Scritto 61 - aa.23-24

Quesito 1

Un condensatore sferico ha raggio della sfera conduttrice interna $R_i = a$ e raggio della cavita' della sfera concentrica esterna $R_e = b = 3a$. Lo spazio tra i due conduttori è vuoto. Si calcoli la capacità del condensatore e l'energia immagazzinata assumendo a = 2 cm e Q0= 1 nC accumulata sul conduttore interno. Entro quale distanza dal centro del sistema e' immagazzinato il 90% dell'energia elettrostatica totale.

Per calcolare la capacita' non e' necessario conoscere il valore della carica sulle due armature. Assumiamo Q sul conduttore interno (1) e assumiamo neutro quello esterno (1). Il campo elettrico nella cavita' (data la simmetria sferica sara') $\vec{E} = \frac{kQ}{r^2}\hat{r}$ con r = distanza dal centro di simmetria. La differenza di potenziale

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_i}^{r_e} d\vec{l} \cdot \vec{E} = \int_a^{3a} d\vec{l} \cdot \vec{E} = \int_a^{3a} dr\hat{r} \cdot \frac{kQ}{r^2}\hat{r} = -\left.\frac{kQ}{r}\right|_a^{3a} = \frac{kQ}{a} - \frac{kQ}{3a} = \frac{2kQ}{3a}$$

diventa zero quando Q, la carica sul conduttore interno, diventa 0. In altri termini la carica $Q_{1\to2}$ che bisogna spostare da 1 a 2 per annullare la differenza di potenziale tra i due e' $Q_{1\to2}$ = Q.

Quindi per definizione la capacita' e' C = $C = \frac{Q_{1\to2}}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{3a}{2k} = 6\pi\epsilon_0 a = \frac{3 \times 2 \times 10^{-2}}{2 \times 9 \times 10^9}$ = 3.33 pF.

Si noti che, chiamati genericamente r_i e r_e il raggio interno ed esterno della cavita', la capacità' di un conduttore sferico risulta C = $\frac{4\pi\epsilon_0\ r_i r_e}{r_e - r_i}$.

L'energia immagazzinata nel condensatore e'

$$U = \frac{1}{2}Q^2/C = 0.5 \times 10^{-18}/3.33 \times 10^{-12} = 0.15\ \mu\mathrm{J}.$$

Questa energia e' distribuita nello spazio (della cavita') con densita' volumetria $\frac{dU}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2}|\vec{E}|^2 = \frac{\epsilon_0 Q^2}{32\pi^2\epsilon_0^2 r^4}$

L'energia immagazzinata fino al raggio $\bar{r}$ e' data da $U_{r<\bar{r}} = \int_a^{\bar{r}} \frac{dU}{dV}dV = \int_a^{\bar{r}} \frac{\epsilon_0 Q^2}{32\pi^2\epsilon_0^2 r^4}\ 4\pi r^2\ dr$

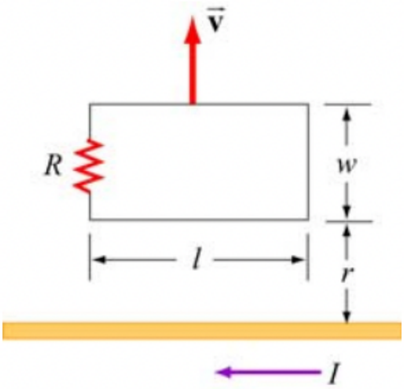
$$= \frac{\epsilon_0 Q^2}{8\pi\epsilon_0^2}\int_a^{\bar{r}} \frac{1}{r^2}\ dr = \frac{\epsilon_0 Q^2}{8\pi\epsilon_0^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\bar{r}}\right) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{\bar{r}}\right)$$

Se imponiamo che questa sia pari al 90% del totale cioè $0.9\frac{Q^2}{12\pi\epsilon_0 a} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{\bar{r} - a}{a\bar{r}}$ si ha $\frac{3}{5} = \frac{\bar{r} - a}{\bar{r}}$. Quindi $3\bar{r} = 5\bar{r} - 5a$, $\bar{r} = 5a/2$ = 5 cm.

Quesito 2

Si consideri la spira rettangolare, di resistenza

R=1 kΩ e dimensioni l=30 cm e w = 15 cm, in moto con velocità costante $v = 2.5$ m/s nella direzione indicata in figura in prossimità di un filo rettilineo infinitamente lungo e percorso dalla corrente I=100 A. Si calcoli la corrente che percorre la spira quando il lato piu' vicino al filo e' pari a r = 10 cm.



Si discuta l'andamento nel tempo della corrente. Si assuma che il moto (rettilineo uniforme) della spira inizi al tempo t=0 quando il lato piu' vicino al fio si trova a una distanza r0=1 cm.

Il moto della spira, descritto in termini della distanza x(t) del lato piu' vicino al filo dal filo stesso e' x(t>=0) = r0+vt a partire da t=0, e x(t<0)=r0.

Il filo percorso da corrente produce il campo $\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\phi}$ dove r e' la distanza dal filo.

All'istante di tempo generico t>0 il flusso del campo magnetico concatenato con la spira (orientata in senso orario) vale:

$$\Phi(\overrightarrow{B})(t) = \int_{z_0}^{z_0+l} dz \int_{x(t)}^{x(t)+w} dr\hat{\phi}\cdot\frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\phi} =$$

$$\frac{\mu_0 i l}{2\pi}\int_{x(t)}^{x(t)+w} dr\frac{1}{r} = \frac{\mu_0 i l}{2\pi}\ln\frac{x(t)+w}{x(t)} = \frac{\mu_0 i l}{2\pi}\big(\ln(x(t)+w) - \ln x(t)\big).$$

La corrente indotta nella spira e' quindi

$$i_{ind} = -\frac{\mu_0 i l}{2\pi R}\left(\frac{v}{x_0+vt+w} - \frac{v}{x_0+vt}\right) = \frac{\mu_0 i l}{2\pi R}\frac{vw}{(x_0+vt+w)(x_0+vt)}$$

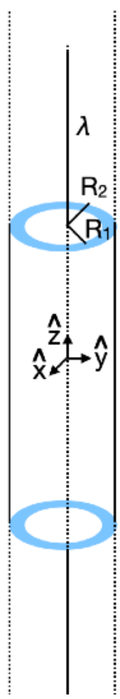
La corrente che percorre la spira quando il lato piu' vicino al filo e' alla distanza r = 10 cm vale

$$i_{ind}(r = 10\ \mathrm{cm}) = \frac{4\pi\times 10^{-7}\times 100\times 0.3}{2\pi\times 10^3}\frac{2.5\times 0.15}{0.25\times 0.1} = 90\ \mathrm{nA}.$$

Quesito 3

In figura e' rappresentato un filo infinito con densita' di carica uniforme λ e una distribuzione di corrente uniforme $\overrightarrow{J} = J_0\hat{z}$ compresa tra R_1 e R_2. Si calcoli la forza su una carica puntiforme q_0 con velocita' $\overrightarrow{v} = v_0\hat{r}$ a distanza r dall'asse per i casi:

1) $r < R_1$
2) $R_1 < r < R_2$
3) $R_2 < r$



Il filo al centro del sistema produce un campo elettrico data da $\overrightarrow{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$ dove r e' la distanza dall'asse. La densita' di corrente tra R_1 e R_2 genera invece un campo magnetico che, per simmetria dipendera' solo dalla distanza dall'asse e sara' diretto come $\hat{\phi}$.

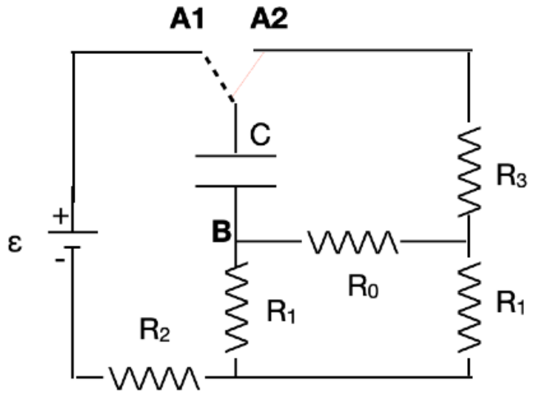
Il suo valore per $R_1 < r < R_2$ sara' dato (applicando Ampere a un circuito circolare coassiale) da $\oint_\gamma B(r)\hat{\phi}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{c_\gamma}$

Quindi $B(r) = \dfrac{\mu_0 J_0(r^2 - R_1^2)}{2r}$. All'esterno cambia solo la corrente concatenata, quindi in sintesi si ha

$$\vec{B} = \begin{cases} 0 & r < r_1 \\ \dfrac{\mu_0 J_0 (r^2 - R_1^2)}{2r}\hat{\phi} & R_1 < r < R_2. \\ \dfrac{\mu_0 J_0 (R_2^2 - R_1^2)}{2r}\hat{\phi} & R_2 < r \end{cases}$$

La forza sulla carica sara' $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$ quindi tenuto conto che $\hat{r} \wedge \hat{\phi} = \hat{z}$, si ha

$$\vec{F} = \begin{cases} \dfrac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} & r < r_1 \\ \dfrac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} + q\dfrac{v_0\mu_0 J_0 (r^2 - R_1^2)}{2r}\hat{z} & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r} + q\dfrac{v_0\mu_0 J_0 (R_2^2 - R_1^2)}{2r}\hat{z} & R_2 < r \end{cases}$$



Quesito 4

Nel circuito in figura l'interruttore è chiuso sulla posizione A1 nell'istante di tempo t_0=0 quando il condensatore è scarico. Si determini l'andamento nel tempo della corrente che scorre nel ramo del generatore, calcolandone l'intensità al tempo t_0. Si valuti dopo quanto tempo la corrente è ridotta al 10% del valore iniziale e la carica asintotica sulle armature del condensatore. Quando ormai il circuito funziona a regime, l'interruttore viene spostato su A2. Si calcoli dopo quanto tempo la carica sulle armature è ridotta al 50% del valore iniziale. Si calcoli quanta energia è dissipata sulla resistenza R_0 in questa fase (interruttore su A2). Si utilizzino i seguenti valori dei parametri: ε=50 V, R0 = 2kΩ, R1=500 Ω, R2=R3=1kΩ, C=200 pF.

Al tempo t=0 l'interruttore e' chiuso su A1 (fig con bordo rosso) => comincia a scorrere la corrente i_g nel ramo del generatore, del condensatore e di R2, la corrente i_0 nelle due resistenze R0 ed R1 (rinominata R_{12} per distinguerla dall'altra) e la corrente i_1 in R_{11}. Si ha quindi $i_g = i_0 + i_1$ e l'eq del circuito e' $\epsilon = \dfrac{Q(t)}{C} + R_{eq}i_g(t)$, dove $Q(t)$ e' la carica accumulata sull'armatura in alto del condensatore e $R_{eq} = R_2 + \dfrac{R_1(R_1 + R_0)}{2R_1 + R_0} = 1000 + \dfrac{500 \times 2500}{3000} = 1416.7\ \Omega.$

Quindi al tempo t=0 quando $Q(t)$=0 e

$\epsilon = R_{eq}i_g(t=0) = R_{eq}i_{g0}$,

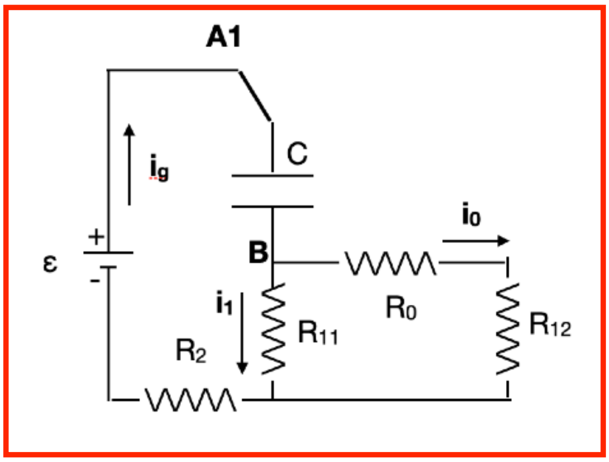
la corrente

$i_g(0) = \epsilon/R_{eq} = 50\ \mathrm{V}/1416.7\ \Omega = 35\ \mathrm{mA}$

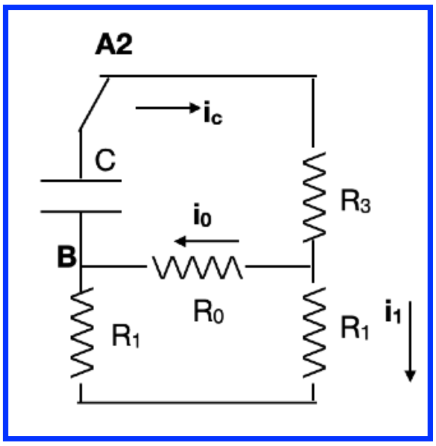
La soluzione dell'eq del circuito di carica sara'

$i_g(t) = i_{g0}e^{-t/\tau_c}$ con $\tau_c = R_{eq}C = 280\ \mathrm{ns}$. Quindi il tempo ΔT che dovrà' trascorrere affinché questa corrente sia ridotta al 10% del suo valore iniziale e' dato da $i_{g0}/10 = i_{g0}e^{-\Delta T/\tau_c}$, cioè

$\Delta T = -\tau_c \ln\dfrac{1}{10} = 645\ \mathrm{ns}.$



La carica asintotica sulle armature vale
Q= Cε = 10 nC.



Quando l'interruttore e' spostato su A2 nel circuito (si veda fig con bordo blu) il generatore sara' escluso e il condensatore si scarichera' secondo l'eq $\dfrac{Q(t)}{C} = R^s_{eq} i_c(t)$, dove $Q(t)$ e' la carica accumulata sull'armatura in alto del condensatore e $R^s_{eq} = R_3 + \dfrac{R_0(R_1+R_1)}{2R_1+R_0} = 1000 + \dfrac{2000 \times 1000}{3000} = 1670\ \Omega$
quindi il tempo caratteristico con cui si scarica il condensatore e si attenuano le correnti e' τ_s = 330 ns.
All'istante iniziale (subito dopo la chiusura dell'interruttore su A2) si ha $\dfrac{Q(0)}{C} = R^s_{eq} i_c(0) \quad \rightarrow i_c(0) = \epsilon / R^s_{eq}$.
La carica sulle armature del condensatore sara' ridotta alla meta' dopo un tempo $\Delta T_{1/2}$ con $\Delta T_{1/2} = -\tau_s \ln \dfrac{1}{2} = 229\ \mathrm{ns}$.
La corrente che scorre in R0 si orriene considerando che $i_0 R_0 = 2R_1 i_1 = 2R_1(i_c - i_0)$ quindi $i_0(R_0 + 2R_1) = 2R_1 i_c$ ossia $i_0 = \dfrac{2R_1}{R_0 + 2R_1} i_c$ e $i_1 = \dfrac{R_0}{R_0 + 2R_1} i_c$.
Tutta l'energia inizialmente accumulata nel condensatore $U = \dfrac{1}{2} C\epsilon^2$ = 250 nJ sara' dissipata sui resistori. Su R0 in particolare avremo un potenza istantanea dissipata pari a $P_{R_0} = R_0 i_0^2(t) = R_0 \left(\dfrac{2R_1}{R_0 + 2R_1}\right)^2 i_c^2(0)\ e^{-2t/\tau_s}$.
Ora $\displaystyle\int_0^{+\infty} dt e^{-2t/\tau_s} = -\frac{\tau_s}{2} e^{-2/\tau_s}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\tau_s}{2} = \frac{CR^s_{eq}}{2}$, quindi l'energia dissipata su R0 e'
$U_{R_0} = R_0 \left(\dfrac{2R_1}{R_0 + 2R_1}\right)^2 \left(\dfrac{\epsilon}{R^s_{eq}}\right)^2 \dfrac{CR^s_{eq}}{2} = R_0 \left(\dfrac{2R_1}{R_0 + 2R_1}\right)^2 \dfrac{\epsilon^2 C}{2R^s_{eq}}$ = 2000x(1/3)^2 50^2 x 200 x 10^{-12} / (2 x 1670) = **33.3 nJ**
Per verifica di consistenza calcoliamo anche l'energia dissipata sulle sue resistenze R1 e su R3
$U_{R_1} = 2R_1 \left(\dfrac{R_0}{R_0 + 2R_1}\right)^2 \left(\dfrac{\epsilon}{R^s_{eq}}\right)^2 \dfrac{CR^s_{eq}}{2}$ = 66.5 nC
$U_{R_3} = R_3 \left(\dfrac{\epsilon}{R^s_{eq}}\right)^2 \dfrac{CR^s_{eq}}{2}$ = 150 nJ
Osserviamo quindi che la somma di queste energie dissipate sui vari resistori coincide con l'energia inizialmente immagazzinata nel condensatore.

$$U_{R_3} + U_{2R_1} + U_{R_0} = \frac{\epsilon^2 C}{2R^s_{eq}} \left(\frac{4R_0 R_1^2}{(R_0 + 2R_1)^2} + \frac{2R_0^2 R_1}{(R_0 + 2R_1)^2} + R_3 \right)$$
$$= \frac{\epsilon^2 C}{2R^s_{eq}} \left(\frac{2R_0 R_1 (2R_1 + R_0)}{(R_0 + 2R_1)^2} + R_3 \right) = \frac{\epsilon^2 C}{2R^s_{eq}} \left(\frac{2R_0 R_1}{(R_0 + 2R_1)} + R_3 \right) = \frac{\epsilon^2 C}{2R^s_{eq}} R^s_{eq} = U = \frac{1}{2} C\epsilon^2.$$

Quesito 5
Si discuta un argomento a scelta tra:

1) Sviluppo in serie di multipoli del potenziale elettrostatico.
2) Come puo' essere realizzato un generatore di fem oscillante nel tempo.
3) Equazione di Poisson, derivazione e soluzione generale.
4) Caratteristiche generali dei conduttori all'equilibrio elettrostatico.

RICORDA:

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\ Nm^2/C^2$
$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg
$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg
$M_{He} \simeq 4\ m_p$

Campo $\overrightarrow{E}$ e potenziale $\varphi(r,\vartheta)$ di dipolo: $\overrightarrow{E}(r,\vartheta) = k\dfrac{3(\overrightarrow{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{p}}{r^5}$; $\varphi(r,\vartheta) = k\dfrac{\overrightarrow{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Campo $\overrightarrow{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\overrightarrow{B}(r,\vartheta) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3(\overrightarrow{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{m}}{r^5}$;

Formule di Laplace: $d\overrightarrow{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\overrightarrow{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV$; $d\overrightarrow{F} = \overrightarrow{J}\wedge\overrightarrow{B}\,dV$

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Divergenza $\nabla\cdot\mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla\times\mathbf{A}$	$(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\mathbf{x}} + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\mathbf{y}} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\mathbf{z}}$	$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{\boldsymbol{\rho}} + (\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho})\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi})\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi))\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S} = dydz\hat{\mathbf{x}} + dxdz\hat{\mathbf{y}} + dxdy\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz\hat{\boldsymbol{\rho}} + d\rho dz\hat{\boldsymbol{\phi}} + \rho d\rho d\phi\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\mathbf{r}} + r\sin\theta dr d\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} + rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Volume infinitesimo	$dv = dxdydz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$

Operatori differenziali ed elementi di linea, superficie e volume in coordinate cartesiane (sinistra), cilindriche (centro) e sferiche (destra).