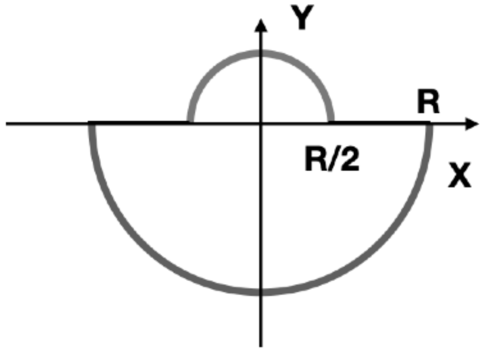
Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 59



Quesito 1.1
Sul percorso chiuso illustrato in figura sia distribuita carica con densita' lineare uniforme λ_0. Si calcoli il campo elettrico nell'origine e il potenziale elettrostatico, fissato $\phi = 0$ all'infinito.

$$\vec{E}(0,0,0) = \oint \frac{k\lambda dl(-\hat{r}')}{r'^2} =$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \frac{k\lambda R d\phi \sin(\pi+\phi)}{R^2}\hat{y} - \int_{0}^{\pi} \frac{k\lambda R d\phi \sin(\phi)}{2(R/2)^2}\hat{y}$$

Infatti i due tratti rettilinei danno contributi uguali e opposti e, per simmetria, le componenti x del campo prodotto da ciascuno semicerchio sono nulle (contributi da archi infinitesimi ad angoli supplementari si cancellano).

$$\int_{-\pi}^{0} d\phi \sin(\pi+\phi) = -\cos(\pi+\phi)\Big|_{-\pi}^{0} = 2. \text{ Inoltre, } \int_{0}^{\pi} d\phi \sin\phi = -\cos\phi\Big|_{0}^{\pi} = 2$$

Quindi $\vec{E}(0,0,0) = \frac{2k\lambda}{R}\hat{y} - \frac{4k\lambda}{R}\hat{y} = -\frac{2k\lambda}{R}\hat{y}$

$$\varphi(0,0,0) = \oint \frac{k\lambda dl}{r'} = \int_{-\pi}^{0} \frac{k\lambda R d\phi}{R} + 2\int_{R/2}^{R} \frac{k\lambda dx}{x} + \int_{0}^{\pi} \frac{k\lambda (R/2) d\phi}{R/2}$$

$$= 2\pi k\lambda + 2k\lambda \ln 2 = 2k\lambda(\pi + \ln 2)$$

Quesito 1.2
Una sfera isolante ha al suo interno un cavita' sferica con centro distante d dal centro dalla sfera. Chiamati R e R0 i raggi della sfera e della cavita' e noto che sulla sfera e' distribuita in modo uniforme la carica totale Q = 100 nC. Si calcoli il campo elettrico in ogni punto della cavita'.
Si usino i valori R=50cm, R0=20cm, d=5cm. Si calcoli la differenza di potenziale tra il centro della cavita' e il centro della sfera isolante.
Il campo elettrico si trova come sottrazione del campo elettrico E1 interno a una distribuzione di carica sferica omogenea con densita' ρ0 e di E2 prodotto da una sfera di raggio R0 con densita' -ρ0; esso risulta

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 \vec{d}}{3\epsilon_0} \text{ dove } \rho_0 = Q/\left(\frac{4}{3}\pi(R^3 - R_0^3)\right) = 10^{-7}C/\left(\frac{4}{3}\pi(0.5^3 - 0.2^3)\text{m}^3\right)$$

$$= 2.04 \times 10^{-7}\ \text{C/m}^3.$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 \vec{d}}{3\epsilon_0} = \frac{2\times 10^{-7} \times 0.05}{3 \times 8.85 \times 10^{-12}}\hat{d} = 377\ \text{V/m}\ \hat{d}$$

$$\varphi(O') - \varphi(O) = \varphi_1(O') - \varphi_1(O) + \varphi_2(O') - \varphi_2(O) = -\int_{O}^{O'} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} - \int_{O}^{O'} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r}.$$

$$-\int_{O}^{O'} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} = -\int_{0}^{d} \frac{\rho_0 \vec{r}}{3\epsilon_0} \cdot d r \hat{r} = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\frac{d^2}{2}$$

$$-\int_{O}^{O'} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \int_{O'}^{O} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \int_0^{R_0} \frac{(-\rho_0)}{3\epsilon_0} \vec{r'} \cdot dr'\hat{r}' + \int_{R_0}^{R-R_0} \frac{(-k\rho_0 4R_0^3\pi/3)}{r'^2} \hat{r}' \cdot dr'\hat{r}' =$$

$$-\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\frac{R_0^2}{2} + \frac{\rho_0 R_0^3}{3\epsilon_0(R-R_0)} - \frac{\rho_0 R_0^3}{3\epsilon_0 R_0}$$

$$\varphi(O') - \varphi(O) = -\frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\left(\frac{d^2}{2} + \frac{3R_0^2}{2} + \frac{R_0^3}{R-R_0}\right) =$$

$$-\frac{377}{0.05}\left(25 \times 10^{-4} + 1.5 \times 0.04 + 0.008/0.3\right) = 672 \text{ V}$$

Quesito 1.3

Si calcoli il campo elettrico prodotto da una distribuzione sferica di carica con raggio R e con densità $\rho = \rho_0 r/R$ in tutti i punti dello spazio. Quale energia cinetica deve possedere una particella puntiforme di carica q0 dello spesso segno di ρ_0 che parte da distanza 4R per poter raggiungere il centro della distribuzione sferica ?

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 R}\hat{r} & r \leq R \\ \frac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r^2}\hat{r} & r > R \end{cases}$$

$$E_k^{min}(4R) = E_p^f - E_p^i = q_0\varphi(0) - q_0\varphi(4R) = q_0\Big(\varphi(0) - \varphi(R) + \varphi(R) - \varphi(4R)\Big) =$$

$$\frac{q_0\rho_0 R^2}{12\epsilon_0} + \frac{q_0\rho_0 R^2}{4\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{4R}\right) = \frac{13}{48} q_0\rho_0 R^2$$

Quesito 1.4

Si calcoli il campo elettrico e il potenziale elettrostatico prodotto in ogni punto dello spazio da uno strato di carica, infinitamente esteso, di spessore d=2cm, con densita' volumetrica ρ_0. Si adotti un sistema di riferimento in cui l'asse z e' perpendicolare allo strato e ha origine al centro dello spessore. Si scelga di fissare a zero il valore del potenziale elettrostatico al centro dello spessore, ossia: $\phi(z=0) = 0$. Qual e' la densita' superficiale di carica equivalente ?

Simmetria traslazione in x e y => $\vec{E} = E(z)\hat{z}; \quad E(-z) = -E(z)$

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho d}{2\epsilon_0}\hat{z} & z > d/2 \\ \frac{\rho z}{\epsilon_0}\hat{z} & -d/2 < z < d/2 \\ -\frac{\rho d}{2\epsilon_0}\hat{z} & z < -d/2 \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} & |z| < d/2 \\ -\frac{\rho d|z|}{2\epsilon_0} + \frac{\rho d^2}{8\epsilon_0} & |z| \geq d/2 \end{cases}$$

La densita' superficiale di carica equivalente e' $\sigma = \rho d$

Quesito 1.5

Si calcoli il campo elettrico prodotto da una distribuzione sferica di carica con raggio R e con densità $\rho = \rho_0 r/R$ in tutti i punti dello spazio. Quale energia cinetica deve possedere una particella puntiforme di carica q0 dello spesso segno di ρ_0 che parte da distanza 2R per poter raggiungere il centro della distribuzione sferica ?

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0 R}\hat{r} & r \leq R \\ \dfrac{\rho_0 R^3}{4\epsilon_0 r^2}\hat{r} & r > R \end{cases}$$

$$E_k^{min}(2R) = E_p^f - E_p^i = q_0\varphi(0) - q_0\varphi(2R) = q_0\Big(\varphi(0) - \varphi(R) + \varphi(R) - \varphi(2R)\Big) =$$

$$\frac{q_0\rho_0 R^2}{12\epsilon_0} + \frac{q_0\rho_0 R^2}{4\epsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) = \frac{5}{24}q_0\rho_0 R^2$$

Quesito 1.6

Si calcoli il campo elettrico e il potenziale elettrostatico prodotto in ogni punto dello spazio da una sferetta di raggio R = 1 cm uniformemente carica, su cui e' depositata un carica complessiva Q_0 = 10 nC, che di trova al centro della cavita' di un conduttore sferico su cui e' depositata la carica Q_c= -20 nC di raggio interno Ri = 3 cm e raggio esterno Re = 5 cm. Si calcoli la densita' superficiale di carica sulle superfici della sfera conduttrice cava.

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{Q_0 + Q_c}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} & r > R_e \\ \vec{0} & R_i < r < R_e \\ \dfrac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r} & R < r < R_i \\ \dfrac{Q_0 r}{4\pi\epsilon_0 R^3}\hat{r} & r < R \end{cases}$$

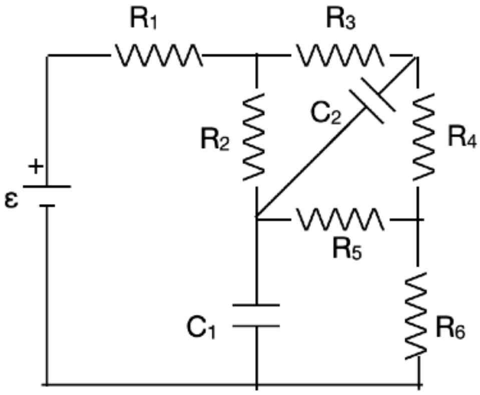
Dal teorema di Coulomb

$$\sigma_i = -\epsilon_0|\vec{E}(R_i)| = -\frac{Q_0}{4\pi R_i^2} = -\frac{10^{-8}}{4\pi \times 9 \times 10^{-4}}\mathrm{C/m^2} = \text{-8.8 x } 10^{-7}\ \mathrm{C/m^2}$$

$$\sigma_e = \epsilon_0|\vec{E}(R_e)| = \frac{Q_0 + Q_c}{4\pi R_e^2} = -\frac{10^{-8}}{4\pi \times 25 \times 10^{-4}}\mathrm{C/m^2} = \text{-3.2 x } 10^{-7}\ \mathrm{C/m^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{Q_0 + Q_c}{4\pi\epsilon_0 r} & r > R_e \\ \dfrac{Q_0 + Q_c}{4\pi\epsilon_0 R_e} & R_i < r < R_e \\ \dfrac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r} - \dfrac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_i} - \dfrac{1}{R_e}\right) + \dfrac{Q_c}{4\pi\epsilon_0 R_e} & R < r < R_i \\ -\dfrac{Q_0 r^2}{8\pi\epsilon_0} + \dfrac{3Q_0}{8\pi\epsilon_0 R} - \dfrac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_i} - \dfrac{1}{R_e}\right) + \dfrac{Q_c}{4\pi\epsilon_0 R_e} & r < R \end{cases}$$

Quesito 2.1
Si consideri il circuito in figura che opera da molto tempo. Si calcoli la potenza erogata dal generatore, la potenza dissipata nel resistore R_6 e l'energia accumulata nel condensatore C_2.



Si consideri: R3 = R5 = 2.5 kΩ, ε = 100 V, R4 = R2 = 5 kΩ, $C_1 = C_2$ = 50 pF, R1 = R6 = 1kΩ.

$$R_{eq} = R_1 + R_6 + \frac{(R_3 + R_4)(R_2 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = 5.75\ \text{k}\Omega$$

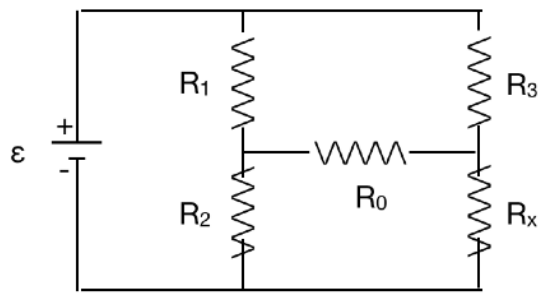
Nota R3+R4 = R2+R5, quindi la corrente dal generatore, $i_g = \epsilon / R_{eq} = 17.4\ \text{mA}$,

al nodo tra R1, R2 e R3 si divide in due parti uguali $i_2 = 8.7\ \text{mA}$. La potenza erogata e'

$P_{erog} = \epsilon^2 / R_{eq} = 1.74\ \text{W}$, la potenza dissipata su R6 e' $P_{R_6} = R_6 \frac{\epsilon^2}{R_{eq}^2} = \frac{R_6}{R_{eq}} P_{erog} = 0.30\ \text{W}$.

La differenza di potenziale ai capi di C2 e' $\Delta V_{C_2} = -i_2 R_3 + i_2 R_5 = 21.7\ \text{V}$. Pertanto l'energia immagazzinata in C2 e' $U_{C_2} = V^2 C/2 = 11.8\ \text{nJ}$.

Quesito 2.2
Nel circuito in figura il valore della resistenza Rx può essere regolato. Noto il valore della f.e.m. e le resistenze di tutti gli altri resistori, è possibile scegliere Rx in modo tale che la corrente che scorre nel resistore R_0 sia nulla.
In tale condizione si stabilisca quanta potenza e' dissipata sul resistore Rx.
Si utilizzino i valori $R_1 = 100\ \Omega$, $R_2 = 500\ \Omega$, $R_3 = 300\ \Omega$, $R_0 = 100\ \Omega$, $\varepsilon = 20$ V.



$i_1 R_1 = i_3 R_3$ assicura che in R0 non scorra corrente (cosi' la ddp ai capi di R0 e' 0). Ma $i_3 = i_1 \frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_x}$. Quindi $R_x = R_2 R_3 / R_1$ = 1.5 kΩ se in R0 non scorre corrente.

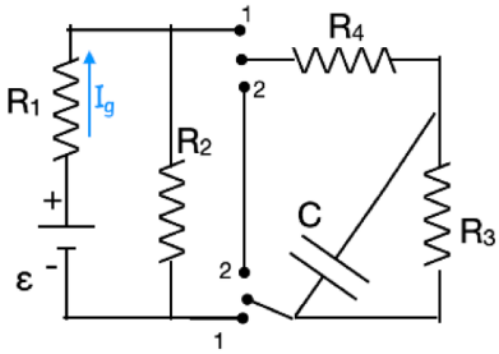
$$R_{eq} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_X)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_X} = 450\ \Omega. \qquad i_g = 20/450\ \text{A} = 44.4\ \text{mA},$$

$$\epsilon = (R_1 + R_2) i_1; \quad i_1 = 20\ \text{V}/600\ \Omega = 33\ \text{mA}$$

$$\epsilon = (R_3 + R_x) i_3; \quad i_3 = 20\ \text{V}/1800\ \Omega = 11\ \text{mA}$$

$$P_{R_X} = R_X i_3^2 = 185\ \text{mW}$$

Quesito 2.3
Si consideri il circuito in figura che opera da molto tempo con gli interruttori nelle posizioni 1. Si calcoli la potenza dissipata nel resistore R_1 e l'energia accumulata nel condensatore. Ad un certo istante di tempo gli interruttori si spostano nelle posizioni 2 contemporaneamente. Con quale andamento nel tempo si scaricherà il condensatore ? Si consideri: R1 = R2 = R3 = 1 kΩ, ε = 10 V, R4 = 2 kΩ, C = 100 pF.



$R_{eq} = R_1 + \dfrac{(R_3+R_4)R_2}{R_2+R_3+R_4} = 1.75\ \mathrm{k\Omega}$ quindi

$i_g = \epsilon / R_{eq} = 5.7\ \mathrm{mA}.$

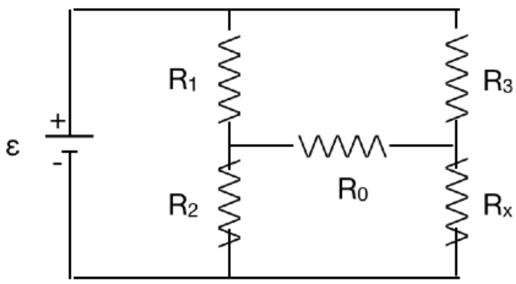
$i_g = i_2 + i_3, \quad i_2R_2 = i_3(R_3+R_4)$ pertanto $i_3 = i_g / \left(1 + \dfrac{R_3+R_4}{R_2}\right) = 1.42\ \mathrm{mA}.$

La potenza dissipata su R1 e' $P_{R_1} = i_g^2 R_1 = 32.7\ \mathrm{mW}.$

$\Delta V_C = 1.42\ \mathrm{V}, \quad U_c = V^2C/2 = 100\ \mathrm{pJ}.$

Nella seconda fase la corrente che scorrera' dalla prima alla seconda armatura del condensatore avra' l'andamento $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$ dove $\tau = \dfrac{R_3R_4}{R_3+R_4}C = 66.7\ \mathrm{ns}$

Quesito 2.4
Nel circuito in figura il valore della resistenza Rx può essere regolato. Noto il valore della f.e.m. e le resistenze di tutti gli altri resistori, è possibile scegliere Rx in modo tale che la corrente che scorre nel resistore R_0 sia nulla.
In tale condizione si stabilisca quanta potenza e' dissipata sul resistore Rx.
Si utilizzino i valori *R_1 =200 Ω, R_2 = 500 Ω, R_3 = 500 Ω, R_0 = 300 Ω, ε = 10 V.*

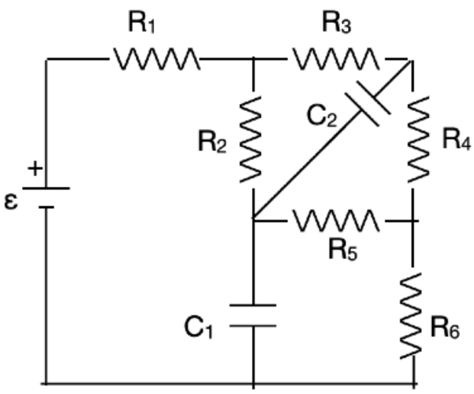


$i_1R_1 = i_3R_3$ assicura che in R0 non scorra corrente. In questo modo infatti la differenza di potenziale ai capi di R0 e' nulla. Ma $i_3 = i_1 \dfrac{R_1+R_2}{R_3+R_x}$. Quindi $R_x = R_2R_3/R_1$ = 1.25kΩ se in R0 non scorre corrente.

$R_{eq} = \dfrac{(R_1+R_2)(R_3+R_X)}{R_1+R_2+R_3+R_X} = 500\ \Omega.$ $\qquad i_g = 10/500\ \mathrm{A} = 20\ \mathrm{mA},$

$i_3 = i_g / \left(1 + \dfrac{R_1+R_2}{R_3+R_x}\right) = 14.3\ \mathrm{mA}$ $\qquad P_{R_X} = R_X i_3^2 =$ 0.36 mW

Quesito 2.5
Si consideri il circuito in figura che opera da molto tempo. Si calcoli la potenza erogata dal generatore, la potenzia dissipata nel resistore R_1 e l'energia accumulata nel condensatore C_1.



Si consideri: R3 = R5 = 2.5 kΩ, ε = 100 V, R4 = R2 = 5 kΩ, $C_1 = C_2$ = 50 pF, R1 = R6 = 1kΩ.

$$R_{eq} = R_1 + R_6 + \frac{(R_3 + R_4)(R_2 + R_5)}{R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = 5.75\ \mathrm{k\Omega}$$

Nota R3+R4 = R2+R5, quindi la corrente dal generatore, $i_g = \epsilon / R_{eq} = 17.4\ \mathrm{mA}$,

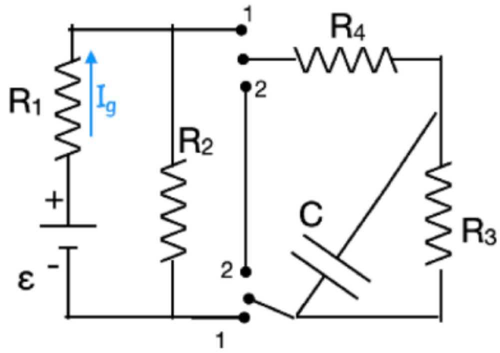
al nodo tra R1, R2 e R3 si divide in due parti uguali $i_2 = 8.7\ \mathrm{mA}$. La potenza erogata e'

$P_{erog} = \epsilon^2 / R_{eq} = 1.74\ \mathrm{W}$, la potenza dissipata su R1 e' $P_{R_1} = R_1 \frac{\epsilon^2}{R_{eq}^2} = \frac{R_1}{R_{eq}} P_{erog} = 0.30\ \mathrm{W}$.

La differenza di potenziale ai capi di C1 e' $\Delta V_{C_1} = i_2 R_5 + i_g R_6 = 39.15\ \mathrm{V}$. Pertanto l'energia immagazzinata in C2 e' $U_{C_2} = V^2 C/2 = 38.3\ \mathrm{nJ}$.

Quesito 2.6

Si consideri il circuito in figura che opera da molto tempo con gli interruttori nelle posizioni 1. Si calcoli la potenza dissipata nel resistore R_1 e l'energia accumulata nel condensatore. Ad un certo istante di tempo gli interruttori si spostano nelle posizioni 2 contemporaneamente. Con quale andamento nel tempo si scaricherà il condensatore ? Si consideri: R3 = R4 = 2.5 kΩ, ε = 100 V, R1 = R2 = 5 kΩ, C = 50 pF.



$$R_{eq} = R_1 + \frac{(R_3 + R_4)R_2}{R_2 + R_3 + R_4} = 7.5\ \mathrm{k\Omega} \text{ quindi}$$

$i_g = \epsilon / R_{eq} = 13.3\ \mathrm{mA}$.

$i_g = i_2 + i_3, \quad i_2 R_2 = i_3 (R_3 + R_4)$ pertanto $i_3 = i_g / \left(1 + \frac{R_3 + R_4}{R_2}\right) = 6.67\ \mathrm{mA}$.

La potenza dissipata su R1 e' $P_{R_1} = i_g^2 R_1 = 880\ \mathrm{mW}$.

$\Delta V_C = 16.7\ \mathrm{V}, \quad U_c = V^2 C/2 = 6.95\ \mathrm{nJ}$.

Nella seconda fase la corrente che scorrera' dalla prima alla seconda armatura del condensatore avra' l'andamento $i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$ dove $\tau = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} C = 62.5\ \mathrm{ns}$

Quesito 3 .1
Si calcoli il coefficiente di mutua induzione di un solenoide di parametri r, L>>r, n con asse parallelo all'asse z e una spira circolare nel piano xy di raggio r0 < r con centro sull'asse del solenoide. Se la spira e' percorsa da una corrente variabile nel tempo come $I(t) = i_o e^{-t/\tau}$ e la resistenza delle spire del solenoide e' R, qual e' la corrente indotta nel solenoide ?

$\Phi_{\gamma_{r_0}}(\overrightarrow{B}_{sol}) = \pi r_0^2 \mu_0 i_{sol} n$

Quindi $M = \pi r_0^2 \mu_0 n$

Allora $\Phi_{sol}(\overrightarrow{B}_\gamma) = M\ I(t)$

La corrente indotta nel solenoide sara'

$$i_{ind}^{sol} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_{sol}(\overrightarrow{B}_\gamma)}{dt} = -\frac{M}{R}\frac{dI(t)}{dt}$$

$$i_{ind}^{sol} = \frac{\pi r_0^2 \mu_0 n\ i_0}{R\tau} e^{-t/\tau}$$

Quesito 3.2
In una regione dello spazio sono presenti i campi $\overrightarrow{E} = -5 \times 10^4\ \mathrm{V/m}\ \hat{z}$ e $\overrightarrow{B} = -0.02\ \mathrm{T}\ \hat{x}$.
Elettroni che viaggiano in direzione $\hat{y}$ non sono deviati se la loro velocita' assume un determinato valore, e pertanto questa configurazione di campi si comporta da selettore di velocita'.
Si calcoli la velocita' selezionata e l'energia cinetica, in elettronvolt, degli elettroni che attraversano il selettore senza essere deflessi. Se questi elettroni, all'uscita dal filtro di velocita', entrano in una regione in cui si ha un campo magnetico uniforme di intensita' pari a 10^{-4} T, che forma un angolo di 30 gradi con la velocita' iniziale degli elettroni. Si determini in raggio di curvatura e il passo della traiettoria degli elettroni.

Chiamato e il valore assoluto della carica dell'elettrone, si ha che gli elettroni sono soggetto alla forza

$\overrightarrow{F} = -eE_0\hat{z} - ev\hat{y} \wedge B_0\hat{x} = -eE_0\hat{z} + evB_0\hat{z}$

Se $v = E_0/B_0$ = 2.5 x 10^6 m/s gli elettroni proseguono il loro cammino indeflessi, in quanto la risultante delle forze e' nulla.

$E_k = mv^2/2 = \mathrm{X} \times e \times 1\ \mathrm{V} = \dfrac{mv^2}{2e}$ eV $= 10^{-30} \times 6.25 \times 10^{12}/(2 \times 1.6 \times 10^{-19}) = 19.5$ eV.

La component della velocita' perpendicolare al campo magnetico $v_\mathrm{T} = 2.5 \times 10^6 \times \sin 30° = 1.25 \times 10^6$ m/s determinerà un moto la cui proiezione sul piano perpendicolare al campo magnetico sara' un moto circolare uniforme con raggio di curvatura dato da $mv_\mathrm{T}^2/R = ev_\mathrm{T}B_0$ quindi $R = \dfrac{mv_\mathrm{T}}{eB_0} = \dfrac{10^{-30} \times 1.25 \times 10^6}{1.6 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^{-2}}$ = 0.39 x 10^{-3} m = 390 μm.

Il periodo per moto circolare e' T=$\dfrac{2\pi R}{v_\mathrm{T}} = \dfrac{2\pi m}{eB_0} = \dfrac{2\pi \times 10^{-30}}{1.6 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^{-2}}$ =1.96 x 10^{-9} s.

Il passo e' quindi p = $v_{//}T = 2.5 \times 10^6 \times \cos 30° \times 1.96 \times 10^{-9} = 4.3 \times 10^{-3}$ m.

Quesito 3.3
Atomi di Elio ionizzati una o due volte (a cui e' stato sottratto uno o entrambi gli elettroni) sono introdotti con velocità trascurabile in una regione in cui e' presente un campo elettrico uniforme pari a 2kV/cm nella direzione di $\hat{y}$. Dopo una distanza di 30 cm al campo elettrico si sostituisce un campo magnetico $\overrightarrow{B} = 0.1\ \mathrm{T}\ \hat{z}$. Si discuta la traiettoria degli ioni nei due stati di carica e la differenza di curvatura tra di essi. Si determini la posizione del centro di curvatura delle traiettorie.
Gli ioni saranno accelerati da una differenza di potenziale pari a

$\Delta\varphi = Ed = 2 \times 10^3 \times 30 = 60$ kV

Quindi la loro energia cinetica finale sara' uguale a $\Delta U_p = e \times 60000 = 60\ \mathrm{keV}$ per gli atomi ionizzati una volta e 120 keV per gli atomi ionizzati due volte.
Quindi le velocita' con cui gli ioni entreranno nel campo magnetico uniforme saranno

$$\overrightarrow{v}_+ = \sqrt{\frac{2 \times 60000\ \mathrm{eV}}{m_{He}}}\hat{y} \text{ e } \overrightarrow{v}_{++} = \sqrt{\frac{2 \times 120000\ \mathrm{eV}}{m_{He}}}\hat{y}$$

$$\overrightarrow{v}_+ = \sqrt{\frac{2 \times 600 \times 1.6 \times 10^{-19}}{6.68 \times 10^{-27}}}\hat{y} = 1.7 \times 10^6 \text{ m/s } \hat{y}$$

$$\overrightarrow{v}_{++} = \sqrt{\frac{2 \times 1200\ \mathrm{eV}}{6.68 \times 10^{-27}}}\hat{y} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{v}_+ = 2.4 \times 10^6 \text{ m/s } \hat{y}$$

$R_+ = \dfrac{mv_+}{eB_0} = \dfrac{6.68 \times 10^{-27} \times 2.9 \times 10^6}{1.6 \times 10^{-19} \times 0.1} = 7.1 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} \Rightarrow C_+ = (-7.1\ \mathrm{mm},\ 0.,\ 0.)$ e' il centro di curvatura

$R_{++} = \dfrac{mv_{++}}{2eB_0} = R_+/\sqrt{2} = 5.0 \times 10^{-3}\ \mathrm{m} \Rightarrow C_{++} = (-5.0\ \mathrm{mm},\ 0.,\ 0.)$ e' il centro di curvatura

Quesito 3.4
Si calcoli il coefficiente di mutua induzione di un solenoide di parametri r, L>>r, n con asse parallelo all'asse z e una spira circolare nel piano xy di raggio r0 > r con centro sull'asse del solenoide. Se la spira e' percorsa da una corrente variabile nel tempo come $I(t) = i_o \sin(\omega t)$ e la resistenza delle spire del solenoide e' R=100 Ω, qual e' la corrente indotta nel solenoide ?

$\Phi_{\gamma_{r_0}}(\overrightarrow{B}_{sol}) = \pi r^2 \mu_0 i_{sol} n$
Quindi $M = \pi r^2 \mu_0 n$
Allora $\Phi_{sol}(\overrightarrow{B}_\gamma) = M\ I(t)$
La corrente indotta nel solenoide sara'

$$i_{ind}^{sol} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi_{sol}(\overrightarrow{B}_\gamma)}{dt} = -\frac{M}{R}\frac{dI(t)}{dt}$$

$$i_{ind}^{sol} = -\frac{\pi r^2 \mu_0 n \omega\ i_0}{R}\cos(\omega t)$$

Quesito 3.5
Atomi di Elio ionizzati una o due volte (a cui e' stato sottratto uno o entrambi gli elettroni) sono introdotti con velocità trascurabile in una regione in cui e' presente un campo elettrico uniforme pari a 5kV/cm nella direzione di $\hat{y}$. Dopo una distanza di 0.50 m al campo elettrico si sostituisce un campo magnetico $\overrightarrow{B} = 0.05\ \mathrm{T}\ \hat{z}$. Si discuta la traiettoria degli ioni nei due stati di carica e la differenza di curvatura tra di essi. Si determini la posizione del centro di curvatura delle traiettorie.
Gli ioni saranno accelerati da una differenza di potenziale pari a
$\Delta\varphi = Ed = 5 \times 10^3 \times 50 = 250\ \mathrm{kV}$
Quindi la loro energia cinetica finale sara' uguale a $\Delta U_p = e \times 250 \times 10^3 = 250\ \mathrm{keV}$ per gli atomi ionizzati una volta e 500 keV per gli atomi ionizzati due volte.
Quindi le velocita' con cui gli ioni entreranno nel campo magnetico uniforme saranno

$$\overrightarrow{v}_+ = \sqrt{\frac{2 \times 250\ \mathrm{keV}}{m_{He}}}\hat{y} \text{ e } \overrightarrow{v}_{++} = \sqrt{\frac{2 \times 500\ \mathrm{keV}}{m_{He}}}\hat{y}$$

$\overrightarrow{v}_+ = \sqrt{\frac{2 \times 250 \times 10^3 \times 1.6 \times 10^{-19}}{6.68 \times 10^{-27}}}\hat{y}$ = 0.34 x 10^7 m/s $\hat{y}$

$\overrightarrow{v}_{++} = \sqrt{\frac{2 \times 500 \text{ keV}}{m_{He}}}\hat{y} = \sqrt{2}\overrightarrow{v}_+$ = 0.49 x 10^7 m/s $\hat{y}$

$R_+ = \frac{mv_+}{eB_0} = \frac{6.68 \times 10^{-27} \times 0.34 \times 10^7}{1.6 \times 10^{-19} \times 0.05} = 2.8 \text{ m}$ => $C_+ = (-2.8 \text{ m}, 0., 0.)$ e' il centro di curvatura

$R_{++} = \frac{mv_{++}}{2eB_0} = \frac{R_+}{\sqrt{2}} = 2.0 \text{ m}$ => $C_{++} = (-2.0 \text{ m}, 0., 0.)$ e' il centro di curvatura

Quesito 3.6

In una regione dello spazio sono presenti i campi $\overrightarrow{E} = -2 \times 10^4 \text{ V/m } \hat{z}$ e $\overrightarrow{B} = -0.05 \text{ T } \hat{x}$. Elettroni che viaggiano in direzione $\hat{y}$ non sono deviati se la loro velocita' assume un determinato valore, e pertanto questa configurazione di campi si comporta da selettore di velocita'.
Si calcoli la velocita' selezionata e l'energia cinetica, in elettronvolt, degli elettroni che attraversano il selettore senza essere deflessi. Se questi elettroni, all'uscita dal filtro di velocita', entrano in una regione in cui si ha un campo magnetico uniforme di intensita' pari a 10^{-4} T, che forma un angolo di 60 gradi con la velocita' iniziale degli elettroni. Si determini in raggio di curvatura e il passo della traiettoria degli elettroni.

Chiamato e il valore assoluto della carica dell'elettrone, si ha che gli elettroni sono soggetto alla forza

$\overrightarrow{F} = -eE_0\hat{z} - ev\hat{y} \wedge B_0\hat{x} = -eE_0\hat{z} + evB_0\hat{z}$

Se $v = E_0/B_0$ = 0.4 x 10^6 m/s gli elettroni proseguono il loro cammino indeflessi, in quanto la risultante delle forze e' nulla.

$E_k = mv^2/2 = \text{X} \times e \times 1 \text{ V} = \frac{mv^2}{2e} \text{ eV} = 10^{-30} \times 0.16 \times 10^{12}/(2 \times 1.6 \times 10^{-19}) = 0.5 \text{ eV}.$

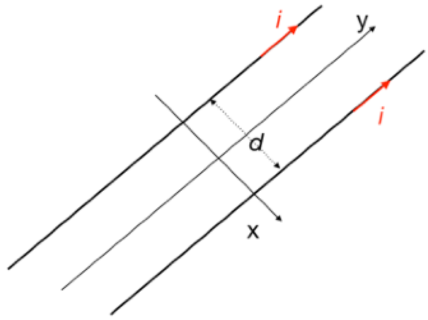
La componente della velocita' perpendicolare al campo magnetico $v_\text{T} = 0.4 \times 10^6 \times \sin 60° = 0.35 \times 10^6 \text{ m/s}$ determinerà un moto la cui proiezione sul piano perpendicolare al campo magnetico sara' un moto circolare uniforme con raggio di curvatura dato da $mv_\text{T}^2/R = ev_\text{T}B_0$ quindi $R = \frac{mv_\text{T}}{eB_0} = \frac{10^{-30} \times 0.35 \times 10^6}{1.6 \times 10^{-19} \times 5 \times 10^{-2}}$ = 0.044 x 10^{-3} m = 44 μm.

Il periodo per moto circolare e' T=$\frac{2\pi R}{v_\text{T}} = \frac{2\pi m}{eB_0} = \frac{2\pi \times 10^{-30}}{1.6 \times 10^{-19} \times 5 \times 10^{-2}}$ =0.78 x 10^{-9} s.

Il passo e' quindi p = $v_{//}T = 0.4 \times 10^6 \times \cos 60° \times 0.78 \times 10^{-9} = 0.16 \times 10^{-3} \text{ m}.$

Quesito 4.1

Si considerino due fili rettilinei paralleli separati dalla distanza *d* percorsi da corrente *i* uguale nello stesso verso. Si discuta come dipende la forza per unita' di lunghezza su ciascun filo dall'intensita' di corrente *i* e dalla distanza *d*. Inoltre, chiamato xy, il piano che contiene i fili, si calcoli il campo magnetico in ogni punto del piano.



Dall'applicazione della seconda formula di Laplace si ha che sul tratto infinitesimo del filo 1 che si trova a x=-d/2 ed e' percorso dalla corrente i1 nel verso di y-versore, agisce una forza pari a

$d\vec{F}_1 = i_1 dy\hat{y} \wedge \frac{\mu_0 i_2}{2\pi d}\hat{z}$ pertanto la forza su tutto il filo e' $\vec{F}_1 = L\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}\hat{x}$; la forza per unita' di lunghezza e' $\frac{d\vec{F}_1}{dy} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}\hat{x}$

Analogamente $\vec{F}_2 = -L\frac{\mu_0 i_2 i_2}{2\pi d}\hat{x}$.

Il campo magnetico in un punto generico del piano e' la somma dei campi di Biot svari prodotti dai due fili

$$\vec{B} = \begin{cases} -\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{i_1}{x+d/2} + \frac{i_2}{x-d/2}\right)\hat{z} & x > d/2 \\ -\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{i_1}{x+d/2} - \frac{i_2}{x-d/2}\right)\hat{z} & d/2 > x > -d/2 \\ -\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{i_1}{x+d/2} + \frac{i_2}{x-d/2}\right)\hat{z} & -d/2 > x \end{cases}$$

In particolare îl campo magnetico e' uscente dal piano della figura per x<-d/2, entrante per -d/2<x<0, uscente per 0<x<d/2 e infine entrance per x>d/2.

Quesito 4.2

Un cilindro C infinitamente lungo e con asse parallelo all'asse z ha al suo interno un cavita' cilindrica con asse distante d dall'asse di C. Chiamati R e R0 i raggi del cilindro e della cavita' e noto che il cilindro e' percorso da una densita' di corrente $\vec{J} = J_0\hat{z}$. Si calcoli il campo magnetico in ogni punto della cavita'. Immaginando ora il cilindro C omogeneo (in assenza della cavita') si calcoli il potenziale vettore in ogni punto dello spazio.

Il campo magnetico per simmetria cilindrica e' dipendente solo dalla distanza dall'asse e diretto come il versore φ: $\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$. Inoltre $\vec{A} = A(r)\hat{z}$

All'esterno di un cilindro omogeneo si ha

$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J_0 R^2}{2r}\hat{\phi}$, mentre all'intero $B(r)2\pi r = \mu_o J_0 \pi r^2$, quindi

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J_0 r}{2}\hat{\phi} = \frac{\mu_0 J_0 r}{2}\hat{z} \wedge \hat{r} = \frac{\mu_0 J_0}{2}\hat{z} \wedge \vec{r}$$

Quindi nella cavita' $\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 J_0}{2}\hat{z} \wedge \vec{r} - \frac{\mu_0 J_0}{2}\hat{z} \wedge \vec{r}' = \frac{\mu_0 J_0}{2}\hat{z} \wedge \vec{d}$ campo omogeneo contenuto nel piano xy e perpendicolare al vettore che congiunge gli asse del cilindro e della cavita'.

Calcoliamo Il flusso di B attraverso la superficie orientata come $\hat{\phi}$ che ha come bordo un percorso rettangolare che giace nel piano a cui appartiene l'asse del sistema di sorgenti, esterno alla distribuzione di corrente e con due lati paralleli all'asse a z = r_i e r_e > r_i.

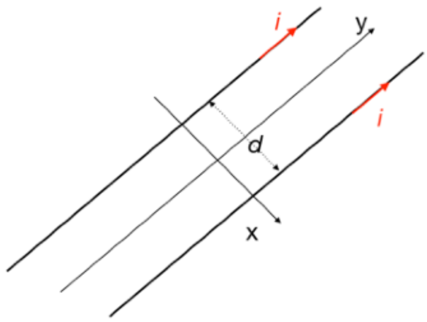
Questp flusso e' uguale alla circuitazione (in senso orario) di $\vec{A}$.

$A(r_i)l - A(r_e)l = \int_0^l dz \int_{r_i}^{r_e} dr \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi}\cdot ds\hat{\phi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} l \ln(r_e/r_i)$ dove I e' la corrente totale in questo caso $I = J_0 \pi R^2$.

Quindi $A(r > R) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(r/R)$

Quesito 4.3

Si considerino due fili rettilinei paralleli separati dalla distanza *d* percorsi da corrente *i* uguale e opposta. Si discuta come dipende la forza per unita' di lunghezza su ciascun filo dall'intensita' di corrente *i* e dalla distanza *d*. Inoltre, chiamato xy, il piano che contiene i fili, si calcoli il campi magnetico in ogni punto del piano.



Dall'applicazione della seconda formula di Laplace si ha che sul tratto infinitesimo del filo 1 che si trova a x=-d/2 ed e' percorso dalla corrente i1 nel verso di y-versore, agisce una forza pari a

$d\vec{F}_1 = i_1 dy\hat{y} \wedge \left(-\frac{\mu_0 i_2}{2\pi d}\right)\hat{z}$ pertanto la forza su tutto il filo e'

$\vec{F}_1 = -L\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}\hat{x}$; la forza per unita' di lunghezza e' $\frac{d\vec{F}_1}{dy} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}\hat{x}$

Analogamente $\vec{F}_2 = L\frac{\mu_0 i_2 i_2}{2\pi d}\hat{x}$.

Il campo magnetico in un punto generico del piano e' la somma dei campi di Biot svari prodotti dai due fili

$$\vec{B} = \begin{cases} -\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{i_1}{x+d/2} - \frac{i_2}{x-d/2}\right)\hat{z} & x > d/2 \\ -\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{i_1}{x+d/2} + \frac{i_2}{x-d/2}\right)\hat{z} & d/2 > x > -d/2 \\ -\frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{i_1}{x+d/2} - \frac{i_2}{x-d/2}\right)\hat{z} & -d/2 > x \end{cases}$$

In particolare îl campo magnetico e' uscente dal piano della figura per x<-d/2, entrante per -d/2<x<0, entrante per 0<x<d/2 e infine uscente per x>d/2.

Quesito 4.4

Un cilindro C infinitamente lungo e con asse parallelo all'asse z ha al suo interno un cavita' cilindrica coassiale. Chiamati R e R0 i raggi del cilindro e della cavita' e noto che il cilindro e' percorso da una densita' di corrente $\vec{J} = J_0\hat{z}$. Si calcoli il campo magnetico in ogni punto dello spazio.

Immaginando ora il cilindro C omogeneo (in assenza della cavita') si calcoli il potenziale vettore a distanza 2R dall'asse della distribuzione assumendo che il potenziale vettore sia nullo sulla superficie esterna della distribuzione (r=R).

Il campo magnetico per simmetria cilindrica e' dipendente solo dalla distanza dall'asse e diretto come il versore ϕ: $\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$. Inoltre $\vec{A} = A(r)\hat{z}$

All'esterno, applicando Ampere si ha $B(r)2\pi r = \mu_0 J_0 \pi(R^2 - R_0^2) = \mu_0 I$ dove $I = J_0\pi(R^2 - R_0^2)$.

Quindi $\vec{B}(r) = \dfrac{\mu_0 J_0(R^2 - R_0^2)}{2r}\hat{\phi}$

Per R0 < r < R , applicando Ampere$B(r)2\pi r = \mu_0 J_0 \pi(r^2 - R_0^2)$ quindi

$\vec{B}(r) = \dfrac{\mu_0 J_0(r^2 - R_0^2)}{2r}\hat{\phi}$.

Infine per r<R0 il campo e' nullo.

Calcoliamo Il flusso di B attraverso la superficie orientata come $\hat{\phi}$ che ha come bordo un percorso rettangolare che giace nel piano a cui appartiene l'asse del sistema di sorgenti, esterno alla distribuzione di corrente e con due lati paralleli all'asse a z = r_i e r_e > r_i.

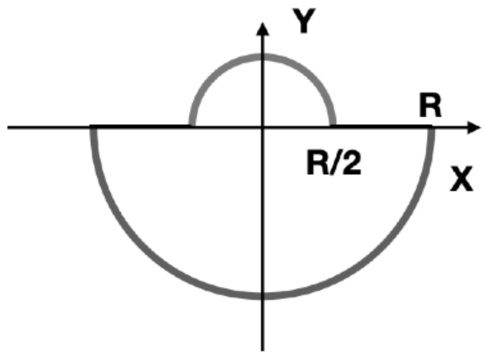
Questo flusso e' uguale alla circuitazione (in senso orario) di $\vec{A}$.

$A(r_i)l - A(r_e)l = \int_0^l dz \int_{r_i}^{r_e} dr \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{\phi}\cdot ds\hat{\phi} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi} l \ln(r_e/r_i)$ dove I e' la corrente totale in questo caso $I = J_0\pi R^2$.

Quindi $A(r > R) = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(r/R)$

Quesito 4.5

Considerato il circuito in figura si immagini che sia percorso da una corrente di 10 A in senso antiorario. Se R=5cm si calcoli il valore del campo magnetico nell'origine del sistema di riferimento che coincide con il centro di curvatura dei due tratti semicircolari.



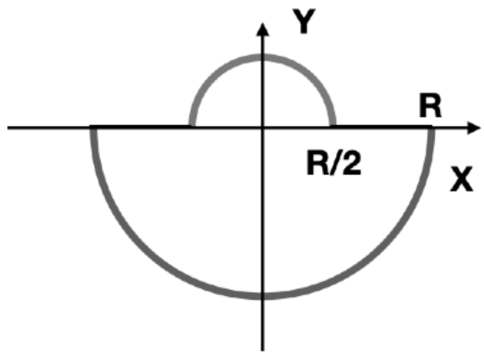
$$\vec{B}(0,0,0) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_\pi^{2\pi}\frac{iRd\phi\hat{\phi}\wedge(-R\hat{r})}{R^3} +$$

$$+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{i(R/2)d\phi\hat{\phi}\wedge(-R/2)\hat{r}}{(R/2)^3} = \frac{\mu_0}{4}\frac{i}{R}\hat{z} + \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{R}\hat{z} =$$

$$= \frac{3\times 4\pi \times 10^{-7}\times 10}{4\times 5\times 10^{-2}} = 1.88 \times 10^{-4}\ \mathrm{T}$$

Quesito 4.6

Considerato il circuito in figura si immagini che sia percorso da una corrente di 10 A in senso antiorario. Se R=5cm si calcoli la forza a cui e' soggetta la spira se lungo l'asse z e' collocato un filo di lunghezza infinita percorso dalla corrente di 10 A che scorre nel verso dell'asse z. La spira e' in equilibrio ?



Il campo magnetico prodotto dal filo di eq. x=0, y=0 e'

$\vec{B} = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\phi}$

La forza su un tratto di circuito percorso dalla corrente i_s e'

$d\vec{F} = i_s \, d\vec{l} \wedge \vec{B}$. Sui tratti semicircolari quindi $d\vec{l} \wedge \vec{B} = 0$ perche' i due vettori sono paralleli.
Sul tratto rettilineo a x>0 si ha

$$\vec{F}_{x>0} = i_s \int_{x=R}^{x=R/2} d\vec{l} \wedge \frac{\mu_0 i}{2\pi x}\hat{y} = -\, i_s \int_{x=R/2}^{x=R} dx\,\hat{x} \wedge \frac{\mu_0 i}{2\pi x}\hat{y} =$$

$$= -\frac{\mu_0 i i_s}{2\pi} \ln \frac{R}{R/2} = -\frac{\mu_0 i i_s}{2\pi} \ln 2 \; \hat{z}$$

Sul tratto rettilineo a x<0 si ha

$$\vec{F}_{x<0} = i_s \int_{x=-R/2}^{x=-R} d\vec{l} \wedge \frac{\mu_0 i}{2\pi x}\hat{y} = -\, i_s \int_{x=-R}^{x=-R/2} dx\,\hat{x} \wedge \frac{\mu_0 i}{2\pi x}\hat{y} = -\frac{\mu_0 i i_s}{2\pi} \ln \frac{R/2}{R} = \frac{\mu_0 i i_s}{2\pi} \ln 2 \; \hat{z}$$

Ciascun tratto rettilineo e' soggetto a una forza nella direzione z di modulo pari a
$4\pi \times 10^{-7} \times 10^2 \times \ln 2/(2\pi)$ = 13.9 μN ma i versi delle due forze sono opposti.

La forza complessiva sulla spira e' quindi nulla, tuttavia il tratto a x>0 e' spinto verso z<0 e il tratto a x<0 verso z>0. Esiste quindi un momento torcente delle forze che, in questa posizione, tende a ruotare la spira attorno all'asse y.

Quesito 5
Si discuta un argomento a scelta tra:

1) Metodi alternativi per il calcolo dell'energia elettrostatica di un sistema di cariche;
   Confronto delle relazioni (alternative e valide per uno stesso sistema di sorgenti continue o discrete) $U_e = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} dV' \rho(\vec{r}\,')\phi(\vec{r}\,')$ e $U_e = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{V_\infty} dV' \,|\vec{E}(\vec{r}\,')|^2$ (caso continuo).
2) Enunciare e giustificare la seconda formula di Laplace per correnti filiformi e volumetriche;
   Derivazione della relazione $d\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B}\, dV$ nel caso di correnti filiformi dalla sommatoria delle forze di Lorentz sui singoli portatori di carica
3) Ricavare il potenziale di dipolo per r >> d (distanza tra le due cariche).
   Dimostrazione
4) Condizioni di continuita' e discontinuita' delle componenti del campo elettrico nell'attraversamento di uno strato superficiale di carica con densita' σ.
   Dimostrazione

RICORDA:

ε_0 =8.85 · 10^{-12} C^2/Nm^2 = 8.85 · 10^{-12} F/m
μ_0 = 4π · 10^{-7} H/m,
k = 1/ (4 π ε_0)= 9 · 10^9 Nm^2/C^2
|e| = 1.6 · 10^{-19} C, m_e = 9.1 · 10^{-31} Kg, m_p = 1.67 · 10^{-27} Kg, M_{He} ≃4 m_p ; N_A = 6.022 x 10^{23} mol^{-1}
Campo $\vec{E}$ prodotto da una carica puntiforme: $\frac{kq}{r^2}\hat{r}$
Campo $\vec{E}$ e potenziale $\varphi(r,\vartheta)$ di dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$; $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$
Campo $\vec{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\vec{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;
Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV$; $d\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B}\, dV$

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}+\frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Divergenza $\nabla\cdot\mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$
Rotore $\nabla\times\mathbf{A}$	$(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\mathbf{x}}+$ $(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\mathbf{y}}+$ $(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\mathbf{z}}$	$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi}-\frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{\boldsymbol{\rho}}+$ $(\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial \rho})\hat{\boldsymbol{\phi}}+$ $\frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi})\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\hat{\mathbf{r}}+$ $\frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi))\hat{\boldsymbol{\theta}}+$ $\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l}=dx\hat{\mathbf{x}}+dy\hat{\mathbf{y}}+dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l}=d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}}+\rho d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}+dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l}=dr\hat{\mathbf{r}}+rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}+r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S}=dydz\hat{\mathbf{x}}+dxdz\hat{\mathbf{y}}+dxdy\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S}=\rho d\phi dz\hat{\boldsymbol{\rho}}+d\rho dz\hat{\boldsymbol{\phi}}+\rho d\rho d\phi\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S}=r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\mathbf{r}}+r\sin\theta dr d\phi\hat{\boldsymbol{\theta}}+rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Volume infinitesimo	$dv=dxdydz$	$dv=\rho d\rho d\phi dz$	$dv=r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$

Operatori differenziali ed elementi di linea, superficie e volume in coordinate cartesiane (sinistra), cilindriche (centro) e sferiche (destra).