

# 3

## Atmosfere stellari

### 3.1 Trasporto della radiazione

---

Le nostre attuali conoscenze sulla costituzione fisica del cosmo le dobbiamo in massima parte all'informazione che ci giunge dagli oggetti celesti attraverso la radiazione elettromagnetica che assume quindi, in ambito astrofisico, il ruolo del mediatore più importante dell'informazione.

Nel nostro ambito, per sviluppare gli strumenti di una coerente interpretazione fisica, vogliamo richiamare alcuni concetti legati al cosiddetto **trasporto della radiazione**, cioè a quei meccanismi di assorbimento e di emissione che si attivano quando un fascio di radiazione si propaga in un mezzo che, nel nostro caso specifico, considereremo gassoso.

Siccome le atmosfere stellari sono un tipico ambiente in cui i fenomeni legati al trasporto della radiazione si manifestano in modo evidente, più avanti ci riferiremo spesso a questi ambienti considerandoli anche come un banco di prova per la teoria.

In quel che segue ci proponiamo di definire delle grandezze utili per una descrizione delle proprietà del **campo di radiazione** che sia adeguata alle nostre esigenze. Vedremo poi come sia possibile elaborare una teoria del trasporto radiativo basata su semplici relazioni tra queste grandezze.

#### 3.1.1 Intensità

Questa è una grandezza basilare da cui, come vedremo, altre possono essere opportunamente derivate. L'intensità della radiazione può essere definita in tutta generalità, specificandone anche la direzione, sia sulla superficie che negli interni di una stella così come in un qualsiasi punto dello spazio esterno.

Qui, per semplicità, ci limitiamo a considerare il caso di una atmosfera stellare della quale andiamo a sfruttare la simmetria sferica (vedi Figura 3.1) che ci permette di associare ad ogni punto  $P$  nello spazio

- una distanza radiale  $x$  che indichi la sua posizione rispetto ad una origine (che può essere, p.es., la superficie stellare)
- una direzione  $\theta$  che rappresenti l'angolo tra la normale alla superficie sferica nel punto  $P(x)$  e la direzione di propagazione della radiazione considerata

Per definire l'intensità della radiazione in un generico punto ed in una data direzione, consideriamo la quantità di energia che fluisce in direzione  $\theta = 0$  perpendicolarmente ad

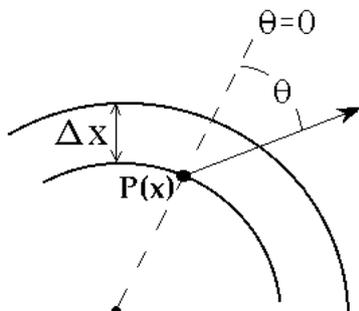


Figura 3.1

una superficie  $\Delta\sigma$  centrata in  $P(x)$  ed in un certo intervallo di tempo  $\Delta t$  (vedi Figura 3.2).

Se ora indichiamo con  $\Delta\omega$  l'angolo solido attorno alla direzione  $\theta$  entro cui si propaga la radiazione che consideriamo e teniamo conto che la stessa radiazione ha una sua distribuzione spettrale, possiamo costruire il rapporto

$$\frac{\Delta E}{\Delta t \Delta\nu \Delta\sigma \Delta\omega}$$

tra la quantità di energia  $\Delta E$  che fluisce nel tempo  $\Delta t$ , dalla superficie  $\Delta\sigma$ , entro l'angolo solido  $\Delta\omega$  e nell'intervallo di frequenza  $\Delta\nu$ , e gli stessi intervalli  $\Delta t$ ,  $\Delta\nu$ ,  $\Delta\sigma$ ,  $\Delta\omega$ .

Se ora facciamo tendere a zero  $\Delta\nu$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta\sigma$  e  $\Delta\omega$  otteniamo il limite del rapporto suddetto che rappresenterà l'**intensità**  $I$  della radiazione nel punto  $P(x)$  e nella direzione  $\theta$ . In generale quindi:

$$I_\nu(x, \theta, t) = \lim \frac{\Delta E_\nu}{\Delta\nu \Delta t \Delta\sigma \Delta\omega} \quad (3.1)$$

per  $\Delta\nu$ ,  $\Delta t$ ,  $\Delta\sigma$ ,  $\Delta\omega \rightarrow 0$ . Notiamo subito che nello scrivere l'equazione precedente non compare la dipendenza  $\theta$  perchè abbiamo considerato che la direzione di propagazione dei raggi sia normale alla superficie  $\Delta\sigma$ , una condizione che però appare piuttosto restrittiva. Possiamo allora generalizzare se scriviamo:

$$I_\nu(x, \theta, t) = \lim \frac{\Delta E_\nu}{\Delta\nu \Delta t \Delta\sigma \cos\theta \Delta\omega} \quad (3.2)$$

dove il fattore  $\cos\theta$  esprime il fatto che i raggi utili nella direzione individuata da  $\theta$  sono ora confinati non da  $\Delta\sigma$  ma dall'area proiettata da  $\Delta\sigma$  perpendicolarmente alla direzione considerata.

Nelle precedenti la dipendenza dell'intensità dalla posizione  $x$ , direzione  $\theta$ , tempo  $t$  e frequenza  $\nu$  è stata esplicitata per chiarezza. Nel seguito tuttavia, per non appesantire la notazione, indicheremo esplicitamente solo le dipendenze che ci interesseranno di più.

Si noti che nel passaggio al limite  $\Delta\omega \rightarrow 0$  non abbiamo più una distribuzione della radiazione in un cono ma in un'unica direzione, ragion per cui l'intensità così definita

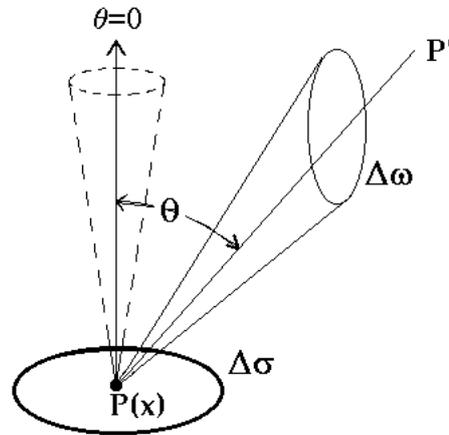


Figura 3.2

non dipenderà dalla distanza di un eventuale osservatore dal punto  $P$ . Questo infatti osserverà che nella direzione individuata da  $\theta$  il valore della intensità della radiazione che proviene dall'intorno del punto  $P$  rimane invariato. La superficie del Sole, per esempio, apparirà con la stessa intensità sia da Terra che da un qualsiasi altro pianeta, cosa questa che rende le misure di intensità particolarmente convenienti in quanto ci informano direttamente sulle proprietà intrinseche delle superfici emittenti senza dover passare attraverso la conoscenza della distanza degli oggetti astronomici. Da un punto di vista pratico le misure di intensità si possono effettuare ogni volta che un oggetto astronomico sia spazialmente risolto, cioè ogni volta che se ne possa misurare la dimensione angolare. Mentre questo può essere il caso del Sole o di oggetti angularmente estesi come le nebulose e le galassie, non lo è purtroppo per la maggior parte delle stelle e per tutti quegli oggetti che per il loro rapporto tra dimensione intrinseca e distanza appaiono spazialmente non risolti.

### 3.1.2 Flusso

Per tener conto di queste limitazioni è utile introdurre un'altra grandezza, che chiameremo **flusso** e che rappresenta la velocità alla quale l'energia emessa da (p.es.) una stella ad una certa frequenza  $\nu$  fluisce dall'unità di superficie associata ad un dato punto dello spazio. Notiamo subito che nella definizione precedente non abbiamo specificato alcuna direzione particolare: il flusso in  $P$  è infatti riconducibile ad una somma di tutti i contributi di energia  $\Delta E_\nu$ , associati ai fasci di radiazione che fluiscono dall'unità di superficie in tutte le possibili direzioni individuate da  $\Theta$  (cfr. Figura 3.2). Il flusso può essere definito, a seconda di come lo si specifica, nella direzione uscente (da una superficie) se si considera tutta l'energia che si muove con angoli di direzione compresi tra  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ , oppure su tutte le direzioni se  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Per calcolare il flusso in un punto  $P$  si dovrà quindi sommare, su tutte le direzioni, il contributo di energia

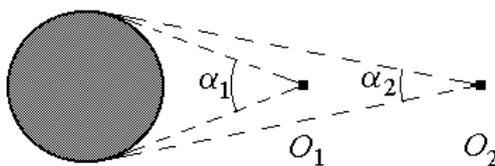


Figura 3.3: Un osservatore  $O$  che si allontani da una sorgente estesa vede diminuire l'angolo solido sotteso dalla stessa sorgente in modo proporzionale al quadrato della distanza.

che attraversa la superficie in ogni direzione. Ricordando che l'intensità prima definita rappresenta l'energia che attraversa la superficie in una data direzione, si avrà:

$$\Delta F = I_\nu(\theta) \cos \theta \Delta \omega$$

dove  $\cos \theta$  tiene conto del fatto che la sezione del fascio che attraversa la superficie in direzione  $\theta$  è  $\cos \theta$  volte minore di quella per il fascio a  $\theta = 0$ . L'integrazione della precedente su una emisfera darà il flusso uscente o entrante a seconda della scelta dei limiti di integrazione su  $\theta$ . Ovviamente il flusso totale sarà la somma dei due contributi uscente ed entrante e corrisponderà all'integrazione su tutta la sfera:

$$F_\nu(x) = \int_{4\pi} I_\nu(x, \theta) \cos \theta d\omega \quad (3.3)$$

È evidente che per un campo di radiazione strettamente isotropo avremo  $F_\nu(x) = 0$  (caso che, p.es., incontriamo in condizioni di equilibrio termodinamico). Dal punto di vista dell'osservatore il flusso (diversamente dall'intensità prima definita) non rimane costante ma, p.es. nel caso di una stella, diminuisce all'aumentare della distanza. Infatti anche se l'intensità proveniente dalla superficie emittente rimane invariata, l'angolo solido utile all'integrazione è quello sotteso dalla sorgente all'osservatore che tende a diminuire con l'aumentare della distanza (Figura 3.3). Ne segue che anche il risultato dell'integrale diminuirà con la distanza.

Quando la sorgente è tanto lontana da apparire puntiforme vale la nota relazione che stabilisce che il flusso diminuisce come l'inverso del quadrato della distanza. Per quanto abbiamo detto allora il flusso è una grandezza che possiamo sempre misurare indipendentemente dalla dimensione angolare della sorgente.

A titolo di esempio calcoliamo il flusso alla superficie di una stella  $r = R_*$  nella direzione uscente:

$$F_\nu^+(x) = \int_{\Omega^+} I_\nu(R_*, \theta) \cos \theta d\omega = I_\nu \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi$$

$$= I_\nu 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = \pi I_\nu \quad (3.4)$$

dove nella precedente abbiamo fatto l'ipotesi che l'intensità  $I_\nu$  alla superficie considerata sia isotropa e quindi non dipenda da  $\theta$  e  $\phi$ . Nel caso della superficie di un corpo nero ad una data temperatura  $T$  abbiamo  $I_\nu = B_\nu(T)$  e quindi otteniamo per il flusso ad una data frequenza la nota relazione  $F_\nu = \pi B_\nu$ .

### 3.1.3 Assorbimento ed emissione della radiazione

Se consideriamo la radiazione che passa attraverso uno strato di spessore  $ds$ , la variazione dell'intensità del fascio, dovuta ai processi di assorbimento<sup>1</sup> che hanno luogo nella regione considerata, sarà proporzionale sia all'intensità iniziale sia allo spessore dello strato:

$$dI_\nu = -k'_\nu I_\nu ds \quad (3.5)$$

dove abbiamo indicato con  $k'_\nu$  il **coefficiente di assorbimento** caratteristico del mezzo che dipende sia dalle proprietà microscopiche di assorbimento che dalla densità del mezzo. Per separare queste due dipendenze conviene sostituire  $k'_\nu = k_\nu \rho$  avendo indicato con  $k_\nu$  il coefficiente di assorbimento per unità di massa e con  $\rho$  la densità del mezzo. Con questa sostituzione ed integrando la precedente equazione tra i limiti 1 e 2 abbiamo:

$$\ln \frac{I_\nu(2)}{I_\nu(1)} = - \int_1^2 k_\nu \rho ds$$

Se ora vogliamo calcolare l'intensità che raggiunge la superficie di una stella a partire da una profondità  $x$  avremo, dopo aver posto convenzionalmente  $x = 0$  in superficie ed  $x < 0$  all'interno della stella:

$$I_\nu(0) = I_\nu(x) e^{-\int_x^0 k_\nu \rho dx} \quad (3.6)$$

Introduciamo a questo punto una quantità adimensionale  $\tau_\nu$ , detta **profondità ottica** tra due punti 1 e 2, così definita:

$$\tau_{\nu 1} - \tau_{\nu 2} = - \int_1^2 k_\nu \rho dx; \quad d\tau_\nu = -k_\nu \rho dx$$

che, se fissiamo  $\tau_{\nu 1} = 0$  alla superficie ed usiamo lo 0 per indicare il punto superficiale, possiamo riscrivere:

$$\tau_{\nu 2} = \int_0^2 k_\nu \rho dx$$

Da quest'ultima vediamo che, siccome il limite di integrazione 2 è un punto generico all'interno della stella, possiamo riscrivere l'intensità in eq. 3.6 come:

$$I_\nu(0) = I_\nu(x) e^{-\tau_\nu(x)} \quad (3.7)$$

<sup>1</sup>Con il termine assorbimento qui intendiamo la somma degli effetti dovuti all'assorbimento vero e proprio ed alla diffusione (detta anche *scattering*)

Possiamo quindi concludere che la profondità ottica  $\tau_\nu(x)$  dello strato alla profondità  $x$  determina la frazione di intensità che, partendo dallo strato in questione, raggiunge la superficie.

Per completare la nostra discussione sulla propagazione della radiazione in un mezzo vogliamo ora tener conto del fatto che alle proprietà di assorbimento di un mezzo si accompagnano sempre le corrispondenti proprietà di emissione. Per semplificare il discorso, senza perdere in generalità, nel seguito assumeremo che le proprietà di emissione associate ad ogni elemento di materia  $dm$  siano isotrope. L'energia emessa ad una frequenza  $\nu$  da ogni elemento di materia sarà proporzionale all'intervallo di frequenze  $d\nu$  e all'intervallo di tempo  $dt$  considerati. Se la costante di proporzionalità la poniamo uguale a  $4\pi j_\nu$ , con  $j_\nu$  **coefficiente di emissione**, abbiamo che:

$$\text{Energia emessa per grammo} = 4\pi j_\nu d\nu dt$$

Sfruttando ora le proprietà di isotropia, possiamo scrivere l'energia emessa nell'angolo solido  $d\omega$  come:

$$4\pi j_\nu d\nu dt \frac{d\omega}{4\pi} = j_\nu d\nu dt d\omega$$

### 3.1.4 L'equazione del trasporto radiativo

Per collegare tra loro le proprietà di assorbimento e di emissione sin qui introdotte, vogliamo ora vedere come sia possibile ricavare un'unica relazione matematica che ci consenta di calcolare l'intensità di un campo di radiazione in un qualsiasi punto di un mezzo con specifiche proprietà di emissione e assorbimento.

Consideriamo quindi l'energia che passa attraverso il tronco di cono in Figura 3.4. La variazione di intensità nella direzione  $\theta$  e nel percorso  $ds$ : sarà:

$$dI = dI_e + dI_a = \text{Intensità emessa} + \text{Intensità assorbita (negativa)} \quad (3.8)$$

dove l'intensità emessa sarà legata al coefficiente di emissione  $j$  e alla quantità di massa emittente che si trova all'interno del tronco di cono. Nel limite di  $d\omega$  infinitesimo il tronco di cono approssima sempre meglio un cilindro, così che possiamo scrivere:

$$\text{Energia emessa} = j_\nu d\nu dt d\omega (\rho d\sigma ds)$$

dove  $d\sigma$  indica l'area di base del tronco di cono e quindi il termine tra parentesi esprime la massa che partecipa all'emissione.

Dalla definizione di intensità data in eq. 3.1 abbiamo che:

$$dI_e = \text{Intensità emessa} = \frac{\text{Energia emessa}}{d\nu dt d\sigma d\omega} = j_\nu \rho ds$$

mentre per l'assorbimento possiamo scrivere (vedi equazione 3.5):

$$dI_a = \text{Intensità assorbita} = -k_\nu \rho I_\nu ds$$

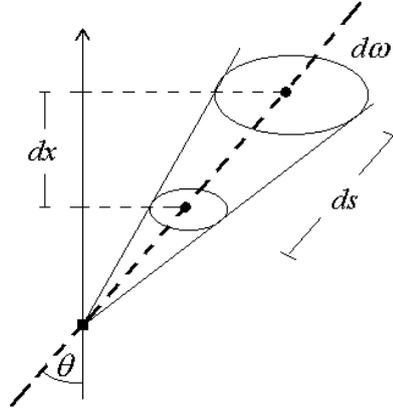


Figura 3.4

Sostituendo nella equazione (3.8) avremo:

$$dI_\nu = j_\nu \rho ds - k_\nu \rho I_\nu ds$$

e poichè dalla Figura 3.4 vediamo che  $ds = dx \sec\theta$ , riscriviamo:

$$dI_\nu = j_\nu \rho dx \sec\theta - k_\nu \rho I_\nu dx \sec\theta$$

Dividendo questa relazione a destra e sinistra per  $d\tau_\nu = -k_\nu \rho dx$  otteniamo l'**equazione del trasporto radiativo**:

$$\cos\theta \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - \frac{j_\nu}{k_\nu} \quad (3.9)$$

Per semplificare la scrittura introduciamo un coefficiente di assorbimento mediato su tutte le frequenze e riscriviamo la relazione precedente per le quantità medie:

$$\cos\theta \frac{dI}{d\tau} = I - \frac{j}{k}; \quad \text{con } d\tau = -k \rho dx \quad (3.10)$$

Aggiungiamo che nel caso in cui  $k$  fosse davvero indipendente dalla frequenza parleremmo di una **atmosfera grigia**, notando però subito che questo non implica che la radiazione non dipenda dalla frequenza, ma solo che le proprietà di assorbimento dell'atmosfera siano le stesse a tutte le frequenze.

L'impostazione che abbiamo usato per ricavare l'equazione (3.9) è strettamente valida solo per un modello di atmosfera a strati piani e paralleli giacchè si è implicitamente assunto che l'angolo  $\theta$  non vari al variare della profondità  $x$ . Nel caso delle atmosfere stellari, tuttavia, questa può essere considerata una buona approssimazione visto che l'atmosfera occupa solo una sottile buccia esterna nella quale effettivamente l'angolo  $\theta$  non varia apprezzabilmente tra gli strati interessati dalla propagazione di un fotone. Lo spessore radiale dell'atmosfera è infatti molto minore del suo raggio di curvatura e per questo la radiazione emergente dalla fotosfera può essere descritta localmente come se viaggiasse in una atmosfera piano-parallela.

### 3.1.5 Soluzione dell'equazione del trasporto

A partire dall'equazione 3.9 è utile ed interessante derivare due importanti risultati che vengono suggeriti da semplici integrazioni.

- 1- Se moltiplichiamo l'equazione del trasporto per  $d\omega$  ed integriamo su tutta la sfera otteniamo:

$$\int_{\Omega} \cos \theta \frac{dI}{d\tau} d\omega = \int_{\Omega} I d\omega - \int_{\Omega} \frac{j}{k} d\omega$$

e siccome la differenziazione rispetto a  $\tau$  è indipendente dall'integrazione possiamo riscrivere:

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} I \cos \theta d\omega = \int_{\Omega} I d\omega - \int_{\Omega} \frac{j}{k} d\omega. \quad (3.11)$$

Introduciamo ora l'intensità media del campo di radiazione,  $J$ , come la media pesata su tutte le direzioni dell'intensità, data da:

$$J = \frac{\int_{\Omega} I d\omega}{\int_{\Omega} d\omega}$$

Notiamo che l'integrale a sinistra nella precedente relazione 3.11 rappresenta il flusso così come lo abbiamo precedentemente definito, mentre il primo integrale a destra vale  $4\pi J$  cosicchè, se  $j$  e  $k$  hanno dipendenza angolare, si avrà:

$$\frac{d}{d\tau} F = 4\pi J - 4\pi \frac{j}{k}.$$

Poichè le atmosfere che stiamo considerando non contengono sorgenti di energia ma si limitano a trasportarla, la condizione perchè siano in equilibrio radiativo è che l'energia assorbita da un elemento di materia sia esattamente bilanciata da quella emessa. Questo corrisponde a dire che in una atmosfera stazionaria ogni "shell" deve avere un bilancio zero di energia e quindi la variazione del flusso con la profondità ottica dovrà essere  $dF/d\tau = 0$ , il che implica:

$$J = \frac{j}{k} \quad (3.12)$$

Questo semplice risultato mette in evidenza come l'intensità media del campo di radiazione sia strettamente legata ai coefficienti di emissione e di assorbimento, cosa che nel caso del corpo nero si traduce nella nota **legge di Kirchhoff-Planck**:  $B_{\nu}(T) = j_{\nu}/k_{\nu}$

- 2- Se moltiplichiamo ulteriormente l'equazione 3.9 per  $\cos \theta$  e integriamo su tutto l'angolo solido otteniamo:

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\Omega} I \cos^2 \theta d\omega = \int_{\Omega} I \cos \theta d\omega - \frac{j}{k} \int_{\Omega} \cos \theta d\omega$$

e poichè l'ultimo integrale a destra vale zero si ha:

$$\frac{d}{d\tau}(4\pi K) = 4\pi H$$

dove si è posto:

$$H = \frac{\int_{\Omega} I \cos \theta d\omega}{\int_{\Omega} d\omega}.$$

e

$$K = \frac{\int_{\Omega} I \cos^2 \theta d\omega}{\int_{\Omega} d\omega}$$

Quindi in conclusione possiamo scrivere la relazione

$$\frac{d}{d\tau}K = H \rightarrow K = H\tau + \text{costante} \quad (3.13)$$

È interessante notare che le tre grandezze  $J$ ,  $H$  e  $K$  che abbiamo introdotto sono calcolate tutte a partire dal campo di radiazione  $I$  e sono in grado di fornire una completa descrizione delle proprietà del campo. Abbiamo infatti già visto che  $J$  rappresenta l'intensità media del campo di radiazione, mentre il significato fisico di  $H$  è chiaramente legato al flusso di energia (vedi la definizione di flusso). Il significato di  $K$  non è ancora immediatamente chiaro, anche se anticipiamo che questa grandezza è legata alla pressione di radiazione come vedremo più avanti (vedi Capitolo 4, eq. 4.20). Notiamo che, da un punto di vista matematico,  $J$ ,  $H$  e  $K$  rappresentano i momenti rispettivamente di ordine 0, 1 e 2 del campo di radiazione  $I$ .

### Approssimazione di Eddington

La soluzione dell'equazione del trasporto per una atmosfera stellare può rivelarsi in generale non facile se non abbiamo già una qualche idea sulla distribuzione angolare del campo di radiazione o se vogliamo consistentemente determinare anche la temperatura del mezzo. Quest'ultima infatti si ottiene attraverso un bilancio energetico tra energia assorbita ed emessa e quindi richiede la conoscenza dell'intensità del campo di radiazione nel punto considerato. D'altra parte l'intensità del campo è ottenuta dalla soluzione dell'equazione del trasporto nella quale compaiono i coefficienti di emissione e di assorbimento che dipendono a loro volta dalla temperatura del mezzo. Questo tipo di problemi si risolve di solito con procedure che coinvolgono una stima iniziale di intensità e temperatura che viene poi sottoposta ad una verifica di consistenza all'interno di un procedimento iterativo che viene fermato quando si sia raggiunta una soddisfacente convergenza dei valori ottenuti ad ogni iterazione del calcolo. Qui ci limitiamo a fornire al lettore un esempio di soluzione analitica per illustrare come sia possibile, a partire da semplici considerazioni, ottenere risultati utili a prendere confidenza con i problemi radiativi ed a confrontarsi con l'osservazione.

L'esempio che discutiamo ora va sotto il nome di **prima approssimazione di Eddington** e consiste essenzialmente nel considerare il campo di radiazione, in ogni punto di un'atmosfera, scomponibile in due intensità costanti: la prima definita sulla semisfera uscente e la seconda sulla semisfera entrante. In questa approssimazione possiamo quindi scrivere:

$$I(\tau, \theta) = \begin{cases} I_1(\tau) & \text{per } 0 \leq \theta < \pi/2 \\ I_2(\tau) & \text{per } \pi/2 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \quad (3.14)$$

con  $I_1$  ed  $I_2$  dipendenti dalla profondità ottica  $\tau$ .

Come si è detto nel paragrafo precedente le proprietà del campo di radiazione sono espresse dalle tre grandezze  $J$ ,  $H$ , e  $K$  che, calcolate nel presente caso, forniscono le seguenti relazioni:

$$J = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} I d\omega = \frac{2\pi}{4\pi} \left( \int_0^{\pi/2} I_1 \sin\theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} I_2 \sin\theta d\theta \right) = \frac{1}{2}(I_1 + I_2) \quad (3.15)$$

risultato che ci si poteva aspettare giacchè  $J$  in questo caso è dato semplicemente dalla media delle due intensità in gioco, ognuna definita su mezza sfera. Per ricavare il flusso del nostro campo di radiazione dalla definizione di  $H$  abbiamo:

$$H = \frac{1}{2} \left( \int_0^{\pi/2} I_1 \cos\theta \sin\theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} I_2 \cos\theta \sin\theta d\theta \right) = \frac{1}{4}(I_1 - I_2) \quad (3.16)$$

Anche in questo caso possiamo vedere che, essendo  $H$  per definizione il flusso diviso  $4\pi$ , se calcoliamo il flusso netto da una superficie della nostra atmosfera abbiamo dall'equazione (3.4):

$$F = \int_{\Omega^+} I \cos\theta d\omega = \pi(I_1 - I_2)$$

che diviso per  $4\pi$  dà proprio  $H$ .

L'ultima quantità che ricaviamo è':

$$K = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} I \cos^2\theta d\omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (I_1 + I_2) \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{1}{6}(I_1 + I_2). \quad (3.17)$$

Guardando alle espressioni ottenute per  $J$  e  $K$  vediamo subito che  $K = J/3$  e quindi nel nostro caso possiamo riscrivere l'equazione 3.13 come:

$$\frac{J(\tau)}{3} = H\tau + \text{cost} \quad (3.18)$$

Ora, per determinare il valore della costante, imponiamo le condizioni al contorno appropriate al nostro caso. Queste sono:

- alla superficie abbiamo  $\tau = 0$
- non vi è radiazione incidente sulla stella dall'esterno, quindi in superficie l'intensità entrante sarà  $I_2(\tau = 0) = 0$

In queste condizioni se consideriamo le relazioni 3.15, 3.16, 3.17 in superficie otteniamo rispettivamente:

$$J(0) = \frac{I_1}{2}; \quad H(0) = \frac{I_1}{4}; \quad K(0) = \frac{I_1}{6}$$

e dalla equazione (3.18) otteniamo:

$$\frac{J(0)}{3} = cost$$

Siccome vediamo anche che  $J(0) = 2 H(0)$ , segue che  $cost = 2/3 H(0)$  per cui il valore della costante è determinato dal flusso alla superficie. Notiamo ora che il flusso nelle atmosfere stazionarie da noi considerate è una quantità che non dipende dalla profondità ottica  $\tau$  per cui possiamo riscrivere la equazione (3.18) come:

$$\frac{J(\tau)}{3} = H\tau + \frac{2}{3}H \implies J(\tau) = H(2 + 3\tau) \quad (3.19)$$

Questa relazione è di grande importanza perchè esprime l'intensità media del campo di radiazione  $J$  in termini della profondità ottica  $\tau$  e di una proprietà osservabile delle stelle quale è  $H$ , cioè il flusso netto diviso  $4\pi$  che in termini delle quantità osservabili si può riscrivere:

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{L}{4\pi R_*^2}$$

dove  $R_*$  è il raggio della stella ed  $L$  la luminosità totale (energia per unità di tempo).

Possiamo ora finalmente risolvere l'equazione del trasporto rispetto alle intensità  $I_1(\tau)$  ed  $I_2(\tau)$ , ricavando dalle equazioni 3.15 e 3.16:

$$J + 2H = I_1; \quad J - 2H = I_2$$

da cui, attraverso la relazione 3.19 si ottiene rispettivamente:

$$I_1 = H(4 + 3\tau); \quad I_2 = 3H\tau$$

È interessante notare che le intensità  $I_1$  ed  $I_2$  così ricavate differiscono di una quantità pari a  $4H$  per ogni profondità ottica, in accordo con la descrizione di atmosfere stazionarie per le quali abbiamo richiesto che il flusso sia costante a tutte le profondità. Si noti poi che la soluzione trovata ha un'altra interessante proprietà e cioè che all'aumentare di  $\tau$  (quindi entrando in profondità nell'atmosfera) il rapporto  $I_1/I_2$  tende all'unità segnalando un avvicinamento asintotico alla situazione di isotropia, pur in presenza di una differenza  $(I_1 - I_2) = 4H = \text{costante}$ .

### Una verifica: l'oscuramento al bordo del Sole

Osservando il disco solare con opportune precauzioni si può notare che al bordo esso è meno brillante che al centro. Questa caratteristica, illustrata in figura 3.5, non è solo tipica del Sole ma in generale anche delle altre stelle perchè è deducibile dalla osservazione delle curve di luce dei sistemi binari ad eclisse.

Si pone quindi il problema di vedere se è possibile, all'interno del nostro modello di atmosfera con campo di radiazione "alla Eddington", ricavare la dipendenza della intensità emergente  $I$  dall'angolo di osservazione  $\theta$ . Calcoliamoci allora il contributo alla intensità emergente in una data direzione, prodotto da un elemento di gas atmosferico. L'intensità emessa da un volumetto di gas (vedi Fig.3.6) in una data direzione sarà:

$$j \rho ds = j \rho dx \sec\theta$$

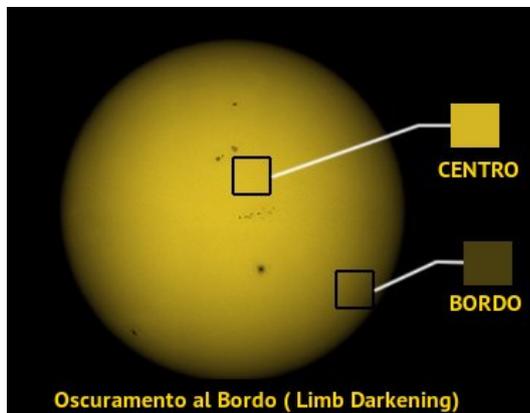


Figura 3.5: Immagine del Sole ottenuta con un filtro a banda stretta.

Tuttavia, nel cammino verso la superficie questa stessa intensità sarà attenuata di un fattore esponenziale corrispondente alla profondità ottica  $\tau$  nel punto di origine. Per esprimere la profondità ottica in modo conveniente, stabiliamo di indicare ogni strato dell'atmosfera con il suo  $\tau$  valutato verso l'esterno nella direzione normale. Se ora consideriamo la radiazione che viaggia con un angolo di inclinazione  $\theta$  rispetto alla normale, potremo indicare la profondità ottica effettivamente sperimentata dalla radiazione come  $\tau_{\text{eff}} = \tau \sec\theta$  (vedi Figura 3.6).

Il contributo dello strato considerato all'intensità emergente sarà allora dato da:

$$dI = j \rho dx \sec\theta e^{-(\tau \sec\theta)}$$

e, ricordando che  $d\tau = -k \rho dx$  e che  $J = j/k$  (vedi equazione 3.12), otteniamo:

$$dI = -J d\tau \sec\theta e^{-(\tau \sec\theta)}.$$

Integrando ora sulla profondità ottica, cioè sommando su tutti gli strati che contribuiscono a formare l'intensità emergente, otteniamo:

$$I(0, \theta) = - \int_{\infty}^0 J(\tau) \sec\theta e^{-(\tau \sec\theta)} d\tau \quad (3.20)$$

nella quale  $J(\tau)$  è detta anche **funzione sorgente** perchè rappresenta la quantità di energia che ha origine nello strato a profondità ottica  $\tau$ . Se ora nella precedente relazione utilizziamo l'espressione di  $J$  che abbiamo già ricavato nel caso dell'approssimazione di Eddington (vedi eq. 3.19), otteniamo:

$$I(0, \theta) = \int_0^{\infty} H(2 + 3\tau) e^{-(\tau \sec\theta)} \sec\theta d\tau$$

che diventa:

$$I(0, \theta) = 2H \int_0^{\infty} e^{-(\tau \sec\theta)} \sec\theta d\tau + 3H \int_0^{\infty} \tau e^{-(\tau \sec\theta)} \sec\theta d\tau$$

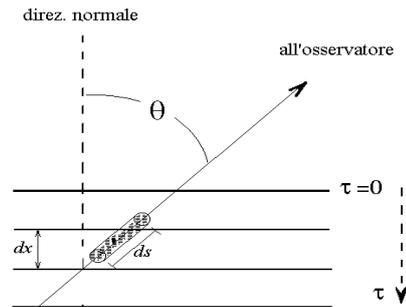


Figura 3.6: La radiazione emessa nella direzione  $\theta$  dal volumetto indicato, prima di emergere alla superficie sarà attenuata di un fattore legato alla profondità ottica del cammino percorso in atmosfera.

Con la sostituzione  $\tau \sec\theta = y$  si risolve il primo integrale che dà  $[-e^{-y}]_0^\infty = 1$ . Usando la stessa sostituzione di prima anche per il secondo integrale otteniamo:

$$\int_0^\infty y e^{-y} dy$$

che si può integrare per parti e vale 1. Il risultato finale che si ottiene per la dipendenza dell'intensità dall'angolo di inclinazione è:

$$I(0, \theta) = H (2 + 3 \cos \theta)$$

Quindi otteniamo un andamento dell'intensità emergente in superficie che dipende da  $\theta$ :

$$\text{per } \theta = 0 \quad \text{avremo } I(0, 0) = 5H$$

$$\text{per } \theta = \pi/2 \quad \text{avremo } I(0, \pi/2) = 2H$$

risultato molto diverso da quello che avremmo ingenuamente ottenuto se avessimo considerato la sola soluzione di Eddington  $I_1(0) = 4H$  per il campo uscente alla superficie dell'atmosfera.

Il risultato che abbiamo ora ottenuto considerando tutti i contributi all'intensità emergente è certamente più rispondente al caso reale visto che l'intensità decresce all'aumentare di  $\theta$ . Intuitivamente ci si aspetta che i raggi che emergono da un dato strato in modo obliquo attraversino più materia prima di emergere alla superficie rispetto a quelli che viaggiano lungo la perpendicolare agli strati. Questo fa sì che un'osservatore

Tabella 3.1: Andamento dell'intensità sul disco solare normalizzata al valore centrale

Cos $\Theta$	Approssimazione	Osservata
1.0	1.00	1.000
0.9	0.94	0.944
0.8	0.88	0.898
0.7	0.82	0.842
0.6	0.76	0.788
0.5	0.70	0.730
0.4	0.64	0.670
0.3	0.58	0.602
0.2	0.52	0.522
0.1	0.46	0.450

che guardi obliquamente una atmosfera veda meno fotoni provenire dagli strati profondi rispetto all'osservatore perpendicolare e, siccome nel nostro modello di atmosfera gli strati più profondi sono anche più caldi, ecco spiegato perchè l'intensità osservata sul disco del sole tende a diminuire verso il bordo. La tabella 3.1 riporta il confronto quantitativo tra teoria ed osservazione.

### Distribuzione della temperatura

La maniera in cui operativamente si può attribuire una temperatura ad un gas non è purtroppo univoca. Vi sono infatti almeno tre modi operativi di definire la temperatura che sono associati alla determinazione di grandezze microscopiche che caratterizzano le particelle del gas (atomi o molecole), quali la velocità, l'eccitazione e la ionizzazione. Queste determinazioni si ottengono generalmente per via spettroscopica e non necessariamente i loro valori coincidono pur nello stesso gas. Solo nel caso in cui si realizzi una situazione di equilibrio termodinamico le varie determinazioni convergono ad indicare un valore univoco per la temperatura. In generale quindi potremmo ottenere valori di  $T$  diversi e quindi valutare dal loro disaccordo l'entità dell'allontanamento dall'equilibrio termodinamico.

Tutto ciò discende dal fatto che per ricavare la temperatura vengono usate le relazioni funzionali tra il parametro temperatura e le grandezze misurate (velocità, eccitazione, ionizzazione) che valgono strettamente solo nel caso di equilibrio termodinamico.

- La *temperatura cinetica*  $T_{cin}$  si ricava infatti a partire dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann delle velocità delle particelle:

$$N(v_x)dx \propto e^{-\left(c_1 \frac{v_x^2}{T_{cin}}\right)}$$

dove  $N(v_x)$  è il numero di particelle con velocità compresa tra  $v_x$  e  $v_x + dv_x$  e  $T_{cin}$  è la temperatura cinetica.

- La *temperatura di eccitazione*  $T_{ecc}$  che compare nella equazione di Boltzmann per le popolazioni relative dei livelli energetici di un atomo in un dato stadio di ionizzazione:

$$\frac{N(\text{liv.n})}{N(\text{liv.fondamentale})} \propto e^{-\left(\frac{C2}{T_{ecc}}\right)}$$

- Infine la *temperatura di ionizzazione*  $T_{ion}$  è determinata dal numero relativo di ioni di un dato elemento che sono nei vari possibili stadi di ionizzazione. La relazione che lega due stadi successivi,  $r$  ed  $r + 1$ , di ionizzazione all'equilibrio termodinamico è del tipo:

$$\frac{N(r+1)}{N(r)} \propto T_{ion}^{3/2} e^{-\left(\frac{C3}{T_{ion}}\right)} f(T_{ion})$$

dove  $f(T_{ion})$  è una funzione che ha una debole dipendenza da  $T_{ion}$ . Le costanti C1, C2, C3 nelle tre precedenti relazioni dipendono rispettivamente dall'elemento in questione, dal grado di eccitazione e di ionizzazione.

Ovviamente c'è un notevole vantaggio nel poter considerare situazioni di equilibrio termodinamico sia perchè le varie definizioni conducono ad un unico valore di  $T$ , cioè  $T = T_{cin} = T_{ecc} = T_{ion}$ , sia perchè in queste condizioni vale anche la legge di Kirchhoff-Planck (vedi anche l'eq. 3.12 per il caso generale) :

$$j_\nu = k_\nu B_\nu(T)$$

che lega il coefficiente di emissione  $j_\nu$  a quello di assorbimento  $k_\nu$  attraverso la funzione di corpo nero  $B_\nu(T)$ .

Viste le semplificazioni che accompagnano la situazione di equilibrio termodinamico è importante chiedersi se una tale condizione si realizzi anche nelle atmosfere stellari di cui ci stiamo occupando. Per esplorare questa possibilità sarà utile verificare se il gas presente nelle atmosfere stellari si comporta come se fosse in una scatola chiusa con pareti a temperatura costante. Le quantità rilevanti per questa verifica saranno da una parte il **libero cammino medio** delle particelle e dei fotoni, e dall'altra il gradiente della temperatura.

Il libero cammino medio lo possiamo stimare, anche se in maniera approssimativa, considerando la sezione d'urto totale per collisioni offerta dalle  $n$  particelle contenute in  $1 \text{ cm}^3$  di gas:

$$\text{Area bersaglio per cm}^3 = \sigma n = \pi r^2 \frac{\rho}{\text{peso atomico}}$$

dove con  $\sigma$  abbiamo indicato la sezione d'urto geometrica di una particella e con  $n$  e  $\rho$  rispettivamente la densità in numero ed in massa. Siccome il costituente principale nel nostro caso è l'idrogeno nello stato fondamentale adotteremo, nell'approssimazione di Bohr, un raggio dell'orbita di minima energia di circa  $0.5 \text{ \AA}$ . Tenendo conto che il

peso atomico dell'H è  $m_H \sim 1.67 \cdot 10^{-24}$  g e che la densità <sup>2</sup> dell'atmosfera del Sole è  $\rho_{\odot} \sim 10^{-7}$  g cm<sup>-3</sup>, otteniamo che:

$$\text{Area bersaglio per cm}^3 \simeq 5 \text{ cm}^2$$

rendendo quindi improbabile che una particella del gas possa attraversare un volume di 1 cm<sup>3</sup> di atmosfera senza urtare con le altre particelle. Possiamo allora concludere che le particelle del gas sono confinate in un piccolo volume nell'ambito del quale la temperatura varia molto poco visto che il gradiente di temperatura del Sole, mediato su tutto il raggio, è grossolanamente dato da  $\Delta T_{\odot}/\Delta R_{\odot} \sim 10$  K km<sup>-1</sup>. Se ora passiamo a considerare la radiazione dobbiamo notare che i fotoni hanno un libero cammino medio molto più grande di quello delle particelle visto che nelle condizioni tipiche di una superficie stellare una profondità ottica  $\tau \simeq 1$  si raggiunge su distanze di circa 170 km, il che equivale a dire che una buona frazione di fotoni emessi a quella profondità raggiunge la superficie senza essere assorbita. L'approssimazione di equilibrio termodinamico per i fotoni in prossimità della superficie stellare è quindi meno stringente sia perchè le pareti dell'ipotetico box entro cui si muovono i fotoni sono a temperature sensibilmente diverse sia perchè il campo di radiazione non è strettamente isotropo essendo l'intensità nella direzione uscente maggiore che in quella entrante. Tuttavia è intuitivo aspettarsi che, andando in profondità nella stella, il libero cammino medio tenda a diminuire così che anche la radiazione possa essere considerata in equilibrio termodinamico (in accordo con quanto abbiamo già visto nel discutere la anisotropia del campo di radiazione in termini della approssimazione di Eddington).

Introduciamo allora il concetto di **equilibrio termodinamico locale** : si riconosce che vi è un graduale cambiamento della temperatura  $T$  con la profondità, ma che questo è piccolo per piccole variazioni di posizione radiale. In altre parole questo ci consente di ritenere ancora valide le leggi di Maxwell, Boltzmann, Saha, Kirchhoff localmente in ogni guscio (o strato) di atmosfera stellare, e quindi per determinare la temperatura della radiazione useremo comunemente la relazione di Kirchhoff-Planck che, nel caso di una atmosfera grigia ( $k$  indipendente dalla frequenza), si può riscrivere come:

$$\frac{j}{k} = \int_0^{\infty} B_{\nu}(T) d\nu = B(T) = \frac{\sigma}{\pi} T^4$$

ed utilizzando le equazioni (3.12) e (3.19), quest'ultima ricavata nell'approssimazione di Eddington, abbiamo:

$$\frac{\sigma}{\pi} T^4(\tau) = J(\tau) = H (2 + 3\tau)$$

che calcolata a  $\tau = 0$  dà la temperatura superficiale  $T_0$ , cioè:

$$H = \frac{\sigma}{2\pi} T_0^4 \quad (3.21)$$

e, sostituita nella precedente, ci permette di scrivere:

$$T^4 = T_0^4 (1 + 3/2 \tau)$$

<sup>2</sup>Per confronto, la densità dell'atmosfera terrestre al suolo è  $\rho \sim 10^{-3}$  g cm<sup>-3</sup>, ovvero  $\sim 3 \times 10^{19}$  molecole cm<sup>-3</sup>.

Ricordando il concetto di **temperatura efficace**  $T_{\text{eff}}$ , possiamo scrivere il flusso come:

$$F = \int_{\Omega} I \cos \theta \, d\omega = \sigma T_{\text{eff}}^4$$

e quindi anche:

$$H = \frac{F}{4\pi} = \frac{\sigma}{4\pi} T_{\text{eff}}^4.$$

Sostituendo nella equazione (3.21) otteniamo:

$$T_{\text{eff}}^4 = 2 T_0^4$$

che ci consente finalmente di scrivere:

$$T^4 = \frac{T_{\text{eff}}^4}{2} \left( 1 + \frac{3}{2} \tau \right)$$

che lega la quantità osservabile  $T_{\text{eff}}$  alla temperatura degli strati atmosferici. Si vede che  $T = T_{\text{eff}}$  quando  $\tau = 2/3$  e che per il Sole, la cui temperatura efficace è  $T_{\text{eff},\odot} = 5770 \text{ K}$ , si ricava  $T_{0,\odot} = 4859 \text{ K}$ .

## 3.2 Proprietà fisiche dei gas

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti come si possa dare una utile descrizione fisica del trasporto della radiazione introducendo un coefficiente di assorbimento  $k$  e considerandolo indipendente dalla frequenza (caso di atmosfera grigia) in modo da semplificarci la trattazione. È chiaro però che lo stesso fatto di dover calcolare un coefficiente medio implica una conoscenza del suo andamento in frequenza  $k_\nu$  su cui poi mediare. Una conoscenza più completa del meccanismo di propagazione della radiazione la otteniamo comunque quando consideriamo la dipendenza dalla frequenza di questo fenomeno. Per esplorare questo aspetto discutiamo ora, per sommi capi, i processi fisici responsabili dell'assorbimento tenendo presente che il valore numerico del coefficiente  $k_\nu$  dipenderà poi anche dal numero di atomi che contribuiscono ai processi di assorbimento. In breve possiamo dire che per determinare il valore di  $k_\nu$  c'è bisogno di una quantità di informazioni sullo stato fisico del gas, cioè bisogna conoscere lo stato di eccitazione, lo stadio di ionizzazione, la distribuzione delle velocità delle particelle in gioco, ed infine la composizione chimica del gas. Nei prossimi paragrafi passeremo in rassegna questi aspetti cercando di limitare la trattazione al minimo indispensabile.

### 3.2.1 Il modello atomico

In questo paragrafo illustreremo brevemente il modello dell'atomo di Bohr che è notoriamente legato allo sviluppo della meccanica quantistica. Tra i risultati più notevoli di questo modello c'è una semplice relazione che, nell'ipotesi di quantizzazione della quantità di moto, intercorre tra l'energia dei livelli atomici ed il numero quantico principale  $n$  in un sistema idrogenoide:

$$E_{i,n} = \frac{2\pi^2 m' e^4 Z^2}{h^2 n^2}$$

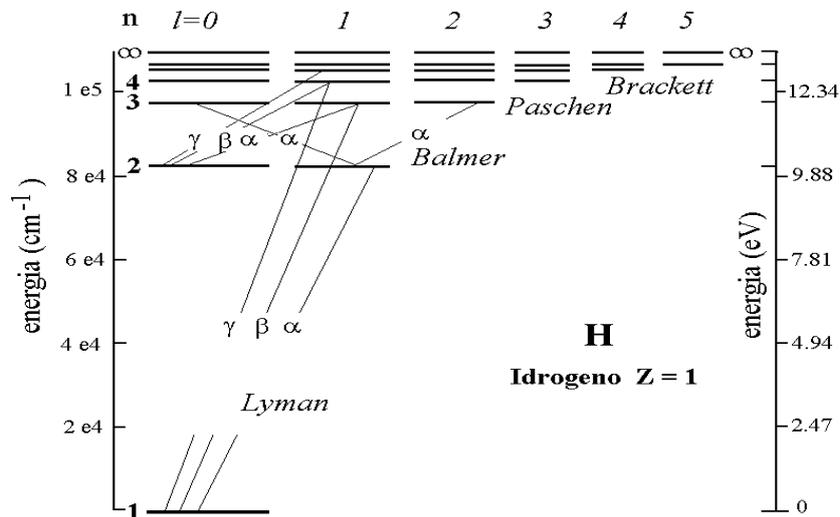


Figura 3.7: Schema dei livelli dell'atomo di idrogeno. Sull'asse di sinistra e di destra sono riportati i valori dell'energia espressi rispettivamente in unità di  $\text{cm}^{-1}$  (numeri d'onda) e di  $\text{eV}$ . Con  $n$  si è indicato il numero quantico principale e con  $l$  quello associato al momento angolare. Alcune transizioni permesse della serie di Lyman e di Balmer sono anche indicate. Le lunghezze d'onda delle transizioni più basse delle serie di Lyman e di Balmer sono:  $\text{Ly}_\alpha = 1216 \text{ \AA}$ ,  $\text{Ly}_\beta = 1026 \text{ \AA}$ ;  $\text{H}_\alpha = 6563 \text{ \AA}$ ,  $\text{H}_\beta = 4861 \text{ \AA}$ . L'energia di ionizzazione dallo stato fondamentale è di  $13.6 \text{ eV}$ , corrispondente a fotoni di  $\lambda = 912 \text{ \AA}$ .

dove  $m' = (m_{\text{nucleo}} m_{\text{el}}) / (m_{\text{nucleo}} + m_{\text{el}}) \simeq m_{\text{el}}$  è la *massa ridotta* del sistema, e l'indice  $i$  indica lo stadio di ionizzazione dello ione considerato.

È intuitivo che l'energia è più negativa (stato legato) se la carica  $Z$  del nucleo aumenta e meno negativa se aumenta  $n$  (orbite più lontane dal nucleo). Nella Figura 3.7 sono schematizzati i livelli di energia per l'atomo di idrogeno (l'estensione ad un qualsiasi sistema idrogenoide si otterrà facilmente moltiplicando i valori di  $E$  dell'idrogeno per  $Z^2$  del corrispondente nucleo).

Le energie dei vari livelli sono negative avendo assunto come zero per l'energia potenziale la configurazione in cui elettrone e nucleo sono a distanza infinita. Per esprimere il potenziale di eccitazione useremo valori positivi, avendo assunto lo zero al livello fondamentale. È chiaro che, con questa convenzione, il potenziale di ionizzazione dell'H dal livello fondamentale sarà  $+13.6 \text{ eV}$ . Con queste convenzioni l'energia cinetica che avrà un elettrone strappato dallo stato di energia  $E_{i,n}$  per assorbimento di un fotone

di energia  $h\nu$  sarà:

$$E_{cin,e} = h\nu - |E_{i,n}|$$

e l'energia di un fotone assorbito da uno ione idrogenoide in una transizione dallo stato a al b:

$$h\nu = E_{i,n_b} - E_{i,n_a} = -\frac{2\pi^2 m' e^4}{h^2} Z^2 \left( \frac{1}{n_b^2} - \frac{1}{n_a^2} \right)$$

Da questa relazione si possono così ricavare le frequenze  $\nu$  delle linee spettrali che compongono le varie serie degli ioni idrogenoidi e, ponendo  $n_b = \infty$ , le frequenze dei limiti delle serie.

### 3.2.2 Eccitazione

La frazione di atomi e ioni che si trovano in uno stato eccitato, ovvero in un dato livello energetico, è espressa dalla equazione di Boltzmann quando il gas si trova in equilibrio termico. Supponiamo di avere un gas costituito da atomi identici e nello stesso stadio di ionizzazione e indichiamo con  $N_{i,x}$  il numero di atomi ionizzati al grado  $i$  ed eccitati al livello  $x$ . Ricordiamo poi che il numero di atomi eccitati al livello di energia  $x$  dipende anche dal numero di modi in cui l'atomo può occupare il livello di energia  $x$ , cioè dalla *degenerazione* (detta anche *peso statistico*) del livello che indicheremo con  $g_x$ . Dalla meccanica quantistica ricordiamo anche che la degenerazione dei livelli dell'H è data da  $g_n = 2n^2$ <sup>3</sup>. L'equazione di Boltzmann che dà il rapporto tra le popolazioni di due livelli di uno stesso atomo (o ione) è allora:

$$\frac{N_{i,x}}{N_{i,x'}} = \frac{g_{i,x}}{g_{i,x'}} \frac{e^{-(E_{i,x}/kT)}}{e^{-(E_{i,x'}/kT)}} = \frac{g_{i,x}}{g_{i,x'}} e^{-\left(\frac{E_{i,x} - E_{i,x'}}{kT}\right)}$$

Se  $x'$  è lo stato fondamentale potremo scrivere:

$$\frac{N_{i,x}}{N_{i,0}} = \frac{g_{i,x}}{g_{i,0}} e^{-(\chi_{i,x}/kT)} \quad (3.22)$$

dove con  $\chi_{i,x}$  si è indicato il potenziale di eccitazione del livello  $x$ . Per esprimere ora la popolazione frazionaria di un livello questa volta rispetto al numero totale di atomi nello stadio di ionizzazione  $i$ -esimo esprimiamo il numero totale di atomi come:

$$N_{i,tot} = \sum_x N_{i,x} = \frac{N_{i,0}}{g_{i,0}} u_i(T)$$

dove  $u_i(T) = \sum_x g_{i,x} e^{-\chi_{i,x}/kT}$  è detta **funzione di partizione** visto che il suo valore dipende dalla ripartizione della popolazione totale dell'atomo in questione nei vari possibili stati di energia. Si ottiene così per la popolazione relativa al totale:

$$\frac{N_{i,x}}{N_{i,tot}} = \frac{g_{i,x}}{u_i(T)} e^{-\chi_{i,x}/kT} \quad (3.23)$$

<sup>3</sup>Il momento angolare orbitale  $\ell$  può orientarsi nello spazio in modo che la sua proiezione sull'asse  $z$ , detta anche numero quantico magnetico  $m$ , può assumere  $(2\ell+1)$  valori diversi. Questa molteplicità, insieme a quella dello spin (2) e dello stesso  $\ell$  ( $n$ ), produce la degenerazione dei livelli dell'H

### 3.2.3 Ionizzazione

In condizioni di equilibrio termodinamico il comportamento di un gas rispetto alla ionizzazione è descritto dall'equazione di Saha. Questa si ricava a partire da considerazioni di bilancio statistico tra atomi in un dato stadio di ionizzazione  $i$  che passano ad uno stadio di più alta ionizzazione ( $i \rightarrow i + 1$ ) e atomi che subiscono il processo inverso ( $i \leftarrow i + 1$ ). Considerando che in una situazione stazionaria i due processi si dovranno compensare, per i livelli fondamentali di due stadi di ionizzazione si può ricavare la seguente relazione di equilibrio:

$$\frac{N_{i+1,0}}{N_{i,0}} N_e = \frac{2(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \frac{g_{i+1,0}}{g_{i,0}} e^{-(\chi_{i,\infty}/kT)} \quad (3.24)$$

dove con  $\chi_{i,\infty}$  si è indicata l'energia di ionizzazione dal livello fondamentale e con  $N_e$  la densità elettronica in numero. Questa equazione può essere riscritta in termini più convenienti se ci riferiamo al numero totale di atomi nello stadio di ionizzazione  $i$  ed  $i+1$  piuttosto che in termini delle popolazioni dei soli livelli fondamentali. Utilizzando la precedente equazione di Boltzmann e ricordando che l'energia di eccitazione del livello fondamentale è  $\chi_{i+1,0} = 0$ , si ha:

$$\frac{N_{i+1,0}}{N_{i+1,tot}} = \frac{g_{i+1,0}}{u_{i+1}(T)} e^{-(\chi_{i+1,0}/kT)} = \frac{g_{i+1,0}}{u_{i+1}(T)}$$

Analogamente per il livello  $i$ -esimo:

$$\frac{N_{i,0}}{N_{i,tot}} = \frac{g_{i,0}}{u_i(T)}$$

Ricavando dalle precedenti  $N_{i+1,0}$  ed  $N_{i,0}$  e sostituendo nella equazione (3.24) si ottiene:

$$\frac{N_{i+1,tot}}{N_{i,tot}} N_e = \frac{2(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \frac{u_{i+1,tot}}{u_{i,tot}} e^{-(\chi_{i,\infty}/kT)} \quad (3.25)$$

che all'occorrenza può anche essere riscritta in termini di pressione ricordando che per un gas classico  $P_e = N_e kT$ .

### 3.2.4 La distribuzione Maxwelliana delle velocità

In condizioni di equilibrio termodinamico, la distribuzione delle velocità unidimensionali delle particelle di un gas è data dalla legge di Maxwell-Boltzmann:

$$\frac{N(v_x)dv_x}{N} = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{mv_x^2}{2kT}} dv_x \quad (3.26)$$

dove  $N$  è il numero totale di particelle,  $N(v_x)dx$  è il numero di particelle la cui componente  $x$  della velocità è compresa tra  $v_x$  e  $v_x + dv_x$ , ed  $m$  è la massa di una particella del gas. Ponendo  $\alpha = \sqrt{2kT/m}$  riscriviamo la precedente come:

$$\frac{N(v_x)dv_x}{N} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{v_x}{\alpha}\right)^2} \frac{dv_x}{\alpha}$$

che come si vede ha la forma di una distribuzione gaussiana di probabilità. Questo fatto ha un risvolto osservativo interessante legato all'effetto di allargamento doppler delle linee spettrali emesse dal gas in questione. Infatti, siccome per velocità non relativistiche lo spostamento doppler  $\Delta\lambda$  è una funzione lineare della velocità ( $\Delta\lambda/\lambda = v/c$ ), ci aspettiamo che quando le velocità unidimensionali delle particelle di un gas sono distribuite gaussianamente anche gli allargamenti doppler delle linee spettrali, emesse o assorbite dal gas in questione, appariranno di forma gaussiana. Queste considerazioni però valgono solo se il gas, oltre ad essere "termalizzato" e quindi descrivibile con la relazione 3.26, è anche trasparente alle linee spettrali considerate (cioè  $\tau < 1$ ). Siccome per le altre componenti della velocità valgono espressioni analoghe, la frazione di particelle con componenti della velocità comprese tra  $v_x \div v_x + dv_x$ ,  $v_y \div v_y + dv_y$ ,  $v_z \div v_z + dv_z$ , sarà:

$$\frac{N(v_x)dv_x}{N} \frac{N(v_y)dv_y}{N} \frac{N(v_z)dv_z}{N} = \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-\left(\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{\alpha^2}\right)} \frac{dv_x dv_y dv_z}{\alpha^3}$$

che sarà normalizzata dall'integrale su tutte le velocità posto uguale all'unità. Conviene però considerare il quadrato della velocità definito dall'ovvia geometria:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$$

si avrà quindi per il numero di particelle con velocità comprese tra  $v$  e  $v + dv$ :

$$\frac{N(v)dv}{N} = \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-\left(\frac{v}{\alpha}\right)^2} \frac{4\pi v^2}{\alpha^3} dv \quad (3.27)$$

Nello spazio delle velocità infatti queste particelle sono comprese in una shell sferica di superficie  $4\pi v^2$  e spessore  $dv$ . Infine possiamo evidenziare il significato della costante  $\alpha$  che abbiamo introdotto prima, differenziando l'equazione (3.27) rispetto alle velocità. Avremo:

$$\frac{d}{dv} \frac{N(v)}{N} = \frac{4\pi}{\alpha^3 \pi^{3/2}} e^{-\left(\frac{v}{\alpha}\right)^2} \left(2v - 2\frac{v^3}{\alpha^2}\right)$$

e, ponendola uguale a zero per ricavare il massimo si ha:

$$1 - \frac{v^2}{\alpha^2} = 0; \quad \text{e quindi} \quad v = \alpha$$

che rappresenta quindi il più probabile valore della velocità delle particelle.

### 3.2.5 Energia cinetica media delle particelle

Data una particella di velocità  $v$  l'energia cinetica ad essa associata è pari a  $E_{cin} = mv^2/2$ . Se abbiamo  $a$  che fare con un insieme di particelle di massa  $m$ , ognuna dotata di una propria velocità, potremo utilizzare un concetto di energia cinetica media data da  $\langle E_{cin} \rangle = m \langle v^2 \rangle / 2$  avendo indicato con  $\langle v^2 \rangle$  la media di  $v^2$  su tutte le velocità data da:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\int_0^\infty v^2 N(v) dv}{\int_0^\infty N(v) dv}$$

Se la distribuzione delle velocità delle particelle è di tipo maxwelliano possiamo utilizzare l'equazione (3.27) ottenendo per l'integrale al numeratore:

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3} N \int_0^\infty e^{-(v/\alpha)^2} v^4 dv$$

che risolto dà:  $(3/2)\alpha^2 N$ . Siccome l'integrale al denominatore vale semplicemente  $N$  otteniamo per l'energia cinetica media:

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m \frac{3}{2} \alpha^2 = \frac{1}{2} m \frac{3}{2} \frac{2kT}{m} = \frac{3}{2} kT.$$

### 3.3 Processi di assorbimento

Con lo stesso termine *assorbimento* spesso si vogliono indicare due processi essenzialmente diversi: la diffusione (o scattering) e l'assorbimento vero e proprio. Mentre la diffusione di un fotone da parte di un sistema atomico si verifica quando un atomo riemette la stessa radiazione assorbita senza modificarne l'energia, l'assorbimento propriamente detto si ha quando un atomo eccitato dall'interazione con un fotone riemette più fotoni di energia minore cadendo attraverso una scala di livelli energetici fino allo stato fondamentale. Il risultato netto dei due processi è, da un certo punto di vista, analogo giacchè in tutti e due i casi viene rimossa radiazione dal fascio incidente. Le interazioni tra radiazione e sistemi atomici danno comunque luogo a diversi tipi di transizioni che sono classificabili come: **legato-legato** (bound-bound), **legato-libero** (bound-free), **libero-libero** (free-free). A queste transizioni si aggiungono poi fenomeni di **diffusione alla Rayleigh** o **alla Thomson** a seconda che la lunghezza d'onda della radiazione incidente sia molto maggiore o molto minore della lunghezza d'onda di "risonanza" della particella diffondente.

Per esempio, l'interazione della radiazione con elettroni liberi dà luogo sempre alla diffusione Thomson perchè la lunghezza d'onda di risonanza per gli elettroni liberi è  $\lambda_{ris} = \infty$ . Una importante differenza tra i due tipi di diffusione sta nel fatto che mentre quella di Thomson è indipendente dalla lunghezza d'onda della radiazione incidente, quella di Rayleigh è invece proporzionale a  $\lambda^{-4}$ .

Dovendo considerare i diversi tipi di interazione tra sistemi atomici e fotoni che danno luogo all'assorbimento di un fascio di radiazione, possiamo schematizzare dicendo che:

- gli elettroni liberi daranno luogo alla diffusione Thomson ed a transizioni libero-libero;
- gli atomi e gli ioni contribuiranno con transizioni legato-legato, legato-libero e con la diffusione Rayleigh o Thomson (a seconda della lunghezza d'onda della radiazione)
- le molecole daranno luogo agli stessi processi degli atomi ed in più alla fotodissociazione.

Siccome per calcolare il coefficiente di assorbimento per unità di massa  $k_\lambda$  (o  $k_\nu$ ) è necessario conoscere il coefficiente di assorbimento atomico  $a(\lambda)$  (o  $a(\nu)$ ) relativo ad

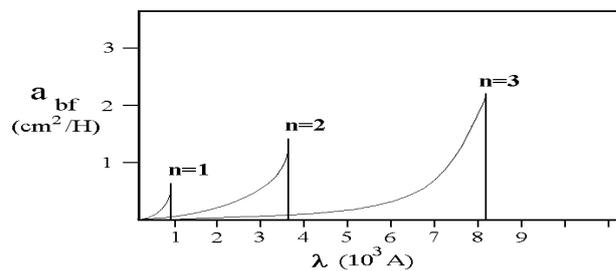


Figura 3.8: Sezione d'urto (in unità di quella geometrica) per la ionizzazione dell'H dai primi tre livelli.

un dato atomo, vale la pena discutere brevemente come possiamo calcolare la sezione d'urto di assorbimento nel caso di atomi idrogenoidi. A questo proposito diciamo che le transizioni legato-legato, che sono quelle responsabili della produzione delle linee spettrali, possono essere trascurate nelle condizioni di alta temperatura presenti negli interni stellari, ma possono essere molto importanti nel calcolo del coefficiente di assorbimento nelle zone più fredde. Per queste transizioni si fa riferimento ai coefficienti di Einstein per l'assorbimento radiativo.

Le transizioni legato-libero corrispondono invece alla ionizzazione di un atomo ed un'espressione approssimata per la sezione d'urto in questo caso è data da:

$$a_{bf}(\lambda, Z', n) = \frac{64\pi^4}{3\sqrt{3}} \frac{m e^{10}}{c^4 h^6} Z'^4 \frac{g_{bf}}{n^5} \lambda^3 \quad \text{per } \lambda < \lambda_n$$

dove  $Z'$  è la carica nucleare effettiva,  $g_{bf}$  è il fattore di Gaunt<sup>4</sup>,  $\lambda_n$  è la lunghezza d'onda di soglia per la ionizzazione dal livello  $n$ .

Un grafico di questo coefficiente è del tipo mostrato in Figura 3.8.

Per ottenere una quantità che abbia le stesse dimensioni di  $k\rho$  e che quindi ci consenta poi di calcolare la profondità ottica  $\tau$  (vedi eq. 3.7) dobbiamo moltiplicare  $a_{bf}(\lambda, Z', n)$  per la densità  $N_{i,n}$  di atomi in grado di compiere quella transizione, dove abbiamo usato gli indici  $i$  ed  $n$  per indicare rispettivamente lo stadio di ionizzazione e lo stato di eccitazione. Notiamo ora che la densità di atomi in un particolare livello energetico può anche essere scritta come:

<sup>4</sup>Si tratta di un fattore moltiplicativo che tiene conto delle correzioni introdotte dalla meccanica quantistica rispetto al risultato ottenuto classicamente: in pratica è il rapporto tra le sezioni d'urto ottenute per via quantistica e classica ed è quasi sempre dell'ordine dell'unità

$$N_{i,n} = \frac{N_{i,n}}{N_i} \frac{N_i}{\sum_i N_i} \frac{X_{Z'}}{A_{Z'} m_H} \rho_{gas}$$

dove:

$A_{Z'}$  = massa atomica dell'atomo  $Z'$ ,

$m_H$  = massa dell'H,

$X_{Z'}$  = frazione in massa dell'elemento  $Z'$ .

e che nella precedente relazione il primo rapporto  $N_{i,n}/N_i$  è dato dall'equazione di Boltzmann,  $N_i/\sum_i N_i$  corrisponde all'equazione di Saha usata in modo iterativo, e l'ultimo termine a destra dipende dalla composizione del materiale stellare.

L'equazione precedente ci consente quindi di calcolare facilmente, in condizioni di equilibrio termodinamico e quindi di applicabilità delle relazioni di Boltzmann e di Saha, la densità di atomi in un dato stato di eccitazione che sono in grado di compiere transizioni ai livelli inferiori emettendo i corrispondenti fotoni.

Nel caso delle transizioni libero-libero l'efficienza del processo  $a_{ff}(\lambda)$  dipende sia dalla carica effettiva del nucleo associato che dalla velocità dell'elettrone assorbente (cioè dall'energia). Trattandosi però di un processo in cui sono coinvolte due tipi di particelle (ioni ed elettroni) ognuna con una sua densità, le dimensioni di questa grandezza non sono  $[L^2]$  come nel caso di  $a_{bf}$ , ma piuttosto  $[L^5]$ . L'espressione analitica è data da:

$$a_{ff}(\lambda, Z', v) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \frac{e^6}{c^4 h m^2} Z'^2 \frac{g_{ff}}{v} \lambda^3$$

dove  $g_{ff}$  è il fattore di Gaunt (anche in questo caso quasi sempre dell'ordine dell'unità) per transizioni libero-libero. Il corrispondente coefficiente di assorbimento  $k_\lambda$  si ricava integrando la precedente relazione sulla distribuzione delle velocità delle particelle. In pratica scriveremo:

$$k_{ff}(\lambda, Z') = \int_0^\infty a_{ff}(\lambda, Z', v) \frac{X_{Z'}}{A_{Z'} m_H} N_e(v) dv$$

dove il termine  $X_{Z'}/(A_{Z'} m_H)$  rappresenta il numero di nuclei  $Z'$  per grammo di materiale stellare, conferendo quindi a  $k_{ff}$  le dimensioni di  $[L^2 M^{-1}]$ .

Nel caso dell'atomo di idrogeno, essendo il nucleo di questo non perfettamente schermato, si possono avere transizioni libero-libero che coinvolgono un elettrone e l'atomo di H. Questo tipo di situazione si presenta quando il gas stellare è a temperature di poche migliaia di gradi alle quali l'H è completamente ricombinato mentre molti metalli sono ancora in condizioni di ionizzazione, rilasciando quindi nel gas una certa frazione di elettroni liberi. Questo si può realizzare perchè molti elementi con peso atomico maggiore dell'He <sup>5</sup> hanno energie di prima ionizzazione minori di quella dell'idrogeno. A causa di queste premesse l'opacità nello spettro continuo delle atmosfere

<sup>5</sup>In Astrofisica tutti gli elementi più pesanti dell'He vengono tradizionalmente chiamati "metalli", un termine improprio ma che è ormai entrato nell'uso comune.

fere delle stelle fredde è dominata dalle transizioni free-free e bound-free dello ione  $H^{-6}$ .

Per quel che concerne la **diffusione Thomson** da parte degli elettroni si ricava che la sezione d'urto di questo processo è espressa da:

$$\sigma_e = \frac{8}{3}\pi \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2$$

Si noti che la quantità tra parentesi è il raggio classico dell'elettrone e la dipendenza dalla lunghezza d'onda della radiazione è assente. Il coefficiente per unità di massa è dato da :

$$k_e = \sigma_e \frac{N_e}{\rho}$$

Quanto abbiamo detto per la diffusione da parte di elettroni liberi potremmo estenderlo anche ai nuclei, ma in questo caso l'efficienza del processo sarebbe molto minore a causa della loro maggiore massa.

La **diffusione di Rayleigh** è dovuta invece ad oscillazioni forzate degli elettroni orbitali prodotte da un'onda elettromagnetica incidente. Infatti quando la lunghezza d'onda della radiazione incidente è molto maggiore di quella tipica delle transizioni tra i livelli legati dei sistemi in questione, si ricava che la sezione d'urto del processo di diffusione è data da:

$$\sigma_R = \sigma_e \left( \frac{\lambda_L}{\lambda} \right)^4$$

Nella precedente relazione abbiamo assunto che il gas sia praticamente tutto idrogeno nello stato fondamentale e  $\lambda_L = 1026 \text{ \AA}$  sia una media pesata sulla serie di Lyman. In linea di principio, a partire dai coefficienti di assorbimento discussi si possono poi ricavare i coefficienti di assorbimento totali tenendo conto della somma dei processi coinvolti.

---

<sup>6</sup>In presenza di elettroni liberi l'idrogeno neutro può formare lo ione  $H^{-}$  che ha un potenziale di ionizzazione di 0.75 eV (in chimica è detto "affinità elettronica"). Questa energia corrisponde ad una lunghezza d'onda di 1.6  $\mu\text{m}$  e quindi i fotoni emessi dalla superficie stellare nella regione spettrale del visibile potranno essere assorbiti da questo ione che quindi contribuisce ad aumentare l'opacità dell'atmosfera nelle stelle fredde. Sulla superficie delle stelle calde l'H è quasi tutto ionizzato e quindi lo ione  $H^{-}$  è praticamente assente).

