BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

Sezione A – La Matematica nella Società e nella Cultura

MAURO SPREAFICO

Gruppi di gauge e spazi classificanti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8, Vol. **1-A**—*La Matematica nella Società e nella Cultura* (1998), n.1S (Supplemento Tesi di Dottorato), p. 63–66.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1998_8_1A_1S_63_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1998.

La matematica nella Società e nella Cultura
Bollettino U. M. I.
(8) 1-A Suppl. (1998), pag. 63-66

Gruppi di gauge e spazi classificanti.

MAURO SPREAFICO

Un fibrato con gruppo di struttura G possiede un più vasto gruppo di simmetrie, di fatto anche di dimensione infinita, detto gruppo di gauge.

Il gruppo di gauge di un fibrato agisce sullo spazio delle sezioni e nel caso della categoria dei fibrati differenziabili, su altri oggetti geometrici, come le forme di connessione e curvatura. Lo studio di questi oggetti modulo l'azione del gruppo di gauge, ha portato allo sviluppo della disciplina nota sotto il nome di teorie di gauge. Nata nell'ambito della fisica teorica, è ben presto divenuta uno strumento utile e potente anche in geometria differenziale, dove ha permesso risultati notevoli nella costruzione di invarianti delle varietà differenziabili. D'altra parte, i gruppi di gauge hanno dato luogo ad una direzione parallela ma differente di studio nell'ambito della topologia algebrica. Il gruppo di gauge, può essere considerato un oggetto topologico interessante esso stesso, e le sue proprietà topologiche hanno suscitato l'interesse dei topologi algebrici sin dall'inizio dello sviluppo della teoria unificata di fibrati e fibrazioni. Da questo punto di vista, si tratta di un caso particolare della problematica astratta più generale dello studio degli automorfismi degli oggetti di una determimata categoria.

La linea seguita in questo lavoro è la seguente. Partendo un'idea generale che caratterizza tutto lo sviluppo della topologia algebrica, vogliamo associare oggetti algebrici a fibrati topologici, ed attraverso alcune proprietà algebriche dei primi, ottenere proprietà topologiche di questi ultimi. Risulta chiaro che il gruppo di gauge contiene informazioni interessanti sulla topologia del fibrato. È quindi naturale l'idea di cercare di ricostruire tali informazioni topologiche attraverso proprietà algebriche del gruppo di gauge.

Una diretta analisi e classificazione dei gruppi di gauge come oggetti algebrici è piuttosto complicata, sebbene esistano tentativi in questa direzione. Una via più semplice è quella di confrontare i gruppi di gauge di differenti fibrati all'interno di qualche gruppo più grande al fine di dedurre dalle relazioni algebriche delle proprietà topologiche dei fibrati.

Supponiamo di considerare un G fibrato principale su uno spazio di base B fissato. Esiste allora un gruppo più grande del quale sono sottogruppi i gruppi di gauge di tutti i diversi G fibrati sopra B. Supponendo che tutti i fibrati siano trivializzati sopra il medesimo ricoprimento aperto di B, possiamo definire un gruppo infinito dimensionale, detto gruppo di gauge locale, che dipende solo dal ricoprimento aperto e dal gruppo di struttura G, nel quale sono contenuti come sottogruppi topologici tutti i diversi gruppi di gauge. All'interno del gruppo di gauge locale è possibile confrontare i gruppi di gauge di diversi fibrati attraverso la relazione algebrica di essere sottogruppi coniugati.

Le domande che ci si pone sono: da una parte determinare quali informazioni topologiche sui fibrati si possano ottenere da questa relazione algebrica tra i gruppi di gauge, e dall'altra se sia possibile utilizzare questa relazione algebrica come primo passo verso il raggiungimento della classificazione dei gruppi di gauge dei fibrati, attraverso la classificazione dei fibrati aventi gruppi di gauge coniugati.

La relazione di coniugio dei gruppi di gauge all'interno del gruppo di gauge locale, definisce una nozione di equivalenza topologica debole, che coincide con l'equivalenza effettiva dei fibrati fondamentali associati, e quindi verrà denominata equivalenza fondamentale. Una espressione locale estremamente utile di tale equivalenza può essere data attraverso le funzioni di transizione dei fibrati [3].

Il primo risultato che si ottiene, riguarda la categoria dei fribrati vettoriali, laddove la nozione di equivalenza fondamentale ha un chiaro significato geometrico, e cioè corrisponde al quoziente dell'azione dei fibrati linea attraverso il prodotto tensore.

A questo punto, iniziano due linee parallele di ricera. Da una parte, il caso dei fibrati vettoriali viene studiato all'interno della categoria differenziabile. In tale contesto, risulta spontaneo chiedersi quale relazione esista tra le classi caratteristiche di fibrati fondamentalemente equivalenti. La diretta conseguenza della possibilità di esprimere l'equivalenza fondamentale attraverso il prodotto tensore per un fibrato linea, è che le classi caratteristiche di due fibrati fondamentalmente equivalenti sono legati da una relazione combinatoria in cui compare anche la classe caratteristica del fibrato linea che li lega

$$c_k(\xi \otimes \lambda) = \sum_{j=0}^{k} \binom{rk(\xi) - j}{k - j} c_j(\xi)\, c_1(\lambda)^{k-j}. \tag{1}$$

Nel caso differenziabile, la relazione (1), può essere ottenuta nel caso complesso utilizzando l'espressione della classe di Chern di un fibrato nella cohomologia reale, attraverso invarianti polinomiali simmetrici nella due forma di curvatura. Questa via alternativa, che di fatto utilizza gli strumenti della geometria differenziale piuttosto che quelli della topologia algebrica, permette altresì di ottenere un ulteriore risultato, e cioè il seguente: supponiamo che il gruppo di struttura di due fibrati complessi si possa ridurre ad un sottogruppo H con centro discreto, e che essi risultino fondamentalmente equivalenti rispetto a tale sottogruppo H; allora i fibrati avranno le stesse classi di Chern (a meno di torsione).

Dalla descrizione geometrica della relazione di coniugio come azione del gruppo dei fibrati linea, che è classificato dalla cohomologia della base, sembra immediato poter ottenere una classificazione dei fibrati aventi gruppi di gauge coniugati; purtroppo, si scopre ben presto che tale azione non è libera, e quindi un ulteriore quoziente deve essere effettuato utilizzando il gruppo di isotropia dell'azione, la cui determinazione risulta essere un problema estremamente non banale.

Il problema viene meglio inquadrato nel contesto della seconda linea di ricerca, scopo della quale è l'ottenimento di una descrizione astratta più generale della relazione di equivalenza fondamentale, che valga per ogni gruppo topologico G e contenga come caso particolare quella dell'azione dei fibrati linea del caso vettoriale.

Per realizzare una descrizione di questo tipo, si guarda alla teoria della classificazione per omotopia dei G fibrati che come è noto passa attraverso la costruzione di un fibrato universale la cui base $\mathcal{B}G$ è chiamata spazio classificante di G. In particolare il passaggio da G a $\mathcal{B}G$ risulta essere un funtore rappresentabile $\mathcal{B}$ da una opportuna sottocategoria della categoria dei gruppi topologici alla categoria degli spazi topologici [1].

Dopo la prima costruzione di fibrati universali e spazi classificanti di Milnor, ne sono state proposte diverse altre, tra le quali le più significative sono quella di Dold-Lashof e quella di Milgram-Steenrod [4]. Quest'ultima in particolare sembra più utile qualora come nel caso attuale, si desideri lavorare da un punto di vista geometrico e topologico. Una consistente parte del lavoro di questa tesi è dedicata alla revisione di tale costruzione, ed al potenziamento dei risultati da essa conseguibili. In particolare, sono stati ottenuti i seguenti risultati.

Innanzi tutto, si riproduce la costruzione in una categoria ritenuta più opportuna di quella scelta da Steenrod, e cioè nella categoria degli spazi compatto chiusi debolmente Hausdorff, $wHk(Top)$ [2], e si verifica che esistono i due funtori:

$$\mathcal{E}\colon TopGr_* \cap wHk(Top_*) \to TopGr_* \cap wHk(Top_*),$$

$$\mathcal{B}\colon TopGr_* \cap wHk(Top_*) \to wHk(Top_*),$$

dati il primo dalla costruzione dello spazio totale del fibrato universale ed il secondo dalla costruzione dello spazio classificante; si passa quindi a dimostrare che valgono nello stesso modo tutti i risultati ottenuti da Steenrod, ed in particolare che $\mathcal{E}G$ risulta essere un G spazio e $\mathcal{B}G$ lo spazio quoziente $\mathcal{E}G/G$, e si ottiene il seguente risultato più generale che non vale nella categoria utilizzata da Steenrod, e cioè che la fibra omotopica della proiezione $p_G\colon \mathcal{E}G \to \mathcal{B}G$ ha lo stesso tipo di omotopia debole di G.

Vengono poi dimostrate alcune notevoli proprietà dei funtori suddetti. Entrambi i funtori $\mathcal{B}$ ed $\mathcal{E}$ sono esatti. $\mathcal{E}$ conserva i sottogruppi (topologici), la normalità, la commutatività, la centralità e i quozienti ottenuti da sottoguppi normali. Infine, sia $\mathcal{E}$ che $\mathcal{B}$ conservano le azioni di gruppi abeliani che commutino con le traslazioni, e l'eventuale libertà di dette azioni. Tutto ciò permette di ottenere il seguente significativo risultato, e cioè che se Z è un sottogruppo centrale di G in $wHk(Top_*) \cap TopGr_*$, allora $\mathcal{B}G/Z = \mathcal{B}G/\mathcal{B}Z$, cioè il funtore $\mathcal{B}$ conserva gli spazi quoziente ottenuti dall'azione naturale di sottogruppi centrali. Da ultimo si verifica che il funtore $\mathcal{B}$ conserva le fibrazioni a meno di omotopia.

Ritornando al problema iniziale, i risultati suddetti permettono di formulare in maniera del tutto generale la relazione di coniugio dei gruppi di gauge. Dato un gruppo topologico G nell'opportuna categoria, il suo centro ZG ed il proiettivizzato $PG = G/ZG$, si verifica che, dato uno spazio X, l'insieme $[X, \mathcal{B}ZG]$ delle classi di omotopia di mappe da X in $\mathcal{B}ZG$ è un gruppo ed agisce sull'insieme $[X, \mathcal{B}G]$; l'azione non è libera, e coincide nel caso vettoriale con il prodotto tensore per un fibrato linea, ed è quindi l'azione definita inizialmente come caratterizzante la relazione di coniugio dei gruppi di gauge o l'equivalenza fondamentale tra i fibrati relativi.

Inoltre, dato che la sequenza $0 \to \mathcal{B}ZG \to \mathcal{B}G \to \mathcal{B}PG \to 0$ è esatta per funtorialità, si dimostra anche l'esattezza della sequenza lunga

$$\ldots \to [X, \mathcal{B}ZG] \to [X, \mathcal{B}G] \to [X, \mathcal{B}PG] \to 0 .$$

Il problema del calcolo del gruppo di isotropia dell'azione di $[X, \mathcal{B}ZG]$ su $[X, \mathcal{B}G]$, è comunque non banale anche tradotto in questo contesto, sebbene alcuni risultati siano già stati ottenuti: per esempio è possibile dimostrare che il gruppo di isotropia dipende solo dalle immagini degli elementi di $[X, \mathcal{B}G]$ in $[X, \mathcal{B}PG]$, e non dagli elementi in se stessi, ed anche che, nel caso di uno spazio X che sia una sospensione, il gruppo di isotropia è lo stesso per tutti gli elementi di $[X, \mathcal{B}G]$, ed è quindi quello dell'elemento banale.

Si è quindi ritenuto opportuno seguire anche altre possibili vie che, sebbene più specifiche, permettessero almeno alcuni risultati effettivi in casi particolari. Un procedimento di questo tipo, tra l'altro, permette, attraverso l'analisi della complessità dei metodi utilizzati per i calcoli, una valutazione della non banalità del problema.

Il caso preso in esame, è quello dei fibrati vettoriali. I primi risultati sono immediata conseguenza della relazione (1) tra le classi caratteristiche: nel caso reale il gruppo di isotropia è non banale solo in dimensione pari, mentre nel caso complesso solo se $H^2(X, \mathbf{Z})$ ha torsione. Inoltre, se lo spazio di base X è una varietà compatta di dimensione n, il gruppo di isotropia per i fibrati reali di rango n risulta dipendere solo dalla classe stabile degli stessi.

Si è quindi passati a studiare in particolare il caso in cui $X = \mathbf{R}P^n$, lo spazio proiettivo reale di dimensione n, ed è stato possibile dimostrare, usando metodi di topologia algebrica non banali e di teoria dell'omotopia $\mathbf{Z}_2$, che esistono fibrati di rango maggiore o uguale ad n con gruppo di isotropia non banale.

In conclusione una risposta sufficentemente vasta e completa alla prima domanda postasi inizialmente è stata ottenuta, attraverso l'insieme di tutti i risultati esposti in questa tesi, che costituiscono nello stesso tempo un ambito significativo ed utili strumenti per affrontare la problematica non banale sollevata dalla seconda domanda.

BIBLIOGRAFIA

[1] DOLD A., *Partitions of unity in the theory of fibrations*, Ann. of Math., **78** (1963), 223-255.

[2] FRITSCH R. and PICCININI R., *Cellular structure in topology*, Cambridge Univ. Press, (1990).

[3] MORGAN C. and PICCININI R., *Conjugancy classes of groups of bundles automorphisms*, Manuscripta Math., **63** (1989), 233-244.

[4] STEENROD N., *Milgram's classifying space of a topological group*, Topology, **7** (1968), 349-368.

Indirizzo: via Ampère 47 - 20131 Milano
e-mail: spreafico@vmimat.mat.unimi.it, mauro@maths.abdn.ac.uk
Dottorato in Matematica (sede amministrativa: Milano) - Ciclo VIII
Direttore di ricerca: Prof. R. Piccinini