Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 58 - a.a. 2022-2023

Quesito 1 (fino a 12 punti)

Si calcoli il coefficiente di auto induzione di un solenoide di lunghezza L=30 cm, raggio R=5 cm costituito da 1000 spire. All'istante di tempo t=0, la bobina e' collegata in serie a un resistore di 100 Ω e a un generatore di f.e.m. di 5 V, si determini l'andamento nel tempo della corrente nelle spire della bobina. Dopo quanto tempo dall'accensione del circuito la corrente raggiunge il 90% del valore finale ?

Il flusso del campo magnetico concatenato con il solenoide $\Phi_s(\overrightarrow{B}) = iL$ e' uguale al prodotto del coefficiente di autoinduzione L per la corrente. $\Phi_s(\overrightarrow{B}) = nl \times \mu_0 in \times \pi R^2$ => il coefficiente di autoinduzione $L = \pi\mu_0 n^2 R^2 = 4\pi^2 \times 10^{-7} \times 10^6 \times 0.05^2/0.3^2 = 0.11\ \mathrm{H}$.

L'equazione del circuito e' $\epsilon - L\dfrac{di}{dt} = Ri$ che ha soluzione $i(t) = \dfrac{\epsilon}{R}(1 - e^{-tR/L})$

$$\frac{1}{L}dt = \frac{di}{\epsilon - Ri}$$

$$\int_0^t \frac{1}{L}dt' = \int_{i_0}^{i(t)} \frac{di}{\epsilon - Ri}$$

$-\dfrac{1}{R}\ln\left(\dfrac{\epsilon - Ri(t)}{\epsilon}\right) = \dfrac{t}{L}$. Percio' $\epsilon - Ri(t) = \epsilon e^{-Rt/L}$

Il valore finale della corrente e' quindi ϵ/R, e l'istante di tempo in cui la corrente e' il 90% del valore finale e' t' tale che $0.9 = (1 - e^{-t'R/L})$, quindi $\ln 0.1 = -t'R/L$

$t' = \dfrac{L}{R}\ln 10$ = 25 ms

Quesito 2 (fino a 12) - 22

Una certa quantita' di carica elettrica Q_0 e' distribuita in una sfera di raggio R_0 con densita' variabile linearmente con la distanza r dal centro ($\rho(r)=\rho_0\, r/R_0$). Questa distribuzione si trova al centro di una sfera conduttrice cava neutra di raggio interno $R_1>R_0$ e raggio esterno R_2.
Si calcoli la differenza di potenziale tra un punto a $r=R_0$ e il conduttore.
Si calcoli inoltre il campo elettrico immediatamente all'esterno del conduttore e a $r=R_0/2$. Si assuma R_0 = 1 cm, R_1 = 5 cm, R_2 = 10 cm e Q_0 = 1 nC.

La differenza di potenziale richiesta e' $\phi(R_0) - \phi(R_1) = \displaystyle\int_{R_0}^{R_1} \overrightarrow{E}\cdot d\overrightarrow{l}$.

Il campo elettrico vale

$$\begin{cases} \overrightarrow{E} = \dfrac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 R_0}\hat{r} = \dfrac{Q_{Tot} r^2}{4\pi\epsilon_0 R_0^4}\hat{r} & r < R_0 \\ \overrightarrow{E} = \dfrac{Q_{Tot}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} & R_0 \le r \le R_1 \\ \overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} & R_1 < r < R_2 \\ \overrightarrow{E} = \dfrac{Q_{Tot}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} & r \ge R_2 \end{cases}$$

dove $Q_0 = Q_{Tot} = \displaystyle\int_{r<R_0} dV\,\rho(r) = \int_0^{R_0} 4\pi r^2 dr \rho_0 \frac{r}{R_0} = \frac{\pi\rho_0}{R_0} r^4 \Big|_0^{R_0} = \pi\rho_0 R_0^3$.

Pertanto $\rho_0 = \dfrac{Q_0}{\pi R_0^3} = \dfrac{1}{\pi}\ \mathrm{nC/m^3}$

Il risultato per il campo si ottiene facilmente usando la legge di Gauss, visto che il sistema e' a simmetria sferica e quindi $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. In particolare, quindi si ha che il campo all'interno della cavita' e all'esterno del sistema complessivo ha la forma colombiana, come se tutta la carica del sistema Q_{Tot} fosse concentrata nel centro di simmetria. Inoltre, per $r < R_0$, dall'applicazione della legge di Gauss a una superficie sferica S_r di raggio r, si ha

$$\Phi_{S_r}(\vec{E}) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r 4\pi r'^2 dr' \rho_0 r'/R_0 = \frac{\pi\rho_0}{\epsilon_0 R_0} r^4$$

Quindi $E(r) = \dfrac{\rho_0}{4\epsilon_0 R_0} r^2$.

Allora $\phi(R_0) - \phi(R_1) = \displaystyle\int_{R_0}^{R_1} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{Q_{Tot}}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_1}\right) =$

$= 9 \times 10^9 \times 1\ \mathrm{nC}(1/) = 720$ V.

Il campo immediatamente all'esterno del conduttore vale

$$\vec{E}(R_2) = \frac{Q_{Tot}}{4\pi\epsilon_0 R_2^2}\hat{r} = 9\times 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2} \times 1\ \mathrm{nC} \times \frac{1}{0.1^2\ \mathrm{m^2}}\hat{r} = 900\ \mathrm{N/C}\ \hat{r} = 900\ \mathrm{V/m}\ \hat{r}$$

Invece a una distanza dal centro di simmetria pari a $R_0/2$ si ha

$$\vec{E}(R_0/2) = \frac{Q_{Tot}R_0^2}{4\times 4\pi\epsilon_0 R_0^4}\hat{r} = = \frac{1}{4}\frac{Q_{Tot}}{4\pi\epsilon_0 R_0^2}\hat{r} = 9\times 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}\times 1\ \mathrm{nC}\times\frac{1}{4\times 0.01^2\ \mathrm{m^2}} =$$

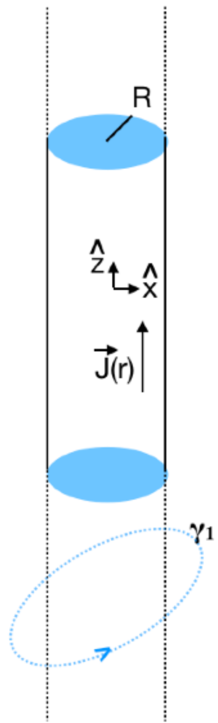
22.5 kV/m

Quesito 3 (fino a 12)

In un cilindro di lunghezza L e raggio R, con *L>>R*, scorre una densità di corrente uniforme $\vec{J}(r) = J_0\hat{z}$, dove l'asse z coincide con l'asse del cilindro.

Calcolare il campo magnetico in un punto P a distanza r=R/2 e in un punto P' a distanza r'=(3/2)R dall'asse del cilindro.

Si calcoli il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito γ_1 in figura e con un circuito γ_2 quadrato con un lato sull'asse del cilindro di lunghezza *a>R*. Si calcoli la circuitazione del potenziale vettore $\vec{A}$ sui circuiti γ_1 e γ_2



Per calcolare il campo magnetico applichiamo la legge di Ampere a un circuito circolare γ coassiale alla distribuzione $\displaystyle\int_\gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{\Sigma_\gamma} \vec{J}\cdot d\vec{s}$ dove, a causa della simmetria cilindrica delle sorgenti, il campo sara' $\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$. Quindi

$$\begin{cases} 2\pi r B(r) = \mu_0 J_0 \pi r^2 & r < R \\ 2\pi r B(r) = \mu_0 J_0 \pi R^2 & r \geq R \end{cases} \quad \text{pertanto} \quad \begin{cases} \vec{B}(r) = \dfrac{\mu_0 J_0 r}{2}\hat{\phi} & r < R \\ \vec{B}(r) = \dfrac{\mu_0 J_0 R^2}{2r}\hat{\phi} & r \geq R \end{cases}$$

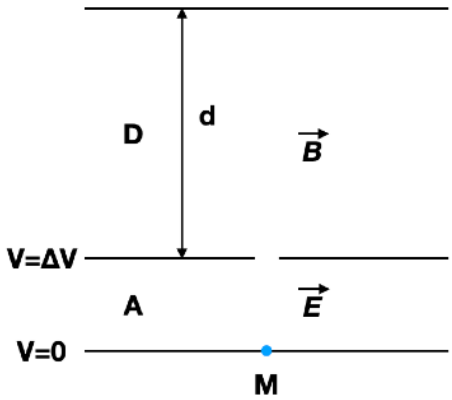
Allora

$$\begin{cases} \vec{B}(R/2) = \dfrac{\mu_0 J_0 R}{4}\hat{\phi} \\ \vec{B}(3R/2) = \dfrac{\mu_0 J_0 R}{3}\hat{\phi} \end{cases}$$

Il flusso del campo magnetico concatenato con γ_1 è $\Phi_{\gamma_1}(\vec{B}) = \Phi_{\Sigma_{\gamma_1}}(\vec{B}) = J_0 \pi R^2$ dove Σ_{γ_1} e' una superficie qualunque che ha come bordo γ_1. Invece il flusso concatenato con γ_2

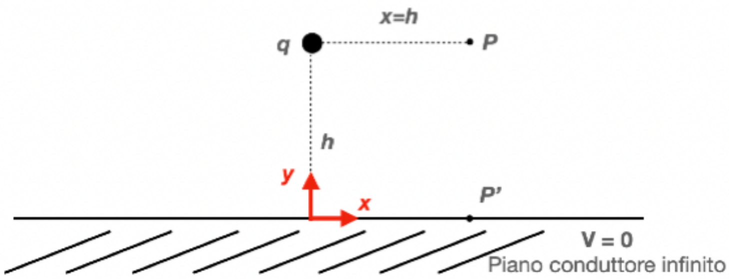
invece vale $\Phi_{\gamma_2}(\vec{B}) = \int_{z_0}^{z_0+a} dz \int_0^R dr \frac{\mu_0 J_0 r}{2}\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}$. In questa espressione. Sto assumendo che γ_2 sia orientato in senso orario cosi' che ogni elementino della superficie piana Σ_{γ_2}che ha come bordo γ_2 possa essere descritto da $d\vec{s} = dzdr\hat{\phi}$. Quindi $\Phi_{\gamma_2}(\vec{B}) = \frac{\mu_0 J_0 a R^2}{4}$.

Quesito 4 (fino a 12)
Si discuta in quali condizioni una particella di carica q e massa M, introdotta con velocita' nulla nella regione A (in cui e' presente un campo elettrico determinato dalla differenza di potenziale ΔV tra le due pareti), entra nella sezione D, in cui e' presente un campo magnetico perpendicolare al piano della figura orientato in verso uscente, e raggiunge la parete che dista d da quella di ingresso.



Tra i due elettrodi a differenza di potenziale ΔV ci sara' un campo elettrico uniforme perpendicolare alle due armature e diretto verso l'elettrodo a potenziale piu' basso (regione A). Se assumiamo che ΔV > 0, la particella di massa M sara' accelerata verso l'elettrodo in alto se la sua carica e' negativa. In tal caso essa entrera' nella regione in cui e' presente il campo magnetico con una velocita' diretta verso l'alto (fissiamo l'asse y come l'asse verticale che punto verso l'alto) dettata dalla relazione $\frac{1}{2}Mv^2 = q\Delta V$, ossia $v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{M}}$. La forza di Lorentz a cui sara' soggetta al suo ingresso nella regione D sara' pari a $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = qv\hat{y} \wedge B_0\hat{z} = qvB_0\hat{x}$ cioe' sara' diretta verso sinistra (in verso opposto all'asse x) dal momento che q<0. Percio' la traiettoria della particella sara' un arco di circonferenza con raggio dato dalla relazione
$m\frac{v^2}{r} = qvB_0$ da cui si ottiene $r = \frac{mv}{qB_0}$. Se $r \leq d$, cioe' se $v \leq \frac{dqB_0}{m}$ la traiettoria sara' quindi una semicirconferenza, altrimenti sara' un arco di circonferenza che terminerà' con l'impatto sulla parete in alto della regione D.

Quesito 5 (fino a 12)
Si consideri un piano conduttore infinitamente esteso a potenziale nullo e una carica puntiforme q a distanza h dal piano. Si calcoli il potenziale elettrostatico nel punto P e il campo elettrico nel punto P e nel punto P'. Si calcoli anche la densità di carica indotta nel punto P'.



Il sistema fisico in esame puo' essere risolto, sfruttando l'unicità' della soluzione del problema generale dell'elettrostatica alla Dirichlet usando il sistema fittizio delle due cariche immagine q a z=h e -q a z = -h. Le sue cariche infatti riproducono la condizione al contorno di potenziale nullo su tutto il piano z=0. Il campo in P' sara' dato dalla somma dei due campi colombiani prodotti dalle due cariche, perpendicolare al piano e rivolto verso il basso: $\vec{E}(P') = -2\frac{kq}{(\sqrt{2}h)^2}\cos\frac{\pi}{4}\hat{z} \;\; = -\frac{\sqrt{2}kq}{2h^2}\hat{z}$. Pertanto la densita' di carica indotta nel punto P' sara' (per il teorema di Coulomb) $\vec{E}(P') = \frac{\sigma(P')}{\epsilon_0}\hat{z} \Rightarrow \sigma(P') = -\frac{\sqrt{2}q}{8\pi h^2}$

Il campo nel punto P $\vec{E}(P) = \frac{kq}{h^2}\hat{y} - \frac{kq}{(h^2+4h^2)^{3/2}}\left(h\hat{y} + 2h\hat{z}\right) =$
$\frac{kq}{h^2}\hat{y} - \frac{kq}{5^{3/2}h^3}\left(h\hat{y} + 2h\hat{z}\right) = \frac{kq}{h^2}\left(1 - \frac{1}{5^{3/2}}\right)\hat{y} - \frac{2kq}{5^{3/2}h^2}\hat{z}$

Quesito 6 (fino a 8 punti)

Si discuta ***solo uno*** degli argomenti elencati:

1) Si discuta e giustifichi l'espressione della potenza dissipata dalla corrente in un resistore;
2) Metodi alternativi per il calcolo dell'energia elettrostatica di un sistema di cariche;
3) Enunciare e giustificare la seconda formula di Laplace per correnti filiformi e volumetriche;
4) Ricavare il potenziale di dipolo per r >> d (distanza tra le due cariche).

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m
$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m,
$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2$
$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg, $M_{He} \simeq 4\, m_p$; $N_A = 6.022 \times 10^{23}\ mol^{-1}$
Campo $\vec{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\frac{kq}{r^2}\hat{r}$
Campo $\vec{E}$ e potenziale $\varphi(r,\vartheta)$ di dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$; $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$
Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;
Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV$; $d\vec{F} = \vec{J}\wedge\vec{B}\, dV$

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Divergenza $\nabla\cdot\mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$
Rotore $\nabla\times\mathbf{A}$	$(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\mathbf{x}}+$ $(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\mathbf{y}}+$ $(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\mathbf{z}}$	$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{\boldsymbol{\rho}}+$ $(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial \rho})\hat{\boldsymbol{\phi}}+$ $\frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial\phi})\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\hat{\mathbf{r}}+$ $\frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi))\hat{\boldsymbol{\theta}}+$ $\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l}=dx\hat{\mathbf{x}}+dy\hat{\mathbf{y}}+dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l}=d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}+\rho d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}+dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l}=dr\hat{\mathbf{r}}+rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S}=dydz\hat{\mathbf{x}}+dxdz\hat{\mathbf{y}}+dxdy\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S}=\rho d\phi dz\hat{\boldsymbol{\rho}}+d\rho dz\hat{\boldsymbol{\phi}}+\rho d\rho d\phi\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S}=r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\mathbf{r}}+r\sin\theta dr d\phi\hat{\boldsymbol{\theta}}+rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Volume infinitesimo	$dv=dxdydz$	$dv=\rho d\rho d\phi dz$	$dv=r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$

Operatori differenziali ed elementi di linea, superficie e volume in coordinate cartesiane (sinistra), cilindriche (centro) e sferiche (destra).