

Raccolta di esercizi e problemi - Scritto 60 - a.a. 2023-2024

Quesito 1

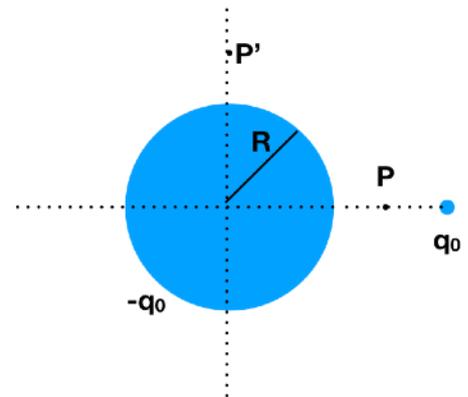
In figura è rappresentata una sfera conduttrice di raggio R su cui è depositata una carica complessiva $-q_0$ (con $q_0 > 0$).

A distanza $r = R$ dalla superficie della sfera si trova una carica puntiforme di valore q_0 .

Si calcoli:

- il campo elettrico nel punto P;
- il potenziale elettrostatico a cui si trova la sfera conduttrice, fissata la condizione $\phi = 0$ a distanza infinita dalla sfera conduttrice;
- Il potenziale elettrostatico nei punti P e P' (alla stessa distanza di P dal centro della sfera);
- la densità superficiale di carica nel punto della sfera più vicino alla carica puntiforme.

$R=10\text{cm}$, $q_0=1\text{nC}$



METODO GENERALE (lezione 12, https://sites.google.com/view/sspagnolodidattica/fis2_ingbiom_aa23-24_lezioni?authuser=0)

Quando un conduttore si trova in prossimità di cariche, o comunque immerso in un campo elettrico, e' soggetto al fenomeno dell'induzione elettrostatica. Perciò (indipendentemente dalla carica totale depositata sul conduttore) i portatori di carica si ridistribuiranno sulla superficie esterna per produrre un campo elettrico totale (dovuto alla distribuzione di carica superficiale e alle cariche esterne) nullo in tutti i punti interni al conduttore. Il campo elettrico in un punto nelle immediate vicinanze del conduttore sarà diretto come la normale (orientata verso l'esterno) alla superficie e la sua intensità (con segno, ossia la componente normale) moltiplicata per ϵ_0 sarà pari alla densità superficiale di carica indotta in quel punto. Quindi l'induzione elettrostatica rompe la simmetria sferica del conduttore. Il potenziale elettrostatico in ogni punto dello spazio esterno al conduttore soddisfa l'eq di Laplace con condizioni al contorno da:

- Il valore del potenziale o dalla carica sul conduttore;
- Il comportamento coulombiano nelle immediate vicinanze della carica esterna q_0
- Il potenziale nullo sulla superficie di contorno all'infinito.

Questo problema matematico, denominato di Dirichlet o Neumann (eq. di Laplace + condizioni al contorno), ammette soluzione unica. Pertanto se le stesse condizioni al contorno possono essere riprodotte con un sistema di sorgenti fittizie, differenti da quelle fisiche, il campo e il potenziale elettrostatico prodotti nella situazione reale (conduttore + cariche esterne) in tutti punti esterni al conduttore potranno essere calcolati a partire dal sistema di sorgenti fittizie. Il metodo delle cariche immagine, con cui si risolve questo problema, consiste nella identificazione di un sistema di cariche fittizie che riproduce esattamente il problema di Dirichlet o Neumann e nel calcolo del campo e potenziale prodotto dalle sorgenti fittizie.

Nel caso di una sfera conduttrice in prossimità di una carica puntiforme, il sistema di cariche fittizie e' costruito in piu' passi a seconda delle condizioni note sulla sfera conduttrice (1: potenziale noto e pari a zero, 2: potenziale noto ma non nullo, 3: carica nota).

Prima di tutto occorre garantire che la superficie S della sfera sia uno spazio equipotenziale. Si risolve prima il problema di avere potenziale pari a zero in tutti i punti di S .

Considerata una carica q' nel punto O' a distanza d dal centro O della sfera collocata lungo la congiungere $O-P_0$ (punto in cui si trova q_0) il potenziale dovuto al sistema fittizio di cariche composto da q' e q_0 sarà $Kq_0/r + kq'/r' = 0$.

Questa equazione descrive il luogo geometrico dei punti le cui distanze da O' e P_0 sono in un rapporto costante: $r/r' = -q_0/q'$, ossia un ellissoide. La sfera e' un caso speciale di ellissoide, per cui e' possibile scegliere d e q' in modo tale che l'ellissoide degenera coincida esattamente con S . Per determinare questi valori di d e q' imponiamo che l'eq. $r/r' = -q_0/q'$ sia rispettata dai punti A e B che sono i punti di S rispettivamente piu' vicino e piu' lontano da q_0 .

Quindi scriviamo due eq. in due incognite (*):

$$\begin{cases} -\frac{q_0}{q'} = \frac{R}{R-d} & \text{per A} \\ -\frac{q_0}{q'} = \frac{3R}{R+d} & \text{per B} \end{cases} \quad \text{che permettono di determinare le condizioni } q' = -q_0/2 \text{ e } d = R/2 \text{ che}$$

danno potenziale nullo sia tutti i punti di S . Quindi la sfera conduttrice a potenziale nullo + q_0 producono in tutti punti dello spazio (esterni al conduttore) lo stesso campo che e' prodotto da q_0 e q' (quest'ultima collocata in O'). Percio', considerata una superficie S' arbitraria che contiene interamente lo spazio della sfera ma non contiene q_0 , il flusso del campo elettrico attraverso S' e' pari a q'/ϵ_0 , applicando Gauss nel sistema di cariche fittizie, ed e' pari a Q_c (carica totale sul conduttore), applicando Gauss nel sistema reale del conduttore + q_0 . Se ne deduce che il valore di q' corrisponde al valore della carica totale sul conduttore.

Se il problema dato fornisce la condizione $\phi = \phi_0$ sul conduttore, piuttosto che $\phi = 0$, e' possibile riprodurre le condizioni al contorno con un sistema di cariche fittizie costituito da q_0 , q' (in O') e q'' in O , con q'' determinato dalla condizione: $\phi_0 = kq''/R$. Infatti, q' e q_0 generano potenziale nullo su tutti i punti di S , a cui si aggiunge il potenziale costante pari a ϕ_0 prodotto da q'' . In questo caso la carica totale sul conduttore sara' pari a $q''+q' = R\phi_0/k - q_0/2$.

Se il problema dato fornisce la condizione $Q_c = Q$, allora il sistema di cariche fittizie che riproduce le condizioni al contorno e' costituito da q_0 , q' (in O') e q'' in O , con $q'' = Q_c - q' = Q_c + q_0/2$. Il

conduttore in questo caso si trovera' al potenziale $\phi_c = k \frac{q''}{R} = k \frac{Q_c + q_0/2}{R}$.

(*) NOTA: le eq. nel caso piu' generale in cui R sia la distanza tra q_0 e la superficie S e a sia il raggio della sfera sono :

$$\begin{cases} -\frac{q_0}{q'} = \frac{R}{a-d} & \text{per A} \\ -\frac{q_0}{q'} = \frac{R+2a}{a+d} & \text{per B} \end{cases}$$

Nel caso di questo specifico problema si ha: $q_0 = 1\text{nC}$, $R = 0.1\text{ m}$, $a = R$, $Q_c = -q_0$, quindi il sistema di cariche immagine e' costituito da q_0 , q' (in O') e q'' in O , con $q' = -q_0/2$, $d = R/2$, $q'' = -q_0 + q_0/2 = -q_0/2$.

Quindi scelto un sistema di riferimento in cui l'origine e' in O , l'asse y passa per P_0 e l'asse z per il punto P' , si ha

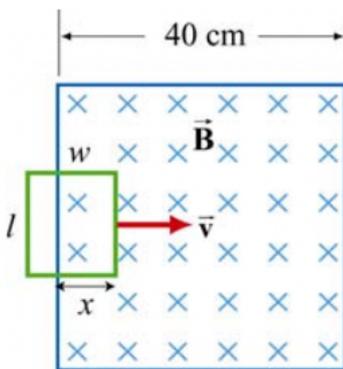
$$\begin{cases} \vec{E}(P) = k \left(\frac{q_0}{(R/2)^2} (-\hat{y}) + \frac{q'}{R^2} \hat{y} + \frac{q''}{(3R/2)^2} \hat{y} \right) = k \left(-\frac{4q_0}{R^2} - \frac{q_0}{2R^2} - \frac{2q_0}{9R^2} \right) \hat{y} = -\frac{85}{18} k \frac{q_0}{R^2} \hat{y} = -4.25 \text{ kV/m } \hat{y} \\ \phi_c = kq''/R = -k \frac{q_0}{2R} = -9 \times 10^9 \times 10^{-9} / 0.2 = -45 \text{ V} \\ \phi(P) = k \left(\frac{q_0}{R/2} + \frac{q'}{R} + \frac{q''}{3R/2} \right) = k \left(\frac{q_0}{R/2} - \frac{q_0}{2R} - \frac{q_0}{3R} \right) = -k \frac{q_0}{3R} = -30 \text{ V} \\ \phi(P') = k \left(\frac{q_0}{\sqrt{(3R/2)^2 + (2R)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(3R/2)^2 + (R/2)^2}} + \frac{q''}{3R/2} \right) = k \frac{q_0}{R} \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{\sqrt{10}} \right) = -22.5 \text{ V} \\ \sigma(A) = \epsilon_0 E_n(A) = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{q_0}{R^2} - \frac{q_0/2}{R^2/4} - \frac{q_0/2}{R^2} \right) = -\frac{q_0}{4\pi R^2} (1 + 2 + 1/2) = -\frac{7q_0}{8\pi R^2} = -28 \text{ nC/m}^2 \end{cases}$$

Nel caso della variante di problema proposto nel secondo compito: si ha: $q_0 = 1\text{nC}$, $R = 0.1\text{ m}$, $a = R$, $\phi_c = 100\text{ V}$, quindi il sistema di cariche immagine e' costituito da q_0 , q' (in O') e q'' in O , con $q' = -q_0/2$, $d = R/2$, $q'' = R \phi_c / k = 0.1 \times 100 / (9 \times 10^9) = 1.11 \text{ nC} = (10/9)q_0$.

Quindi scelto un sistema di riferimento in cui l'origine e' in O, l'asse y passa per P0 e l'asse z per il punto P', si ha

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{E}(P) &= k \left(\frac{q_0}{(R/2)^2} (-\hat{y}) + \frac{q'}{R^2} \hat{y} + \frac{q''}{(3R/2)^2} \hat{y} \right) = k \left(-\frac{4q_0}{R^2} - \frac{q_0}{2R^2} + \frac{40q_0}{81R^2} \right) \hat{y} = -4k \frac{q_0}{R^2} \hat{y} = -3.6 \text{ kV/m } \hat{y} \\ Q_c &= q'' + q' = (10/9 - 1/2)q_0 = 0.61 \text{ nC} \\ \varphi(P) &= k \left(\frac{q_0}{R/2} + \frac{q'}{R} + \frac{q''}{3R/2} \right) = k \left(\frac{q_0}{R/2} - \frac{q_0}{2R} + \frac{20q_0}{81R} \right) \\ \varphi(P') &= k \left(\frac{q_0}{\sqrt{(3R/2)^2 + (2R)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{(3R/2)^2 + (R/2)^2}} + \frac{q''}{3R/2} \right) \\ \sigma(B) &= \epsilon_0 E_n(B) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{q_0}{9R^2} - \frac{q_0/2}{9R^2/4} + \frac{10q_0/9}{R^2} \right) \end{aligned} \right.$$

Quesito 2



Una spira rettangolare, di lati $l=15 \text{ cm}$ e $w=12 \text{ cm}$, trasla a velocita' costante $\vec{v} = 5 \text{ cm/s } \hat{x}$ per effetto di forze esterne entrando in una regione, di estensione pari a 40 cm nella direzione x , in cui c'e' un campo magnetico diretto perpendicolarmente al piano della figura e entrante di modulo $B_0 = 0.2 \text{ T}$. Si calcoli e si faccia un grafico in funzione del tempo di

- 1) flusso del campo B concatenato con la spira;
- 2) forza elettromotrice indotta nella spira quadrata.

Se la spira conduttrice ha una resistenza ohmica pari a $R=10 \Omega$ e una sezione circolare dal diametro pari 0.5 mm si stimi la velocita' di deriva degli elettroni di conduzione quando la corrente indotta e' massima.

Cosa accadrebbe se non ci fosse nessuna forza esterna applicata e

\vec{v} fosse solo la velocita' iniziale nell'istante di tempo in cui la spira inizia a entrare nel campo magnetico ?

Quesito 3

Si consideri un cavo coassiale il cui conduttore interno ha raggio $a=2 \text{ mm}$, la guaina conduttrice esterna ha raggio $b=2a$ e spessore trascurabile e la lunghezza del cavo, che consideriamo rettilineo, $L = 3 \text{ m}$. I due conduttori sono attraversati da una corrente in verso opposto pari a 100 A .

- 1) si calcoli il campo magnetico in ogni punto dello spazio: $r < a$, $a < r < b$, $r > b$ (ossia all'esterno del sistema, si trascuri lo spessore della guaina);
- 2) Si calcoli il flusso concatenato con il circuito rappresentato dal cavo coassiale (suggerimento: il circuito attraverso il quale occorre calcolare il flusso del campo e' un rettangolo che ha i due lati piu' lunghi nello stesso piano dell'asse del cavo alla distanza a e b rispettivamente)
- 3) Si calcoli l'autoinduttanza del sistema e l'energia immagazzinata.

Quesito 4

Nel circuito in figura l'interruttore e' chiuso all'istante di tempo $t_0=0$.

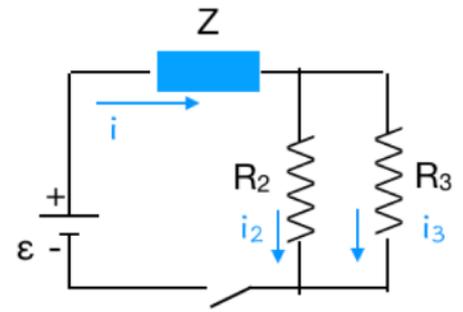
Si calcoli:

- 1) la corrente che scorre in R_2 immediatamente dopo la chiusura del circuito;

- 2) la corrente che scorre in R3 asintoticamente;
 - 3) l'andamento nel tempo della corrente i3
- Si utilizzino i valori $R_2 = 1000 \Omega$, $R_3 = 500 \Omega$, $\varepsilon = 50V$

nei due casi in cui

- A) Z sia un condensatore di capacita' $C = 10 \text{ nF}$
- B) Z sia una induttanza di valore $L = 10 \text{ mH}$



Quesito 5

Si discuta un argomento a scelta tra:

- 1) Sviluppo in serie di multipli del potenziale elettrostatico;
- 2) Equivalenza tra spire percorse da corrente e momenti di dipolo magnetico;
- 3) Il fenomeno dello schermo elettrostatico;
- 4) Si discuta come la legge di Gauss puo' essere applicata per determinare il campo elettrico prodotto da distribuzione di carica a simmetria cilindrica.

RICORDA:

$\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$,

$k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$, $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$, $M_{\text{He}} \approx 4 m_p$; $N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Campo \vec{E} e potenziale $\varphi(r,\vartheta)$ di dipolo: $\vec{E}(r,\vartheta) = k \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$; $\varphi(r,\vartheta) = k \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$

Campo \vec{B} prodotto da un dipolo magnetico: $\vec{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{m}}{r^5}$;

Formule di Laplace: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \wedge \vec{r}}{r^3} dV$; $d\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} dV$

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$	$\frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$
Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \hat{z}$	$\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right) \hat{z}$	$\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi)\right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \hat{\phi}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$	$d\mathbf{l} = d\rho\hat{\rho} + \rho d\phi\hat{\phi} + dz\hat{z}$	$d\mathbf{l} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin \theta d\phi\hat{\phi}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S} = dydz\hat{x} + dx dz\hat{y} + dx dy\hat{z}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz\hat{\rho} + \rho dz d\phi\hat{\phi} + \rho d\rho d\phi\hat{z}$	$d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi\hat{r} + r \sin \theta dr d\phi\hat{\theta} + r dr d\theta\hat{\phi}$
Volume infinitesimo	$dv = dx dy dz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$

Operatori differenziali ed elementi di linea, superficie e volume in coordinate cartesiane (sinistra), cilindriche (centro) e sferiche (destra).