Scritto 62 - aa.23-24

Quesito 1

Una distribuzione di carica cilindrica con densità uniforme ρ = 5 μC/m³ di raggio pari a 2 cm e lunghezza molto grande e' circondata per tutta la lunghezza da una guaina sottile cilindrica coassiale con raggio interno ed esterno pari a 3 cm e 2.2 cm di materiale conduttore elettricamente neutro. Si stabilisca qual e' la differenza di$\varphi(r_0) - \varphi(r_i) = \int_{r_0}^{r_i} d\vec{l} \cdot$ oli il campo elettrico in ogni punto dello spazio, all'interno e all'esterno della distribuzione.

Il sistema ha simmetria cilindrica pertanto il campo elettrico e il potenziale dipenderanno solo dalla distanza r dall'asse di simmetria e il campo elettrico sarà perpendicolare all'asse e radiale: $\varphi = \varphi(r)$; $\quad \vec{E} = E(r)\hat{r}$. Lo strato conduttore sara' equipotenziale, e' neutro, ma per effetto di induzione sulla superficie interna si depositerà una carica uguale e opposta alla carica del cilindrato interno; di conseguenza sulla superficie esterna ci sara' una quantità di carica complessiva uguale alla carica del cilindretto interno. In particolare, considerato un tratto del sistema di altezza h, e chiamati r_0, r_i, r_e i raggi della distribuzione di carica interna, il raggio intero ed esterno rispettivamente della guaina cilindrica, la carica Q0 del cilindretto sara'

$Q_0 = \int_{0<z<h} dz \int_{r<R_i} dr \int_0^{2\pi} d\phi\rho = \rho\pi r_0^2 h$, la densita' superficiale di carica sulla guaina interna sara' $\sigma_i = Q_i/(2\pi r_i h) = -\rho\pi r_0^2 h/(2\pi r_i h) = -\dfrac{\rho r_0^2}{2r_i}$, la densita' di carica sulla superficie esterna della guaina invece $\sigma_e = Q_e/(2\pi r_e h) = \rho\pi r_0^2 h/(2\pi r_e h) = \dfrac{\rho r_0^2}{2r_e}$.

Applicando Gauss a una superficie cilindrica esterna $\Sigma_{r>r_e}$coassiale di raggio r>re e altezza l si trova che

$$\Phi_{\Sigma_{r>r_e}}(\vec{E}) = 2\pi r l E(r) = \frac{Q(int)_{\Sigma_{r>r_e}}}{\epsilon_0} = \rho\pi r_0^2 l/\epsilon_0$$

Di conseguenza il campo sara' $\vec{E} = \dfrac{\rho r_0^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r}$. Questa sara' anche la forma analitica del campo elettrico per r_0 < r< r_i, cioe' nella cavita' tra la distribuzione di carica e la guaina conduttrice. All'interno del conduttore il campo sara' nullo. All'interno della distribuzione di carica, l'applicazione della legge di Gauss con $\Sigma_{r<r_0}$ ci da

$\Phi_{\Sigma_{r<r_0}}(\vec{E}) = 2\pi r l E(r) = \dfrac{Q(int)_{\Sigma_{r<r_0}}}{\epsilon_0} = \rho\pi r^2 l/\epsilon_0$ da cui $\vec{E} = \dfrac{\rho r}{2\epsilon_0}\hat{r}$.

Quindi

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\epsilon_0}\hat{r} & r < r_0 \\ \dfrac{\rho r_0^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r} & r_0 < r < r_i \\ 0 & r_i < r < r_e \\ \dfrac{\rho r_0^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r} & r > r_e \end{cases}$$

La differenza di potenziale richiesta e'

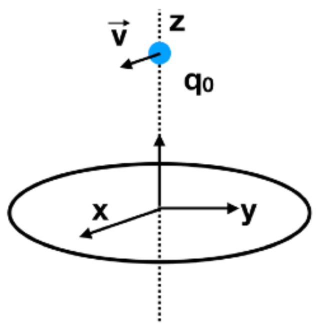
$$\varphi(r_0) - \varphi(r_i) = \int_{r_0}^{r_i} d\vec{l} \cdot \frac{\rho r_0^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r} = \int_{r_0}^{r_i} dr\hat{r} \cdot \frac{\rho r_0^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r} = \frac{\rho r_0^2}{2\epsilon_0} \ln \frac{r_i}{r_0} = 2\pi k\rho r_0^2 \ln \frac{r_i}{r_0} =$$

$$2\pi 9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-6} \times 4 \times 10^{-4} \ln \frac{2.2}{2} = 4\pi \times 9 \times \ln 1.1 = 10.8 \text{ V.}$$

Con I dati dell'altro problema ($\rho = 2\ \mu\text{C/m}^3,\ r_0 = 1\ \text{cm},\ r_i = 1.9\ \text{cm}$) si ha

$$\varphi(r_0) - \varphi(r_i) = \int_{r_0}^{r_i} d\vec{l} \cdot \frac{\rho r_0^2}{2\epsilon_0 r}\hat{r} = 2\pi k\rho r_0^2 \ln \frac{r_i}{r_0} = 2\pi 9 \times 10^9 \times 2 \times 10^{-6} \times 10^{-4} \ln \frac{1.9}{1}$$

$= 7.26$ V



Quesito 2

Calcolare la forza su una particella di carica q_0 e velocità $\vec{v} = v_0\hat{x}$ nell'istante di tempo in cui essa si trova sull'asse, z, perpendicolare a un anello di raggio R, a una distanza h dal piano dell'anello in almeno uno dei due casi seguenti:
- sull'anello è depositata della carica con densità lineare λ;
- nell'anello scorre una corrente i;
-sull'anello è depositata della carica con densità lineare λ e l'anello ruota con velocità angolare ω costante (si assuma ω sia piccola in modo da poter trascurare effetti relativistici).

Caso 1: forze elettrostatiche (abbiamo solo cariche, sorgente e prova): $\vec{F} = q_0\vec{E}(0,0,h)$.
Il campo in ogni punto dell'asse avrà' solo direzione z per simmetria; occorre quindi stimare il campo prodotto da un arco infinitesimo di lunghezza $dl = Rd\phi$, proiettarlo sull'asse z e integrare i contributi infinitesimi:

$$\vec{E}(0,0,h) = \hat{z}\int_0^{2\pi} \frac{k\ dq}{R^2+h^2}\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}} = \frac{k2\pi R\lambda h}{(R^2+h^2)^{3/2}}\hat{z}$$

Quindi la forza, che non dipende dalla velocita' della carica puntiforme e'

$$\vec{F}(0,0,h) = \frac{k2\pi Rq_0\lambda h}{(R^2+h^2)^{3/2}}\hat{z}$$

Caso 2: nell'anello scorre una corrente i => campo magnetico, l'anello e' neutro => non c'e' campo elettrico:

$$\vec{F} = q_0\vec{v} \wedge \vec{B}(0,0,h) = q_0v_0\hat{x} \wedge B(0,0,h)\hat{z} = -q_0B(0,0,h)\hat{y}$$

Il campo magnetico, sara' ottenuto dall'integrale di contribuiti infinitesimi dati dalla I formula di Laplace (assumo che la corrente scorra in verso antiorario):

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{id\vec{l} \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{iRd\phi\hat{\phi} \wedge (-R\hat{r} + z\hat{z})}{(R^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{iR^2d\phi}{(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{z}.$$

Quindi $\vec{B}(0,0,h) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{i2\pi R^2}{(R^2+h^2)^{3/2}}\hat{z}$ e la forza

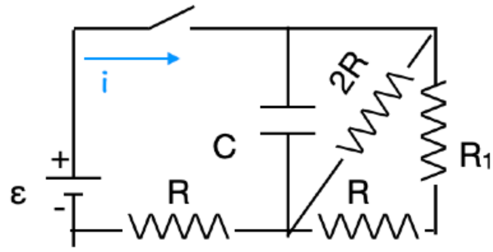
$$\vec{F}(0,0,h) = \frac{q_0\mu_0}{4\pi}\frac{i2\pi R^2}{(R^2+h^2)^{3/2}}\hat{y}.$$

Caso 3: l'anello carico produce un campo elettrico e poiche' e' in rotazione esso rappresenta anche una corrente i = dq/dt = $i = \lambda v\ dt/dt = \lambda\omega R$ e pertanto produce un campo magnetico, quindi la forza sulla carica q0 e'

$$\vec{F}(0,0,h) = \frac{k2\pi Rq_0\lambda z}{(R^2+h^2)^{3/2}}\hat{z} + \frac{q_0\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi\lambda\omega R^3}{(R^2+h^2)^{3/2}}\hat{y}$$

Quesito 3

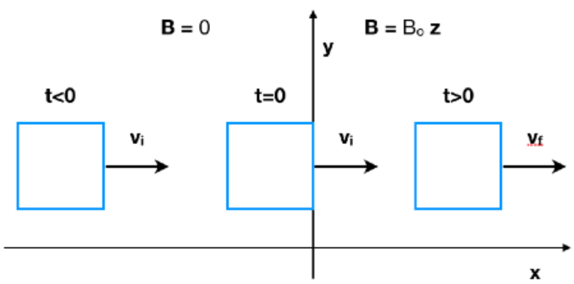
Il circuito in figura è in funzione, con l'interruttore chiuso da molto tempo. Si calcoli la velocità di deriva degli elettroni di conduzione nel ramo del circuito in cui è collocato il generatore assumendo che il circuito sia realizzato con un filo di rame di sezione circolare di diametro pari a 0.4 mm. Si calcoli l'andamento con il tempo della corrente che attraversa la resistenza 2R e l'energia totale dissipata su tale resistenza a partire dall'istante di tempo in cui l'interruttore è aperto. Si utilizzino i valori R1 = 1000 Ω, R = 500 Ω, ε = 50 V e C = 1 nF.
La resistività del rame è pari a 1.68 × 10^{-8} Ωm, la densità di massa 8.9 g/cm3 e il peso atomico A=63.5 g/mole.



Nella prima fase di funzionamento del circuito, quando il condensatore e' completamente carico, la resistenza complessiva equivalente vista dal generatore e' $R_{eq} = R + \dfrac{2R(R_1 + R)}{3R + R_1}$ = $500 + \dfrac{1000(1000 + 500)}{2500}$ = 1100 Ω. Quindi la corrente nel ramo del generatore e' $i_g = 50\ \mathrm{V}/1100\ \Omega$ =45.45 mA. La corrente e' $i_g = \int_S d\vec{s} \cdot \vec{J}$ con $\vec{J} = ne\vec{v}_d$ e con n = densità volumetrica di portatori di carica, ossia di elettroni di conduzione nel rame.
Dal momento che nel rame come nella maggior parte del metalli c'e' un elettrone di conduzione libero per atomo, si ha $n = N_A \times n_{moli}/V = N_A \times (M/V)/m_{1mole} = N_A d/A$ con d= densita' di massa e A peso atomico =>
$n = 6.22 \times 10^{23}/\mathrm{mole} \times 8.9\ \mathrm{g/cm^3}/63.5\ \mathrm{g/mole} = 0.87 \times 10^{23}\ \mathrm{cm^{-3}} = 0.87 \times 10^{29}\ \mathrm{m^{-3}}$.
Quindi $nev_d\pi r_0^2 = 45.45\ \mathrm{mA}' \quad \rightarrow$
$v_d = 45.45 \times 10^{-3}/(0.87 \times 10^{29} \times 1.6 \times 10^{-19}\pi \times 4^2 \times 10^{-8})$ = 6.5 μ/s.
Quando l'interruttore e' aperto il condensatore, inizialmente carico a $\Delta V = \epsilon - Ri_g = 50 - 500 \times 0.04545 = 27.27\ \mathrm{V}$ quindi con una carica iniziale sulle armature di Q = 27.3 nC, si scarica su una resistenza equivalente R_s = 600 Ω. La carica avrà un andamento $Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}$ con $\tau = R_s C = 600\ \mathrm{ns}$. La corrente complessiva $i_T = i_1 + i_2 = -\dfrac{dQ}{dt}$ e
$i_1 2R = i_2(R_1 + R)$ = $i_T(R_1 + R) - i_1(R_1 + R)$ quindi
$i_1 = \dfrac{R_1 + R}{R_1 + 3R} i_T$ = $\dfrac{R_1 + R}{R_1 + 3R} \dfrac{Q_0}{R_s C} e^{-t/\tau}$
L'energia dissipata sulla resistenza di valore 2R, nella scarica del condensatore sara'
$U = \int_0^\infty dt(2R)i_1^2(t)dt.$

Quesito 4

Una spira conduttrice quadrata di lato L=0.4 m, massa M=0.5 kg e resistenza R=1.5 kΩ scivola senza attrito sul piano xy con velocita'
$\vec{v}_i = 0.1\ \mathrm{m/s}\ \hat{x}$.
I lati della spira sono paralleli agli assi x e y. Al tempo t=0, la spira entra in una regione (x>0) in cui e' presente un campo magnetico uniforme $\vec{B} = 2 \times 10^{-3}\ \mathrm{T}\ \hat{z}$. Si calcoli la velocita' $\vec{v}_f$ raggiunta dalla spira quando essa e' interamente immersa nel campo magnetico.



Quando la spira entra nella regione in cui e' presente un campo magnetico si verifica una variazione del flusso del campo concatenato con la spira nel tempo quindi una corrente indotta che circolerà nel verso orario per la legge di Lenz (il flusso di B uscente dal foglio - orientata la sera in senso antiorario - e' crescente => epsilon<0 => corrente indotta in senso orario). I lati della spira percorsi da corrente nel campo magnetico saranno soggetti a una forza che frenerà la spira. Quando la spira e' completamente immersa nel campo magnetico (ossia quando avrà percorso un tratto di lunghezza L a cavallo tra la zona con B=0 e con B!=0) non ci sara' piu' variazione di flusso, ne' corrente indotta, ne' forza sulla spira.

$i_{ind} = \frac{\epsilon_{ind}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi(\overrightarrow{B})}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{d}{dt}(B_0 L x(t)) = -\frac{B_0 L v(t)}{R}$. La forza sul lato parallelo all'asse y che si trova a x>0 sara' $\overrightarrow{F} = i_{ind}\int_{y_0}^{y_0+L} dy\hat{y} \wedge B_0\hat{z} = = -\frac{B_0^2 L^2 v(t)}{R}\hat{x} = m\frac{dv}{dt}\hat{x}$

$dv = -\frac{B_0^2 L^2}{mR}dx$, da cui $v(x) - v_0 = -\frac{B_0^2 L^2}{mR}x$

E in particolare $v_f = v_0 - \frac{B_0^2 L^3}{mR}$.

Quesito 5

Si discuta un argomento a scelta tra:

1) La legge di Gauss in forma locale e differenziale; uso nel calcolo del campo magnetico
2) La legge di Ampere-Maxwell
3) Equazione di Poisson: soluzione generale
4) Confronto tra le sorgenti di campo elettrico e le sorgenti di campo magnetico.

RICORDA:

$\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ C²/Nm² = $8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m

$k = 1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ Nm²/C²

$|e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C

$m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ Kg

$m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ Kg

$M_{He} \simeq 4\, m_p$

Campo $\overrightarrow{E}$ e potenziale $\varphi(r,\vartheta)$ di dipolo: $\overrightarrow{E}(r,\vartheta) = k\frac{3(\overrightarrow{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{p}}{r^5}$; $\varphi(r,\vartheta) = k\frac{\overrightarrow{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

Campo $\overrightarrow{B}$ prodotto da un dipolo magnetico: $\overrightarrow{B}(r,\vartheta) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\overrightarrow{m}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\overrightarrow{m}}{r^5}$;

Formule di Laplace: $d\overrightarrow{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\overrightarrow{J}\wedge\vec{r}}{r^3}dV$; $d\overrightarrow{F} = \overrightarrow{J}\wedge\overrightarrow{B}\, dV$

Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Divergenza $\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla \times \mathbf{A}$	$(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\mathbf{x}} +$ $(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\mathbf{y}} +$ $(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\mathbf{z}}$	$(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z})\hat{\boldsymbol{\rho}} +$ $(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho})\hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $\frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi})\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi})\hat{\mathbf{r}} +$ $\frac{1}{r}(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi))\hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $\frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta})\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial f}{\partial\rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Aree infinitesime	$d\mathbf{S} = dydz\hat{\mathbf{x}} +$ $dxdz\hat{\mathbf{y}} +$ $dxdy\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz\hat{\boldsymbol{\rho}} +$ $d\rho dz\hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $\rho d\rho d\phi\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\mathbf{r}} +$ $r\sin\theta dr d\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Volume infinitesimo	$dv = dxdydz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$

Operatori differenziali ed elementi di linea, superficie e volume in coordinate cartesiane (sinistra), cilindriche (centro) e sferiche (destra).