dxdy\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S}=\rho d\phi dz\hat{\boldsymbol{\rho}}+d\rho dz\hat{\boldsymbol{\phi}}+\rho d\rho d\phi\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S}=r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\mathbf{r}}+r\sin\theta dr d\phi\hat{\boldsymbol{\theta}}+rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Volume infinitesimo	$dv=dxdydz$	$dv=\rho d\rho d\phi dz$	$dv=r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$