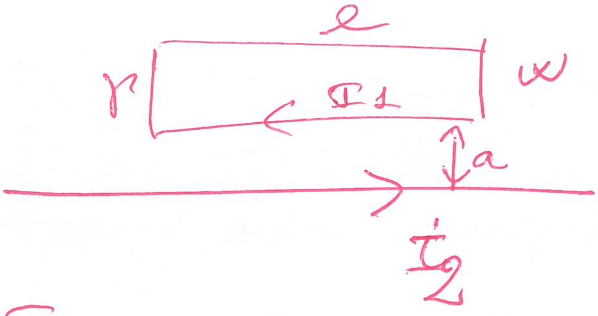
Scritto n. 7 aa 2017-18

Q1

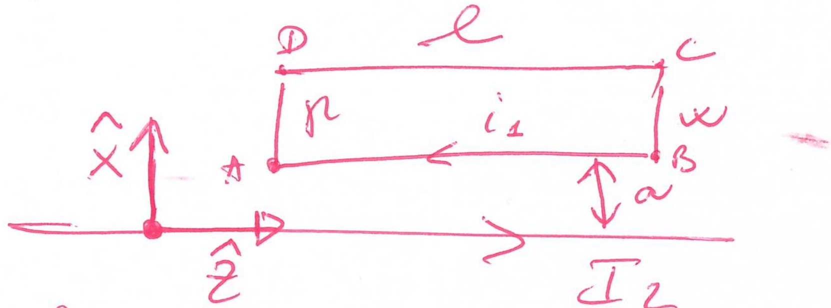


La corrente I_2 nel filo rettilineo produce il campo magnetico descritto dalla legge di Biot-Savart

$$\vec{B}_2(r) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r}\hat{\varphi}$$

dove r rappresenta la distanza del punto in cui si calcola il campo dal filo e $\hat{\varphi}$ è il versore azimutale di un sistema di coordinate cilindriche che ha come asse z il filo stesso (orientato nel verso della corrente).

Il circuito piano è contenuto nello stesso piano in cui giace il filo. Scegliamo allora le coordinate seguenti:



$\hat{y}$ perpendicolare alla figura e uscente dal foglio

In tutti i punti del circuito esiste un campo $\vec{B}$ che possiamo scrivere come

$$\vec{B}(P) = \vec{B}(x,y,z) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x}\hat{y}$$

Per la legge di Laplace, un tratto elementare di filo $d\vec{l}$ percorso da corrente i è soggetto alla forza **II**

$$d\vec{F} = i\, d\vec{l} \wedge \vec{B} \qquad (1)$$

che corrisponde alla somma delle forze di Lorentz che agiscono su ciascuno dei portatori di carica in moto nel conduttore.

La forza sul circuito si ottiene integrando la (1) su tutto il circuito:

$$\vec{F} = \oint_{\gamma} i_1\, d\vec{l} \wedge \vec{B} = \int_A^D i_1\, d\vec{l} \wedge \vec{B} +$$

$6.67 \times 10^{-5}\ N \hat{x}$

$$+ \int_D^C i_1\, d\vec{l} \wedge \vec{B} + \int_C^B i_1\, d\vec{l} \wedge \vec{B} + \int_B^A i_1\, d\vec{l} \wedge \vec{B} =$$

$$= \int_a^{a+w} i_1\, dx\, \hat{x} \wedge \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x}\hat{y} + \int_{z_0}^{z_0+l} i_1\, dz\, \hat{z} \wedge \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(a+w)}\hat{y} +$$

$$+ \int_a^{a+w} i_1\, dx\, \hat{x} \wedge \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x}\hat{y} - \int_{z_0}^{z_0+l} i_1\, dz\, \hat{z} \wedge \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a}\hat{y} =$$

$$= \frac{i_1 i_2 \mu_0}{2\pi}\left(\frac{1}{a+w} - \frac{1}{a}\right) l\,(-\hat{x}) =$$

$$= \frac{i_1 i_2 \mu_0}{2\pi}\,\frac{w\,l}{a(a+w)}\,\hat{x} = \hat{x}\,\frac{0.02\,A \times 10\,A \times 4 \times 10^{-7}\pi}{2\pi} \times \frac{100}{6}\,\frac{1}{10^{-2}}$$

Il flusso di $\vec{B}$ concatenato con γ è

$$\Phi_\gamma(\vec{B}) = \int_{\Sigma_\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\Sigma_\gamma} \frac{\mu_0 i_2}{2\pi x}\hat{y}\, dx\, dz\, \hat{y} =$$

Σ_γ superficie (scelgo quella piana) con bordo γ

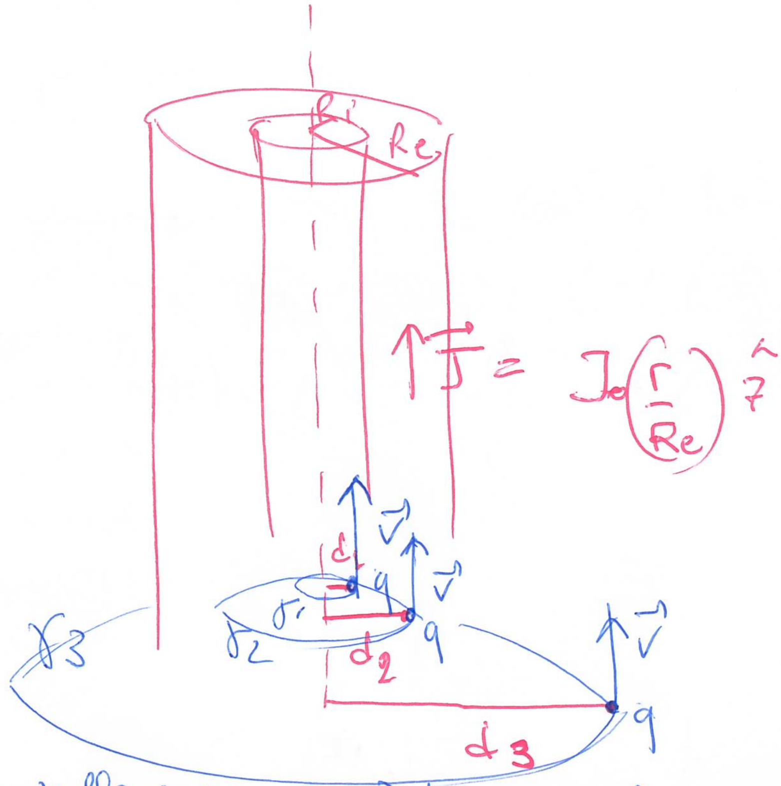
$$= \int_{\Sigma_\gamma} \frac{\mu_0 i_2}{2\pi} dz \frac{dx}{x} = \int_{z_0}^{z_0+l} dz \int_a^{a+w} \frac{dx}{x} \frac{\mu_0 i}{2\pi} =$$

$$= \frac{\mu_0 i_2}{2\pi}\, l \ln\left(\frac{a+w}{a}\right) = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10 \times 0.18}{2\pi} \times \ln(6) =$$

$$= 10^{-7}\, 4 \ln(6) = 7.17 \times 10^{-7}\, T\, m^2 =$$

$$= 0.717\ \mu Weber$$

Q2 V



$q = 2|e|$

$$\boxed{\vec v = 0{,}5\,c\,\hat z}$$

$\beta = 0.5 = \frac{|\vec v|}{c}$

La forza sulle cariche sarà dovuta al campo magnetico $\vec B$

$\vec F = q\,\vec v \wedge \vec B$

Occorre quindi calcolare $\vec B$ per un

* punto nella cavità
* nello strato cilindrico percorso da corrente
* all'esterno dello strato cilindrico di corrente.

La distribuzione di corrente è a simmetria cilindrica $\Rightarrow$ $\vec B = B(r)\hat\varphi$

↳ distanza dall'asse del cilindro

Infatti, φ e z sono coordinate irrilevanti nel nostro problema
(la forza ~~...~~ – i campi – saranno invarianti per φ e z)

Inoltre ricorda $\vec A = A(r)\hat z$ è parallelo alla corrente e $\vec B = \nabla \wedge \vec A$ $\Rightarrow$ $\vec B = B(r)\hat\varphi$

⇒ per calcolare $\vec{B}$ applichiamo la legge di **VI**

~~Laplace~~ Ampère

$$\oint_{\gamma} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \, i_{\text{concatenata } \gamma}$$

ai circuiti γ_1, γ_2 e γ_3 (circonferenze di raggio d_1, d_2 e d_3 con centro nell'asse del cilindro)

$$\oint_{\gamma_1} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint B(r)\hat{\varphi}\cdot d_1(d\varphi)\,\hat{\varphi} = \int_0^{2\pi} B(r)\, d_1\, (d\varphi) =$$

$$= \boxed{B(r)\, d_1\, 2\pi} \quad (1)$$

(2) $\quad i_{c\gamma_1} = \int_{\Sigma_{\gamma_1}} \vec{J}\cdot d\vec{s} = 0$ perché $\vec{J} = 0$ in tutti i punti di Σ_{γ_1}

↳ superficie (scelgo quella piena) con bordo γ_1

Confrontando (1) e (2) trovo che

$$\vec{B}(r) = 0 \quad \text{per } r < R_i = R_e/2$$

$$\oint_{\gamma_2} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int B(r)\hat{\varphi}\, r\, d\varphi\, \hat{\varphi} = B(r)\, r \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \boxed{B(d_2)\, d_2\, 2\pi} \quad (1')$$

$$i_{c\gamma_2} = \int_{\Sigma_{\gamma_2}} \vec{J}\cdot d\vec{s} = J_0 \int_{\Sigma_{\gamma_2}} \left(\frac{r}{R_e}\right)\hat{z}\cdot \boxed{r\, d\varphi\, dr\, \hat{z}} \to d\vec{s} =$$

$$= \frac{J_0}{R_e} \int_0^{2} d\varphi \int_{R_i}^{\frac{3}{2}R_e} r^2\, dr = \frac{J_0}{R_e}\, 2\pi \left.\frac{r^3}{3}\right|_{\frac{1}{2}R_e}^{\frac{3}{2}R_e} =$$

$$= \frac{J_0 2\pi}{3R_e}\left(\frac{27}{8}R_e^3 - \frac{1}{8}R_e^3\right) =$$ VIII

$$= \boxed{J_0 \pi \frac{13}{6} R_e^2} \quad (2)'$$

Confrontando (1)' e (2)' si ha

$$\boxed{\vec{B}(d_2) =} \; \mu_0 \frac{J_0 R_e^2}{\cancel{2}\, \frac{3}{\cancel{2}} R_e} \frac{13}{6}\hat{\varphi} = \boxed{\mu_0 J_0 \frac{13}{18} R_e \hat{\varphi}}$$

$$\oint_{\gamma_3} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \boxed{B(2)\, 2\pi r}\; (2R_e)$$

$$= \mu_0 i_{c\gamma_3} = \mu_0 \frac{J_0 2\pi}{3R_e}\left(8R_e^3 - \frac{27}{8}R_e^3\right)$$

$$= \boxed{\mu_0 J_0 \frac{\cancel{2}\pi}{3} \frac{37}{\cancel{8}\,4} R_e^2}$$

dal confronto si ha

$$\vec{B}(d_3) = \mu_0 J_0 \frac{37}{24} R_e \hat{\varphi}$$

$$\vec{F}_1 = 0 \; ; \; \vec{F}_2 = 2|e|\, 0.5c\, \hat{z} \wedge \frac{13}{18}\mu_0 J_0 R_e \hat{\varphi} =$$

molto debole attrattiva

$$= \boxed{-|e|c \frac{13}{18} \mu_0 J_0 R_e \hat{r}}$$

VIII

$$|\vec{F}_2| = 2\underbrace{|e|}_{1.6\times 10^{-19}\,C}\,\overbrace{c}^{3\times 10^{8}\,m/s}\,\frac{13}{18}\,\underbrace{\mu_0}_{4\pi\times 10^{-7}}\,\overbrace{I_0}^{100\,A}\,\overbrace{R_e}^{0.1\,m}$$

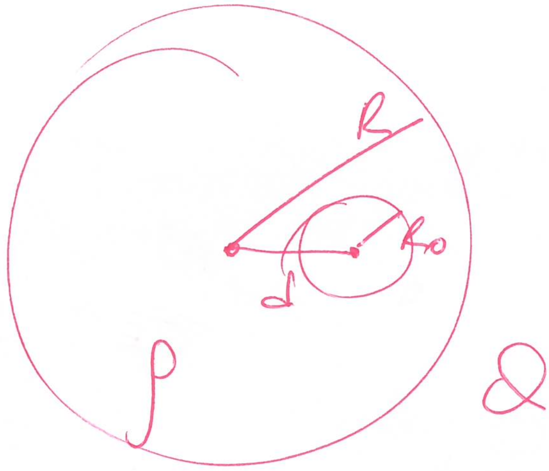
$$2\times 1.6\times 3\times \frac{13}{18}\times 4\times\pi\times 10^{-19}\times 10^{8}\times 10^{-7}\times 10^{2}\times 10^{-1} =$$

$$= 0.87\times 10^{-15}\,N$$

$$|\vec{F}_3| = |\vec{F}_2|\times\frac{18}{13}\times\frac{37}{24} = 1.86\times 10^{-15}\,N$$

Q3

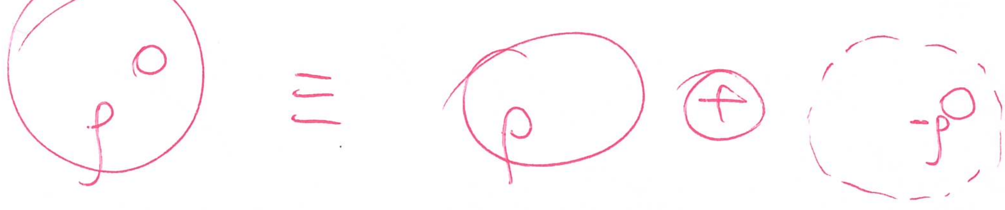
IX



Q = carica totale contenuta nel volume

$$V_{TOT} - V_{CAV} = \frac{4}{3}\pi\left(R^3 - R_0^3\right)$$

$$\boxed{\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi\left(R^3 - R_0^3\right)}}$$



*

un punto P nella cavità è interno alla sfera grande e interno alla sfera ~~cava~~ di raggio R_0

$$\Rightarrow \vec{E}(P) = \vec{E}_1(P) + \vec{E}_2(P)$$

espressione del campo in un punto interno

espressione del campo in un punto interno

X

Data una distribuzione sferica uniforme con densità di carica ρ

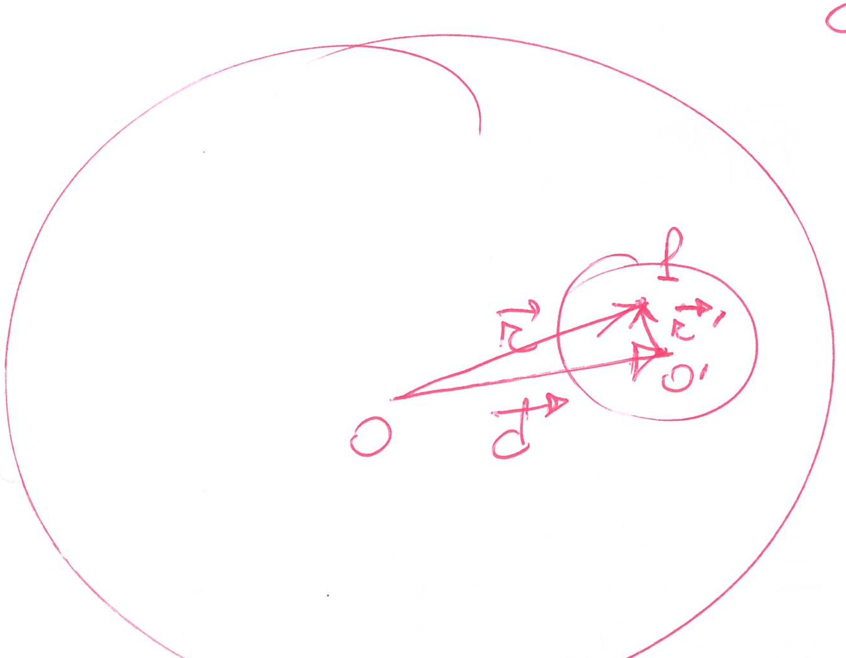
$$\vec{E}(P)_{interno} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\hat{r}$$

$\downarrow$

Gauss

r: distanza dal centro

$\hat{r}$: versore radiale (rispetto all'origine = centro della sfera)



$$\vec{E}(P) = \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho\vec{r}'}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}-\vec{r}') =$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{OO'} = \boxed{\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{d}}$$

nella cavità costante

? → zero [illegible] in P_0

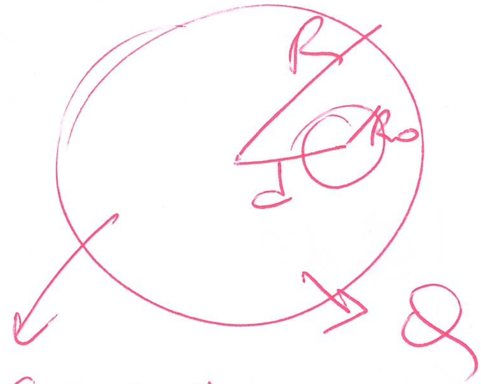
$$\vec E'(P_0) = \vec E_1(P_0) + \vec E_2(P_0) =$$

$\overline{XI}$

$$= \frac{\rho R \hat r}{3\varepsilon_0} - \rho \frac{\frac{4}{3}\cancel{\pi} R_0^3}{\cancel{4\pi}(R-d)^2}\hat r$$

Carica della sfera piccola nella schematizzazione *

$\boxed{4}$



Conduttore

⇓

$\vec E = 0$ in ogni punto interno al conduttore e $\varphi = \text{cost} = \varphi_0$

Il potenziale sarà $\varphi = \varphi_0$ anche in ogni punto della cavità, infatti

$\varphi = \varphi_0$ sulla superficie che racchiude la cavità e

$\varphi(P) = \varphi_0$ soddisfa

P qualunque nella cavità

$\nabla^2 \varphi = 0$ con condiz. al contorno

$\varphi = \varphi_0$ sui bordi della cavità

$\Rightarrow$ $\vec{E} = 0$ anche nella cavità.

Quindi la carica Q si distribuisce nella superficie esterna in modo tale da produrre $\vec{E} = 0$ in ogni punto interno (compresi i punti della cavità).
Supponiamo che questa condizione è prodotta da uno strato superficiale sferico di carica uniformemente distribuita $\Rightarrow$ $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R_e^2}$

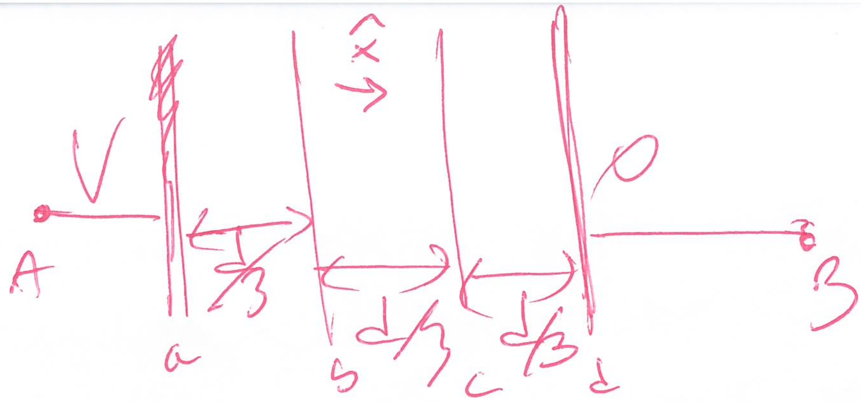
$$\vec{E}(R_e) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n} = \frac{Q}{4\pi R_e^2 \varepsilon_0}\hat{r} =$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi\rho\left(R_e^3 - R_0^3\right)}{4\pi R_e^2 \varepsilon_0}\hat{r} =$$

$$= \frac{\rho\left(R^3 - R_0^3\right)}{3R^2\varepsilon_0}\hat{r} =$$

$$= \frac{\rho R}{3\varepsilon_0}\hat{r} - \rho\frac{R_0^3}{3R^2\varepsilon_0}\hat{r}$$

$\boxed{Q5.1}$ XIII



$\vec{J}_1 = i_1/A\,\hat{x}$

legge di Ohm $\Rightarrow$ $\varphi_A - \varphi_B = Ri = V > 0$

$i = i_1 = i_2 = i_3$

conservazione della carica

$JA = J_1 A = J_2 A = J_3 A$

$J_1 = J_2 = J_3$

$\vec{E}_1 = \vec{J}_1 \rho_1 = J\cancel{A}\rho_1 \hat{x}$

$\vec{E}_2 = J\cancel{A}\rho_2 \hat{x}$

$\vec{E}_3 = J\cancel{A}\rho_3 \hat{x} = J\cancel{A}\rho_1 \hat{x} = \vec{E}_1$

$\varphi_b - \varphi_a = -\int_a^b \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = -J\cancel{A}\rho_1 \int_0^{d/3} \hat{x} \cdot dx\,\hat{x} =$

$= -J\cancel{A}\rho_1 \frac{d}{3}$

$\varphi_a - \varphi_b = J\cancel{A}\rho_1 \frac{d}{3}$

$\varphi_c - \varphi_b = -J\cancel{A}\rho_2 \frac{d}{3}$

$\varphi_d - \varphi_c = -J\cancel{A}\rho_1 \frac{d}{3}$

$\varphi_d - \varphi_a = \varphi_B - \varphi_A =$

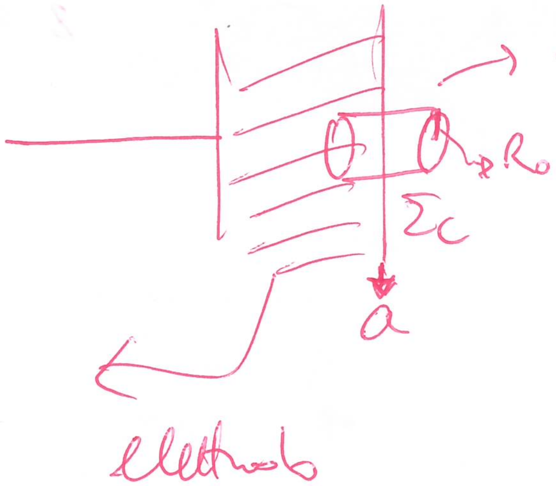
$= -J \boxed{\frac{d}{3}(\rho_1 + \rho_2 + \rho_1)}$

Res. totale

$\boxed{Q5.2}$

XIV

$\sigma_a = ?$



considero questa sup. cilindrica con le due basi che distano ugualmente dall'interfaccia a, ma nel metallo dell'elettrodo, l'altra ~~nell~~ nel mezzo ~~soluzione~~ di resistività ρ_1

di raggio R_0

geometria

Applico Gauss

$$\Phi_{\Sigma_C}(\vec{E}) = \int_{\Sigma_C} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{TOT\,INT}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_a \pi R_0^2}{\varepsilon_0}$$

densità sup. all'interfaccia a

$$\int_{B_1} \underbrace{\vec{E}}_{\vec{E}=0} \cdot d\vec{S} + \int_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\Sigma_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} =$$

B_1: conduttore

Σ_L: $\vec{E} \parallel \hat{x} \perp d\vec{S}$

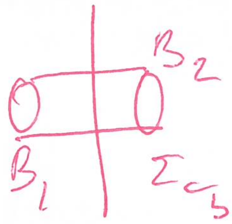
~~[illegible]~~

B_2: mezzo con ρ_1

$$= \int_{B_2} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = J \rho_1 \pi R_0^2$$

$$\boxed{\sigma_a = J \rho_1 \varepsilon_0}$$

XV



b - interfaccia

$$\Phi_{\Sigma_{c_5}}(\vec{E}) = \int_{B_1} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{B_2} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{\Sigma_L} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$\int_{\Sigma_L} \vec{E} \cdot d\vec{S} \to 0$, $\quad \vec{E} \perp d\vec{S}$

$$= \int_{B_1} J \rho_1 \hat{x} \cdot \underbrace{d\vec{S}}_{\parallel -\hat{x}} + \int_{B_2} J \rho_2 \hat{x} \cdot \underbrace{d\vec{S}}_{\parallel \hat{x}} =$$

$$\underbrace{J(-\rho_1 + \rho_2) B = \frac{\sigma_b B}{\varepsilon_0}}_{\text{gem}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_b = \varepsilon J (\rho_2 - \rho_1)$$

ripetendo gli stessi passi si ha

$\to \sigma_c = - \sigma_b$

$\to \sigma_d = - \sigma_a$