

# QUANTIZZAZIONE EFFETTO FOTOELETTRICO EFFETTO COMPTON

*Marco Giliberti*

Versione speciale per gli amici del Salento  
30/03/2017

## **Premessa**

Finora abbiamo descritto sostanzialmente il comportamento di pennelli materiali ed elettromagnetici in propagazione libera. Abbiamo supposto, cioè, che essi non interagiscano con altri campi e non siano neppure autointeragenti. Per mezzo di alcuni esperimenti abbiamo mostrato il comportamento ondulatorio di tali pennelli: la propagazione avviene in linea retta ed è possibile in opportune, “semplici”, condizioni ritrovare i fenomeni di interferenza e diffrazione tipici di una propagazione per onde.

L’idea centrale di questo capitolo è che questa analogia di comportamento che abbiamo evidenziato tra i vari tipi di “sostanze” e la radiazione elettromagnetica, per quanto riguarda la propagazione libera, permane, per molti aspetti, anche quando si prendano in considerazione le interazioni, con la nascita dell’idea di quanto.

In questo capitolo, in particolare, ci occuperemo di quello che succede se consideriamo, nella nostra descrizione, le interazioni. Vedremo che è proprio in questo caso che nasce l’idea di quanto e non si ha certamente bisogno di aspettare l’avvento della fisica quantistica e la celebre spiegazione da parte di Planck dello spettro del corpo nero nel 1900 per trovare questa idea.

Come tutti sanno il concetto di quanto (meglio di atomo), nacque nel V secolo a. C. per mezzo di Democrito. Egli disse che gli atomi erano le parti più piccole della materia. Poi Epicuro sostenne che gli atomi erano indivisibili (pur possedendo una struttura...). Epicuro nel *De Rerum Natura* fece una grande propaganda a queste idee.

Nel Medioevo l’idea di atomo fu considerata materialistica e perciò stesso atea e fu abbandonata.

Il concetto moderno di quanto venne, poi, riportato in vita da Gassendi ma fu solo con Boyle che l’idea di atomo fu per la prima volta connessa con la chimica; ed è proprio dalla chimica che partiremo nel prossimo paragrafo.

## **Interazioni chimiche tra continui materiali**

E’ la chimica che studia le interazioni materia–materia più tipiche del mondo che ci circonda. Quando mettiamo insieme due sostanze, A e B, possono accadere molte cose diverse. Vediamone alcune come esempio.

Può non succedere fondamentalmente niente: per esempio mettendo insieme a temperatura ambiente della sabbia e della farina otteniamo una miscela eterogenea in cui i granelli di sabbia e di farina sono ben separati gli uni dagli altri.

Possiamo avere delle miscele omogenee nelle quali i rapporti tra i componenti possono variare moltissimo. Per esempio i gas sono, in generale, miscibili tra di loro in qualsiasi rapporto. Basta pensare all’aria, formata da circa il 75.5% di azoto, dal 23.2% di ossigeno e dall’1.3% di gas

nobili. Possiamo aggiungere quanto vapore d'acqua, anidride carbonica, ecc. vogliamo... e otteniamo, in un certo senso, sempre aria... Anche i liquidi possono dar luogo a miscele omogenee di composizione variabile (possiamo miscelare acqua e vino nelle proporzioni che vogliamo...). Mescolando acqua e zucchero possiamo formare degli sciroppi di diversa composizione (ma in questo caso non di qualsiasi concentrazione perché, quando è troppo, lo zucchero non si scioglie più).

In questi ultimi tre casi si capisce che le proprietà delle soluzioni (per esempio la dolcezza dello sciroppo) variano con continuità. Discorso analogo si può fare anche per le leghe. In tutti questi casi si ha una chimica dei continui materiali che per essere spiegata non ha un bisogno essenziale dell'idea di atomo, perché le sostanze si miscelano fra di loro in rapporti estremamente variabili e le loro proprietà variano con continuità.

Possiamo avere, però, ed è questo il caso che qui ci interessa, delle reazioni chimiche, nelle quali due o più sostanze interagiscono tra loro e danno luogo ad una sostanza del tutto "nuova", dei nuovi composti. Verso la fine del '700 i chimici cominciarono a capire come gli elementi si combinano a formare i composti nelle varie reazioni. Lavoisier enunciò la legge di conservazione della massa nelle reazioni chimiche ed introdusse la definizione di elemento come di "sostanza elementare". Se avviene una reazione tra la sostanza A e la sostanza B, allora sperimentalmente si possono mettere in evidenza alcune leggi fenomenologiche che, a dispetto delle enormi diversità delle varie reazioni, sono poche e semplici; eccole.

#### Legge delle proporzioni definite (Proust):

- In qualsiasi campione di un certo composto, gli elementi<sup>1</sup> che lo compongono sono presenti in un rapporto in peso definito e costante.

Questo significa che un dato composto ha una composizione ben precisa ed invariabile (e questo lo differenzia dalle miscele). Ad esempio:

per formare il cloruro di sodio:

23 g di Na reagiscono con 35.5g di Cl ma anche

4.6 g di Na reagiscono con 7.1g di Cl, ...

il rapporto:

peso(Na)/peso(Cl) è sempre 1/1.54 (in entrambi, e in tutti, i casi).

#### Legge delle proporzioni multiple (Dalton):

- Se due elementi A e B si combinano a formare diversi composti allora, fissato il peso di A, i pesi di B nei diversi composti stanno tra loro in rapporti costituiti da numeri interi piccoli.

Ad esempio l'azoto e l'ossigeno si combinano fra loro per formare diversi composti; e all'incirca:

nel protossido di azoto      28g di azoto si combinano con 16g di ossigeno

nell'ossido di azoto      28g di azoto si combinano con 32g di ossigeno

nel triossido di azoto      28g di azoto si combinano con 48g di ossigeno

nel tetrossido di azoto      28g di azoto si combinano con 64g di ossigeno

nel pentossido di azoto      28g di azoto si combinano con 80g di ossigeno

con i rapporti fra le quantità di ossigeno che sono dati, per l'appunto dal rapporto fra numeri interi piccoli.

#### Legge dei volumi di combinazione (Gay Lussac):

- Nelle reazioni tra gas nelle stesse condizioni di pressione e temperatura, i volumi dei reagenti e i volumi dei prodotti stanno tra loro in rapporti costituiti da numeri interi piccoli.

Cioè, ad esempio, indicativamente, a pressione e temperatura ambiente:

2 volumi di idrogeno + 1 volume di ossigeno → 2 volumi di acqua  
1 volume di idrogeno + 1 volume di cloro → 2 volumi di acido cloridrico  
3 volumi di idrogeno + 1 volume di azoto → 2 volumi di ammoniaca

Legge degli equivalenti:

- Se due elementi A e B si combinano sia tra loro, sia con un terzo elemento C, allora le quantità di A e B che si combinano con una quantità fissa di C si combinano anche tra loro.

Ad esempio idrogeno e carbonio si combinano sia tra loro sia con l'ossigeno, infatti (circa):

16g di ossigeno + 2 g di idrogeno → 18g di acqua  
16g di ossigeno + 12g di carbonio → 28g di monossido di carbonio  
allora  
2g di idrogeno + 12 di carbonio → 14g di etilene

Sono proprio queste leggi semplici che spingono a interpretare tutta la dinamica descritta dalla chimica in termini di interazioni locali e universali tra opportuni quanti. Nascono così le idee moderne di atomo (principalmente per merito di John Dalton), di ione, di molecola (parola derivata dal latino e che significa “piccola massa” e che fu introdotta da Amedeo Avogadro). Attraverso l'uso di tali concetti le complesse interazioni chimiche vengono spiegate in termini semplici. Si capisce, così, che l'idea di atomo nasce per descrivere le interazioni tra i continui materiali. Là dove le interazioni non ci sono (per esempio nelle miscele tra gas) l'idea di atomo non serve; ma quando dobbiamo trattare le interazioni (chimiche) essa diventa indispensabile. La materia può essere, cioè, descritta come un continuo, mentre le interazioni materia-materia risultano locali e quantizzate. Certamente i chimici dei primi dell'800 pensavano che l'idea di atomo potesse essere utilizzata sempre, non solo per descrivere le interazioni tra le diverse sostanze; pensavano che la materia fosse “fatta da” atomi e non che gli atomi “servissero” soltanto per costruire una teoria delle interazioni chimiche.

Le idee di atomo e di molecola non rimasero confinate in chimica: anche i fisici verso la metà del 1800 cominciarono a utilizzarla per spiegare le proprietà dei gas. Nel 1857 Clausius formulò la teoria cinetica dei gas che fu successivamente sviluppata da Maxwell e da Boltzmann. Nell'uso che ne fecero i fisici gli atomi non erano degli “strumenti” per spiegare le interazioni ma dei veri e propri corpuscoli obbedienti alle leggi del moto di Newton. Alcune decine di anni dopo ci si accorse che questa idea doveva essere corretta: l'idea ingenua di corpuscolo dovette essere profondamente modificata, in compenso si scoprì che qualunque “sostanza” non autointeragente, non solo materiale, per esempio la luce, una volta confinata all'interno di un certo volume, (come accade ai gas nella teoria cinetica) obbedisce a leggi fenomenologiche spiegabili in termini di quanti.

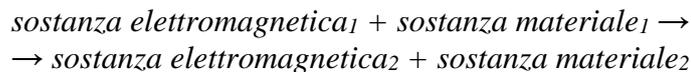
Noi qui vogliamo cominciare ad assumere un atteggiamento “minimalista” e considerare le cose per “quelle che appaiono” dalla chimica senza allargarci troppo...

Diremo allora, un po' rozzamente, che l'atomo è un comodo schema concettuale che i chimici usano per descrivere le interazioni tra sostanze (più che un oggetto materiale, per quanto piccolo, che compone la materia, vedremo più avanti che questo atteggiamento, qui solo possibile ma non necessario, troverà alcune profonde giustificazioni).

## **Interazione luce-materia**

Abbiamo visto come alcune le leggi di interazione materia-materia sono studiate dalla chimica. E' interessante, però, osservare che la materia interagisce anche con la radiazione elettromagnetica. Vista l'analogia di comportamento tra materia e radiazione, almeno per quanto riguarda la propagazione libera, possiamo aspettarci che anche le leggi fenomenologiche descrittive l'interazione tra luce e materia possano essere studiate e interpretate dicendo che un atomo di materia (usiamo qui il termine atomo in senso ampio, come sinonimo di quanto), ha interagito con un "atomo di luce". Ovviamente ci saranno situazioni in cui questa descrizione è inutile (per esempio nel caso della riflessione della luce da parte di uno specchio o nel caso della rifrazione, nel quale la teoria delle onde sembra sufficiente; un po' come succedeva in chimica per le miscele...), ma ci saranno anche altre situazioni nelle quali l'avvenuta interazione si manifesta in una trasformazione marcata della materia e/o della radiazione. Un esempio molto comune di quanto stiamo dicendo è rappresentato dalla fotografia. Una lastra fotografica lasciata a contatto con la luce viene da questa "impressionata", subisce, cioè, una trasformazione chimica che rivela l'immagine che vogliamo fotografare. Nonostante l'evidenza dell'analogia tra questo processo e i tradizionali processi chimici materia-materia, non ci occuperemo qui di fotografia, perché da altri esempi di interazione possiamo ricavare più facilmente alcune leggi fenomenologiche che cercheremo di interpretare in base all'ipotesi "atomica" di interazione radiazione-materia.

In effetti, analogamente a quanto avviene per le reazioni squisitamente chimiche, ha senso schematizzare alcuni processi come segue:



E' facile pensare alla materia come composta da "granellini" e alla luce come "composta" di onde. Come stiamo ormai dicendo da un po', questo modo di pensare è, però, troppo ingenuo e andrà rivisto (ce ne occuperemo fra non molto), però i "granellini", che chiameremo quanti, sono fondamentali nella descrizione delle interazioni, e questa semplice considerazione sembra valere sempre, che si tratti di radiazione elettromagnetica o di materia di qualunque tipo. I quanti prenderanno nomi diversi a seconda della circostanza: i quanti delle reazioni chimiche sono gli atomi o gli ioni, i quanti della radiazione elettromagnetica vengono detti fotoni. Vogliamo mostrare quanto questa idea sia semplice e proficua.

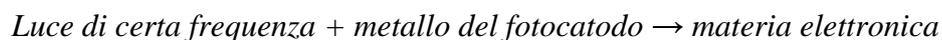
Proviamo, quindi, a considerare due casi emblematici, quello dell'effetto fotoelettrico e dell'effetto Compton; vedremo come le leggi fenomenologiche che li descrivono possano essere facilmente interpretate in termini di interazioni quantizzate.

Presentiamo queste ben note fenomenologie in maniera un po' diversa da quanto viene fatto usualmente e con un occhio particolare alla loro traduzione didattica (anche se non daremo una trattazione "pronta" per la scuola superiore). In particolare non cercheremo di mettere in evidenza le difficoltà dell'elettrodinamica classica nello spiegare questi effetti ma, anzi, faremo in modo che sia "naturale" interpretare i fenomeni in termini quantistici, vista la loro analogia con le reazioni chimiche. Metteremo in evidenza più che cosa un modello (quello quantistico) è capace di fare piuttosto che concentrarci su che cosa una teoria non riesce a descrivere, anche perché la cosa può essere talvolta anche molto difficile a farsi.

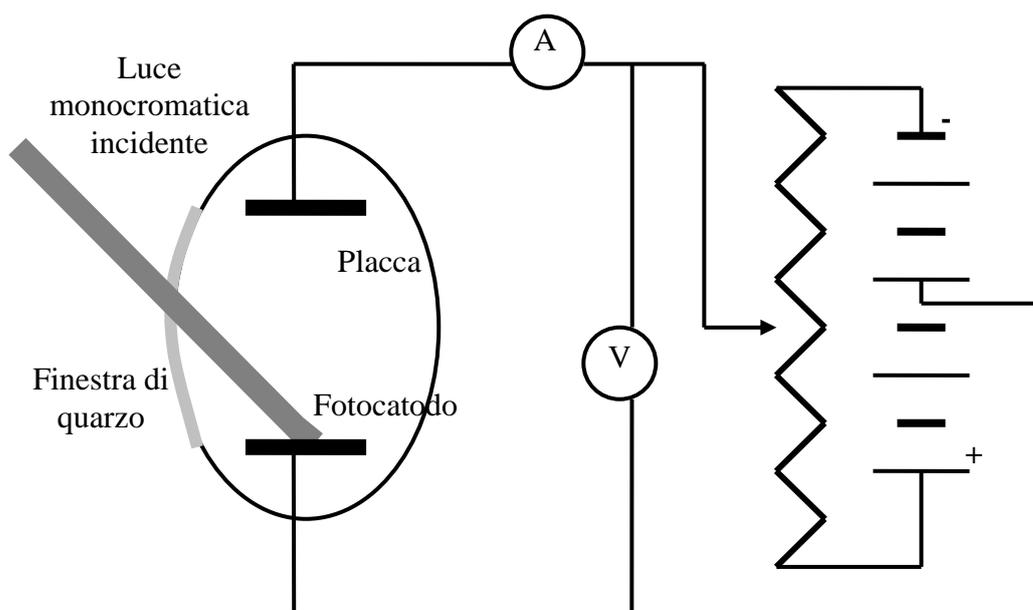
### ***Effetto fotoelettrico***

La fenomenologia dell'effetto presenta alcune analogie con quella delle interazioni chimiche: due "sostanze", quella della lastra materiale e quella della radiazione elettromagnetica di una

certa frequenza, vengono in contatto e, nella reazione, si produce “materia elettronica” secondo lo schema:



Il *set-up* sperimentale (di Lenard) per fare misure sull’effetto fotoelettrico è il seguente (Fig. 5.1).



**Fig. 5.1** Schema dell’apparato sperimentale di Lenard. Della luce monocromatica entra nell’ampolla di vetro, all’interno della quale è fatto il vuoto, attraverso una finestra di quarzo e incide su una piastrina detta fotocatodo.

Un circuito potenziometrico permette di stabilire una differenza di potenziale variabile  $\Delta V$  (misurata dal voltmetro  $V$ ) tra il fotocatodo e un'altra piastrina detta placca; se della sostanza elettronica, emessa per effetto fotoelettrico, raggiunge quest'ultima, il microamperometro  $A$  segna il passaggio di una corrente  $i$ . Lenard fece varie esperienze misurando la corrente  $i$  al variare: della differenza di potenziale  $\Delta V$ , dell'intensità  $I$  e della frequenza  $\nu$  della luce incidente, mantenendo di volta in volta fisse due di queste grandezze e variando la terza.

### Fatti sperimentali e loro prima interpretazione

Nel 1887 Hertz osservò che se della luce ultravioletta passa attraverso lo spazio compreso tra due elettrodi, fra i quali vi è un'elevata differenza di potenziale, può facilmente scoccare una scintilla.

Un anno dopo Hallwachs scoprì che un metallo carico negativamente si scarica molto rapidamente se viene colpito da luce ultravioletta mentre se lo stesso viene caricato positivamente questo effetto non si osserva (effetto Hallwachs).

Per sperimentarlo basta collegare ad un elettroscopio una lastra di zinco, ben pulita in superficie per togliere le eventuali tracce di ossido, caricare questa negativamente tramite una macchina elettrostatica (in questo modo sale l'indice dell'elettroscopio) e illuminare lo zinco con la luce emessa da una lampada al mercurio. Così facendo si nota che l'indice dell'elettroscopio comincia a scendere fino a raggiungere lo zero nel tempo di qualche minuto, indicando così che la lastra si è scaricata.

Se, mentre lo zinco si sta scaricando, viene interposta una lastra di vetro tra la lampada e

lo stesso zinco l'effetto si interrompe, mentre se viene interposta una lastra di vetro acrilico oppure una di quarzo l'elettroscopio si scarica ugualmente.

Se ripetiamo l'esperimento caricando lo zinco positivamente piuttosto che negativamente notiamo invece che l'elettroscopio non si scarica. Fig. I-2.

Si possono eseguire molte altre esperienze analoghe a questa e tutte forniscono risultati dello stesso tipo: alcuni corpi colpiti dalla luce emettono delle particelle negative; questa emissione è provocata dalle componenti della luce incidente con frequenza più elevata (queste infatti, come sappiamo dall'ottica, oltrepassano la lastra di vetro acrilico e quella di quarzo ma non quella di vetro). Gli studi successivi si devono a Lenard che misurando il rapporto  $e/m$ <sup>1</sup> tra la carica e la massa di queste particelle le identificò come elettroni (1899).

L'apparato utilizzato da Lenard è costituito da un'ampolla di vetro in cui è fatto il vuoto ( $\approx 10^{-10}$  Pa). Della luce ultravioletta entra da una finestra di quarzo e colpisce la lastra metallica del catodo (M). Questa viene tenuta a un potenziale negativo rispetto a quello di un elettrodo collimatore (E) posto a terra (cioè a potenziale zero). In E vi è un piccolo foro circolare che serve a selezionare un pennello di particelle negative uscenti da M ed accelerate dalla differenza di potenziale di circa 10 000V esistente tra M ed E e misurata da un voltmetro V.

Un campo magnetico omogeneo B è applicato ortogonalmente al piano in cui si muovono le particelle, dalla parte opposta di M rispetto ad E, così che, a causa della forza di Lorentz, in quella zona le particelle cariche percorreranno degli archi di circonferenza di raggio r.

Variando i valori di B possiamo fare arrivare le particelle su una placca (P), in modo che un milliamperometro (A) ne registri il passaggio. Indicando con v la velocità delle particelle nella zona del campo magnetico e osservando che per la geometria dell'apparato v è ortogonale a B, la forza di Lorentz risulta  $evB$ . Quest'ultima è proprio la forza centripeta che fa curvare le particelle e pertanto si ha

$$evB = \frac{mv^2}{r} \quad (\text{I-1})$$

da cui abbiamo

$$\frac{e}{m} = \frac{v}{Br} \quad (\text{I-2})$$

Ora, se trascuriamo la velocità con la quale sono emesse le particelle rispetto alla velocità che queste acquistano per l'elevata differenza di potenziale, possiamo dire che, al di là di E, l'energia cinetica delle particelle è uguale alla differenza di energia potenziale subita da queste, cioè

$$eV = \frac{1}{2}mv^2 \quad (\text{I-3})$$

---

<sup>1</sup> Risulta  $e/m \approx 1,7 \times 10^{11}$  C/kg

cioè

$$\frac{e}{m} = \frac{\mathbf{v}^2}{2V} \quad (\text{I-4})$$

Possiamo allora risolvere il sistema delle due equazioni precedenti

$$\begin{cases} \frac{e}{m} = \frac{\mathbf{v}}{Br} \\ \frac{e}{m} = \frac{\mathbf{v}^2}{2V} \end{cases} \quad (\text{I-5})$$

nelle due incognite  $v$  ed  $e/m$  ottenendo

$$\begin{cases} \frac{e}{m} = \frac{2V}{B^2 r^2} \\ \mathbf{v} = \frac{2V}{Br} \end{cases} \quad (\text{I-6})$$

Il raggio  $r$  descritto dalle particelle è misurabile così come i valori di  $B$  e  $V$  e pertanto si può calcolare il rapporto  $e/m$  che Lenard trovò identico a quello misurato per gli elettroni. Ulteriori analisi, sempre di Lenard (1902), fornirono importanti risultati. Uno schema dell'apparato da lui usato per studiare l'effetto fotoelettrico è una variazione del precedente ed è mostrato in fig. 5.1

La luce monocromatica entra nell'ampolla di vetro attraverso la finestra di quarzo e incide sul fotocatodo. Un circuito potenziometrico permette di stabilire una differenza di potenziale variabile  $\Delta V$  (misurata dal voltmetro  $V$ ) tra il fotocatodo e la placca; se degli elettroni emessi per effetto fotoelettrico raggiungono quest'ultima, il microamperometro  $A$  segna il passaggio di una corrente  $i$ .

Lenard fece varie esperienze misurando la corrente  $i$  al variare della differenza di potenziale  $\Delta V$ , dell'intensità  $I$  e della frequenza  $\nu$  della luce incidente, mantenendo di volta in volta fisse due di queste grandezze e variando la terza. Possiamo quindi ricavare le seguenti leggi sperimentali.

1) Per ogni metallo esiste una frequenza caratteristica  $\nu_0$  detta frequenza di soglia, tale che, qualunque sia l'intensità luminosa  $I$ , se la radiazione incidente ha frequenza  $\nu < \nu_0$  l'emissione fotoelettrica non avviene.

2) Esiste una differenza di potenziale frenante  $V_a$  negativa, detta potenziale di arresto, tale che per differenze di potenziale  $\Delta V < V_a$  non si misura alcuna corrente nell'amperometro, mentre per differenze di potenziale  $\Delta V > V_a$  si misura una corrente di placca che aumenta fino

a raggiungere un valore costante che risulta indipendente da  $V$ . Fig. I-6.

Ciò significa che gli elettroni escono dal fotocatodo con energie cinetiche che variano da zero fino ad un valore massimo  $E_{c,max} = eV_a$ . Tale energia cinetica massima cresce al crescere di  $\nu$  (fig. I-7) ma è indipendente da  $I$  (fig. I-8). Dipende invece dalla natura dell'elettrodo, come si può verificare con elettrodi di materiali diversi

3) L'intensità di corrente  $i$  è proporzionale all'intensità luminosa  $I$ .

Inoltre si rivelò che

4) L'emissione di elettroni è praticamente immediata qualunque sia l'intensità della luce incidente (il tempo di emissione è  $\approx 10^{-9}$  s anche per  $I$  molto basse).

- 1) Per ogni metallo esiste una frequenza caratteristica  $\nu_0$ , detta frequenza di soglia, tale che, se la radiazione incidente ha frequenza  $\nu < \nu_0$ , qualunque sia l'intensità luminosa  $I$ , l'emissione fotoelettrica non avviene.
- 2) Esiste una differenza di potenziale frenante  $V_a$  negativa, detta potenziale di arresto, tale che per differenze di potenziale  $\Delta V < V_a$  (quindi in modulo  $|\Delta V| < |V_a|$ ) non si misura alcuna corrente nell'amperometro mentre, per differenze di potenziale  $\Delta V > V_a$ , si misura una corrente di placca, che aumenta fino a raggiungere un valore costante che risulta indipendente da  $\Delta V$ .
- 3) L'intensità di corrente  $i$  è proporzionale all'intensità luminosa  $I$ .
- 4) L'emissione fotoelettrica è praticamente immediata, qualunque sia l'intensità della luce incidente; (il tempo di emissione è di circa  $10^{-9}$  s anche per  $I$  molto basse).

Da 1) e 2) ricaviamo che la sostanza elettronica che esce dal fotocatodo ha energia cinetica per unità di volume che varia da zero fino ad un valore massimo  $E_{c,max} = \rho V_a$  (avendo indicato con  $\rho$  la densità di carica per unità di volume). Tale densità di energia cinetica massima cresce al crescere di  $\nu$  (ma è indipendente da  $I$ ). Essa dipende, invece, dalla natura dell'elettrodo, come si può verificare con elettrodi di materiali diversi.

Sempre in analogia a quanto facciamo in chimica, supponiamo, allora, che l'effetto fotoelettrico possa essere spiegato dal fatto che, nell'interazione tra la luce incidente e la materia, alcuni quanti di luce (l'analogo per la luce di quello che sono atomi e gli elettroni per la materia) interagiscano con alcuni quanti materiali.

Cerchiamo ora di capire qualcosa di più di questi "ipotetici" quanti elettromagnetici. La "sostanza" elettromagnetica è caratterizzata essenzialmente da energia, quantità di moto, polarizzazione e frequenza. Ora, energia e quantità di moto sono grandezze fra loro proporzionali (in modulo) e ci dicono, in qualche modo, "quanta" materia elettromagnetica è in gioco; la frequenza è l'unica quantità che può determinare, per così dire, il "tipo" di sostanza elettromagnetica in esame, mentre la polarizzazione sembra legata alla struttura matematica del campo in esame, cioè al fatto che il campo studiato sia scalare, vettoriale, spinoriale, tensoriale, ecc..

Volendo introdurre una quantizzazione della radiazione siamo, quindi, indotti a supporre che, fissata "la sostanza", cioè fissata la frequenza, la grandezza scambiata in maniera quantizzata nell'interazione (ricordiamo che gli atomi di una sostanza sono tutti identici) sia l'energia (o la quantità di moto che, tanto, è ad essa proporzionale). In altri termini supponiamo che

nell'interazione venga scambiato un quanto di energia  $E$  (e quantità di moto  $E/c$ ) il cui valore dipende dal tipo di sostanza elettromagnetica considerata (cioè dalla sua frequenza) e per il quale, perciò, possiamo scrivere

$$E = f(\nu) \quad (5.1)$$

essendo  $f$  una funzione per ora sconosciuta. Osserviamo che è la prima volta che nella nostra presentazione didattica introduciamo l'idea di quanto della radiazione elettromagnetica; non abbiamo parlato dello spettro del corpo nero e della sua spiegazione ad opera di Planck, perciò non abbiamo alcun motivo per supporre valida la formula  $E=h\nu$ ; ad essa stiamo arrivando per un'altra via.

L'effetto fotoelettrico può essere spiegato utilizzando le chiare parole di Einstein in uno dei suoi famosi lavori del 1905. Adatteremo quanto da lui scritto alla nostra presentazione, che è fatta "col senno di poi"; in pratica la variazione più importante che apporteremo alle sue parole sarà la sostituzione di  $E=h\nu$  con  $E = f(\nu)$ . Ecco il discorso di Einstein, adattato ai nostri scopi.

*“Se ci si rifà all'idea che la luce scambi quanti di energia di intensità  $f(\nu)$  [dove  $f$  è una funzione da determinarsi] con quanti della materia elettronica, è possibile spiegare l'emissione fotoelettrica nel seguente modo. I quanti di energia [chiamiamoli fotoni] vengono ceduti ai quanti della materia elettronica [i già conosciuti "elettroni" della chimica]. L'energia di un elettrone sarà, quindi la somma dell'energia di legame  $-W_0$ , che lo confina nel metallo e dell'energia fornitagli da un fotone.*

*L'energia cinetica massima di ciascuno dei quanti della materia elettronica che fuoriescono dal metallo sarà, quindi:*

$$E_{c,max} = f(\nu) - W_0 \quad (5.2)$$

Utilizzando tale modello, si possono, allora, spiegare le leggi fenomenologiche ottenute da Lenard.

- I. L'esistenza della soglia fotoelettrica si spiega pensando che se un fotone ha frequenza  $\nu$  tale che la sua energia

$$E = f(\nu) < W_0 \quad (5.3)$$

allora esso non ha abbastanza energia per estrarre un elettrone; quindi, se  $f$  è una funzione crescente, soltanto per frequenza maggiori di un certa frequenza  $\nu_0$  (frequenza di soglia) possiamo avere l'emissione.

- II. Se ogni fotone cede tutta la sua energia ad un solo elettrone, allora l'energia cinetica massima degli elettroni emessi non può dipendere dall'intensità luminosa ma solo dall'energia del fotone; inoltre, all'aumentare della differenza di potenziale  $\Delta V$  (positiva), aumenta la quantità di sostanza elettronica che, pur emessa in varie direzioni, raggiunge l'anodo, fino a quando vi arriva tutta. Osserviamo ancora che si hanno potenziali d'arresto  $V_a$  che diventano sempre più negativi all'aumentare della frequenza della luce incidente.

- III. L'intensità di corrente è proporzionale alla quantità di carica della materia

elettronica che arriva sulla placca nell'unità di tempo, questa è proporzionale al numero di elettroni che hanno interagito scambiando “sufficiente” energia con i fotoni che interagiscono sulla piastra; numero che, a sua volta, è proporzionale all'intensità luminosa. Questo spiega perché l'intensità di corrente è proporzionale all'intensità luminosa.

- IV. Essendo l'emissione dovuta all'assorbimento di un singolo fotone essa è praticamente istantanea.

Una volta spiegati i dati sperimentali è possibile passare alle previsioni che può dare il modello (aspetto fondamentale per una “buona” fisica).

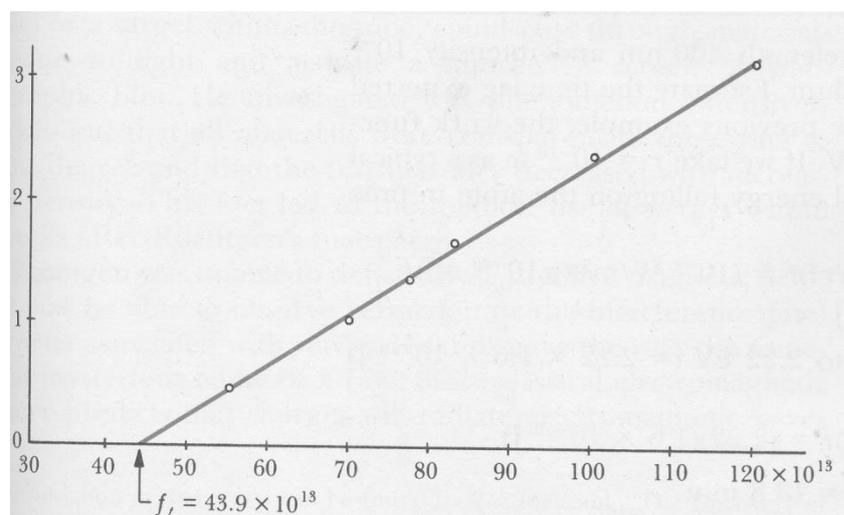
È possibile calcolare  $E_{c,max}$  applicando una differenza di potenziale frenante fra l'anodo e il catodo dell'apparato di Lenard e misurare per quale valore di  $V_a$ , (potenziale d'arresto) non si ha più passaggio di corrente. Infatti per tale valore si ha;

$$E_{c,max} = eV_a \quad (5.4)$$

e quindi, in base al modello risulta:

$$V_a = \frac{f(\nu)}{e} - \frac{f(\nu_0)}{e} \quad (5.5)$$

Allora, se la teoria qui elaborata è giusta, la curva del potenziale d'arresto in funzione della frequenza della luce incidente deve essere la stessa per tutti i metalli, a parte il valore dell'ordinata all'origine. Il controllo sperimentale della precedente relazione è, quindi, un test estremamente significativo della validità della teoria. Un controllo definitivo fu portato a termine da Millikan nel 1915, dopo dieci anni di duro lavoro. Egli trovò effettivamente che la funzione  $f(\nu)$  è universale e, in particolare, è una retta che, per tutte sostanze usate come fotocatodo, ha lo stesso coefficiente angolare, (Fig. 5.2).



**Fig. 5.2** Potenziale di arresto (in volt) in funzione della frequenza della luce incidente (in hertz). Tratto dal lavoro originale di Millikan; *Phys. Rev.*, **7**, 362 (1916).

Dalla (5.5), e dalle misure ora descritte, si ha allora

$$f(\nu) = h\nu \quad (5.6)$$

dove  $h$  è una costante alla quale, dopo gli esperimenti di Millikan, possiamo attribuire il valore di circa  $6,6 \times 10^{-34}$  Js.

Il modello di interazione quantizzata ha superato una prima prova; cioè ha spiegato i dati sperimentali sulla fenomenologia dell'effetto fotoelettrico e ha previsto correttamente l'esistenza di una funzione universale che lega il potenziale d'arresto alla frequenza della luce incidente. L'idea di fotone prende corpo: serve a interpretare le leggi fenomenologiche dell'interazione luce-materia, tipiche dell'effetto fotoelettrico e, come fa ogni buona idea, predice un fatto nuovo: l'indipendenza della funzione  $f$  dal materiale del fotocatodo.

Osserviamo, ora, che le considerazioni fatte nel modello appena presentato sono incomplete: abbiamo trascurato di considerare la quantità di moto del fotone. Per come abbiamo introdotto l'idea di fotone, sembra, infatti, del tutto ragionevole, anzi necessario, attribuire ad un fotone di energia  $E$  anche una quantità di moto di modulo  $p=E/c$ , essendo questo il legame generale tra energia e quantità di moto nel caso del campo elettromagnetico. Nel lavoro di Einstein del 1905 di questo fatto non si tiene conto. La stessa cosa si fa, in generale, nella maggior parte dei manuali scolastici. E' ben triste vedere come i principi di conservazione, così fondamentali sia nella fisica classica che nella fisica quantistica ricevano così poca considerazione nella presentazione didattica di quest'ultima...

Proviamo noi ad applicare le leggi di conservazione dell'energia e della quantità di moto all'interazione locale elettrone fotone. Come prima ci comportiamo come se fossimo dei chimici e stessimo descrivendo la chimica delle interazioni tra luce e materia con un linguaggio che sia il più vicino possibile a quello delle reazioni chimiche in cui un atomo di una certa sostanza si lega con un atomo di un'altra sostanza ecc. Indichiamo con un apice le grandezze fisiche dopo l'interazione e senza apice quelle prima (le interazioni descrivono, infatti, proprio un cambiamento tra un prima e un dopo...). Il pedice  $e$  indichi le quantità relative all'elettrone. Solo per semplicità consideriamo il caso in cui risulti  $p_e=0$ . Si ha così (utilizzando la formula relativistica dell'energia):

$$\begin{cases} p'_e = p \\ E'_e = m_e c^2 + E \end{cases} \quad (5.7)$$

Per la conservazione della quantità di moto si ha poi:

$$p'_e = \frac{E}{c} \quad (5.8)$$

e, quindi:

$$E_e'^2 = m_e^2 c^4 + p_e'^2 c^2 = m_e^2 c^4 + E^2 \quad (5.9)$$

quadrato dell'espressione relativistica dell'energia per la (5.8)

Considerando la seconda delle (5.7) e quadrando si ha, invece:

$$E_e'^2 = m^2 c^4 + E^2 + 2mc^2 E \quad (5.10)$$

che risulta incompatibile con l'equazione (5.9)! A meno che non risulti  $E=0$  (caso in cui non si ha nemmeno l'interazione).

Il problema nasce dal fatto che l'interazione è a tre “corpi”: fotone, elettrone, lamina a cui è legato l'elettrone; e non a due! È la lamina a cui appartiene l'elettrone che rinculando bilancia la quantità di moto dell'elettrone. Esso ha, infatti, una massa molto maggiore di quella dell'elettrone e quindi nell'interazione si “porta via” buona parte della quantità di moto totale ma pochissima energia cinetica. Si capisce quindi che è essenziale, perché l'interpretazione dell'effetto fotoelettrico sia consistente, che l'elettrone possa essere considerato legato e, quindi, che le energie del fotone incidente siano dello stesso ordine di grandezza di quelle di legame. A questo punto non possiamo esimerci dal riprendere un'osservazione didattica fatta già in precedenza: ma come faranno a capire, degli studenti che, negli urti “classici” hanno utilizzato i principi di conservazione e che, invece, nel caso quantistico, non lo fanno?... E pensare che anche senza eseguire calcoli le cose non tornano...: nella descrizione che diamo di solito la luce incide dall'alto sulla piastra metallica... e gli elettroni invece di uscire verso il basso “sospinti” dal fotone, come sarebbe logico, escono verso l'alto!

Vogliamo fare, ora, alcune considerazioni che servono a rinforzare le idee espresse dal nostro modello di interazione quantizzata, alcune della quali legate alla discussione di fenomenologie “vicine” all'effetto fotoelettrico. Per non appesantire il discorso, che ormai crediamo sufficientemente chiaro, useremo qui di seguito una terminologia tradizionale e parleremo in termini di elettroni, fotoni ecc.

1. Per energie minori di quelle di legame e quindi per frequenze minori di quella di soglia (soprattutto per i semiconduttori), si può avere un aumento del numero di elettroni di conduzione, se i fotoni assorbiti hanno energia sufficiente a portare gli elettroni nella banda di conduzione, ma insufficiente a farli uscire dal metallo. Questo fenomeno si chiama fotoconducibilità.
2. Un metallo colpito dalla luce ne riflette buona parte mentre il metallo in generale si scalda (basta pensare ad un metallo esposto alla luce solare) a causa dell'energia che è trasferita dalla luce al metallo nel processo di assorbimento.
3. Se invece di usare un metallo usiamo una sostanza trasparente, la luce viene quasi completamente trasmessa e, anche in questo caso, solo pochi fotoni intervengono nell'effetto fotoelettrico.
4. È bene notare i valori tipici delle grandezze in gioco e cioè

$$V_a \approx 1 - 4\text{V}; \nu \approx 10^{14}\text{Hz}; \lambda \approx 4000\text{Å} \quad W \approx 1\text{eV} \quad (5.11)$$

5. Se il quadro teorico che abbiamo costruito è esatto per intensità elevate della radiazione incidente ci possiamo aspettare effetti dell'assorbimento successivo multiplo dei fotoni. E, infatti, è così; il gruppo di Saclay ha osservato dei rari fenomeni di ionizzazione dovuti all'assorbimento multiplo di fotoni provenienti da un laser ad elevatissima intensità. Con fotoni di 1,17 eV e intensità da  $10^{13}$  a  $10^{20}$

$W/m^2$  si sono notati processi di assorbimento multiplo, che hanno portato alla ionizzazione, coinvolgenti fino a 22 fotoni.

7. Finiamo ora con una delle più utili e conosciute applicazioni dell'effetto fotoelettrico e cioè il fotomoltiplicatore, che è uno strumento molto utile per rivelare e misurare l'intensità delle radiazioni elettromagnetiche.

Esso consiste in un tubo a vuoto nel quale sono inseriti: un fotocatodo sul quale incide la radiazione elettromagnetica, da una serie di elettrodi  $D_1, D_2, \dots, D_N$  detti dinodi, mantenuti ad una differenza di potenziale positiva di  $\approx 100V$  uno dall'altro, e da un anodo. Fig. I-11.

La luce incide sul fotocatodo e per effetto fotoelettrico produce la fuoriuscita di uno o più elettroni, i quali, accelerati dalla differenza di potenziale positiva, cadono sul primo dinodo  $D_1$ , producendo la fuoriuscita di un numero di elettroni maggiore del numero di quelli incidenti; questi elettroni, a loro volta, vengono accelerati verso il secondo dinodo e così via fino all'ultimo dinodo e infine all'anodo. Il risultato è che all'anodo si misura una corrente dalla quale si può risalire all'intensità della luce incidente (in generale la corrente misurata è proporzionale all'intensità luminosa). In questo modo si riescono a misurare intensità anche molto basse.

### ***Osservazioni didattiche***

1) Bisogna porre un po' di attenzione alla descrizione degli apparati sperimentali poiché per molti studenti è difficile capire il significato fisico anche dei circuiti più semplici.

2) Alcuni studenti hanno difficoltà a capire il significato fisico del potenziale di arresto: pensano che sia quel potenziale che blocca l'effetto fotoelettrico. E' bene insistere che non si rivela più un passaggio di corrente quando gli elettroni non riescono a raggiungere la placca e non necessariamente quando questi non escono dal metallo.

3) Alcuni ragazzi tendono ad interpretare l'esistenza della soglia fotoelettrica come ad un fenomeno di risonanza tra campo elettromagnetico ed elettroni negli atomi (molti studenti hanno sentito parlare di frequenza degli elettroni negli atomi nei corsi di chimica in relazione all'atomo di Bohr). Ricordiamo che se così fosse si avrebbe emissione solo per certe frequenze  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$  e non per  $\nu < \nu_0$ .

4) Dopo aver previsto la relazione lineare tra  $V_a$  e  $\nu$  può essere utile ripetere la prova di Millikan, con apparecchiature didattiche commerciali.

5) Alcuni studenti pensano al fotone come ad un treno di onde che si sposta (una specie di corda vibrante che si muove nello spazio). Si deve far osservare che una sola lunghezza d'onda nel visibile ha le dimensioni lineari di migliaia di atomi ed è quindi enormemente più grande di un elettrone.

6) Si usano spesso espressioni del tipo "fotone di frequenza  $\nu$ " o peggio "fotone di colore rosso, verde, ...". Didatticamente sarebbe opportuno evitarle perché inducono lo studente a pensare che il fotone abbia una frequenza o un colore. E' più corretto parlare di fotone associato ad un'onda di frequenza  $\nu$ , essendo questo il quanto di energia, cioè il minimo quantitativo di energia, che può scambiare un'onda monocromatica di tale frequenza (è una visione un po'

riduttiva ma non *misleading*). Per quanto riguarda il colore: ricordiamoci che è una nostra percezione, non certo una proprietà del fotone.

7) E' importante far affrontare agli studenti degli esercizi tradizionali numerici e far confrontare le grandezze tipiche in gioco con quelle macroscopiche.

8) E' utile far immaginare agli studenti cosa potrebbe accadere se  $h$  tendesse a zero o diventasse molto grande, in modo da far loro capire il ruolo di questa costante fondamentale.

### ***Spunti di approfondimento***

Una trattazione più approfondita dell'effetto fotoelettrico può essere data solo dopo aver studiato la teoria quantistica, tuttavia ci sembra utile indicare alcuni argomenti che andrebbero approfonditi, nel caso si fosse interessati ad un maggiore approfondimento della questione.

- 1) La statistica classica prevede che gli elettroni nei metalli a temperatura ambiente abbiano una energia cinetica media  $\langle E_c \rangle \approx 2 \times 10^{-2} \text{ eV}$  e siano distribuiti secondo una funzione che all'aumentare dell'energia decresce gradualmente dopo il valore medio. Fig. III-1.

Non si capisce allora come la soglia fotoelettrica possa essere così definita. Il problema nasce dal fatto che non si può utilizzare la statistica classica, occorre invece quella di Fermi-Dirac che prevede, per gli elettroni, una distribuzione di energia che decade bruscamente a zero dopo un valore critico. Fig. III-2.

In ogni caso però la soglia fotoelettrica è esattamente definita solo per  $T = 0 \text{ K}$ ; in effetti alcuni esperimenti hanno mostrato una emissione fotoelettrica anche per frequenze corrispondenti a fotoni con energia di  $0.2 \text{ eV}$  minore di quella della soglia a  $T = 0 \text{ K}$ . Ciò è comprensibile se facciamo riferimento alla precedente figura e se, tanto per fare un esempio, osserviamo che per  $T = 1000 \text{ K}$  si ha  $kT \approx 0.1 \text{ eV}$ .

- 2) Possiamo anche fare uno schema per rappresentare l'energia di legame degli elettroni nei metalli in cui si ha un potenziale periodico interno e una barriera di potenziale alla superficie. Fig. III-3.

- 4) Se applichiamo opportunamente un forte campo elettrico esternamente al metallo (in altri termini una elevata differenza di potenziale) la buca di potenziale in cui è immerso l'elettrone viene ad avere "pareti più basse" ed è così più facile estrarre lo stesso elettrone. Tale fenomeno genera quella che si chiama emissione di campo.

- 5) L'elettrone può essere accoppiato sia alla barriera di potenziale superficiale sia al potenziale periodico interno; si hanno così due effetti fotoelettrici: uno di volume e uno di superficie. E' difficile distinguere tra i due effetti ma per esempio Mayer, usando fotoni di energia compresa tra  $2.1 \text{ eV}$  (soglia) e  $4 \text{ eV}$  ha mostrato che per il potassio l'effetto di volume predomina.

L'importanza dell'effetto di volume aumenta all'aumentare dello spessore della lamina fotoemittitrice per poi rimanere costante oltre ad un certo spessore (che dipende dalla profondità di penetrazione dei fotoni nel materiale). Questo dipende dal materiale e dalla frequenza della radiazione incidente; per molti materiali nel visibile e nell'ultravioletto esso è di circa  $100 \text{ \AA}$ .

In ogni caso la profondità dalla quale possono uscire gli elettroni è quasi completamente determinata dalla lunghezza di scattering per gli elettroni di conduzione del metallo. Tale lunghezza (distanza media tra due scattering successivi per l'elettrone) dipende dall'energia dell'elettrone con una curva a U come in fig. III-4.

Nella zona del minimo di tale curva l'effetto fotoelettrico è allora praticamente solo di superficie.

5) Ci dovrebbe essere una dipendenza dell'emissione fotoelettrica dalla temperatura del metallo perché, per temperature elevate, gli elettroni dovrebbero possedere energie cinetiche grandi. In effetti, all'aumentare della temperatura, è sempre più facile estrarre gli elettroni dal metallo. La dipendenza della corrente fotoelettrica dalla temperatura è data da

$$i = \cos t T^2 f\left(\frac{h\nu - W_0}{kT}\right) \quad (\text{III-1})$$

La funzione  $f$  non varia molto al variare di  $\nu$  e  $T$  e pertanto l'intensità di corrente  $i$  è praticamente proporzionale al quadrato della temperatura; quindi per temperature abbastanza elevate gli elettroni fuoriescono dal metallo anche se questo non è colpito da onde elettromagnetiche.

6) La funzione lavoro  $W_0$  dipende molto dalle impurità superficiale e dalla struttura cristallografica. Più i piani cristallini sono impacchettati più la funzione lavoro assume valori elevati (per una superficie policristallina si ha una funzione lavoro che è una media delle varie funzioni lavoro).

7) Per un semiconduttore si ha un gap di energia tra la banda occupata dagli elettroni e la banda di conduzione. Perciò l'energia di soglia fotoelettrica è maggiore della funzione lavoro, così che a parità di questa un semiconduttore ha un soglia fotoelettrica maggiore di quella di un conduttore.

8) Si definisce rendimento quantico il rapporto tra il numero dei fotoni incidenti e quello degli elettroni emessi.

Se siamo interessati alla costruzione di fotocatodi siamo interessati a sostanze che abbiano un buon rendimento quantico e, quindi, un basso valore della funzione lavoro e un elevato assorbimento della radiazione incidente; la sostanza non deve essere allora né troppo riflettente né troppo trasparente.

Il rendimento quantico di una sostanza dipende dalla lunghezza d'onda dell'onda elettromagnetica incidente. Per la maggior parte delle superfici metalliche pure il rendimento nel punto di massimo della curva  $\eta = \eta(\lambda)$  è di circa solo lo 0.1% ma per sostanze multialcaline raggiunge anche il 20% .Fig. III-5.

Osserviamo che usando materiali con bassi valori della funzione lavoro bisogna diminuire la temperatura per evitare effetti termoionici.

9) Per sostanze in cui l'effetto fotoelettrico è selettivo (cioè l'effetto di volume è diverso dall'effetto superficiale) si può notare una differenza di rendimento usando un fascio obliquo di radiazione polarizzata: il rendimento è maggiore se il campo elettrico è

parallelo alla superficie metallica, minore se invece è ortogonale.

10) Il problema della conservazione della quantità di moto ci spinge a domandarci che cosa succeda per

$$v < v_0; \quad v \gg v_0$$

(scattering di Rayleigh, cioè riflessione, e fotoconducibilità per i semiconduttori nel primo caso, effetto Compton, effetto fotonucleare, produzione di coppie nel secondo).

11) Per  $v > v_0$  si ha l'effetto Auger. L'energia del fotone può essere sufficiente per eccitare un elettrone interno e portarlo su un livello più esterno. Rimane vacante così un livello che può essere riempito da un elettrone meno strettamente legato del precedente; l'energia così liberata sotto forma di fotone può a sua volta produrre l'emissione di elettroni da altri livelli. Il livello interno può essere riempito in molte maniere diverse e questo dà allo spettro energetico Auger una grande complessità.

12) Per  $v \gg v_0$  (fotoni con energia superiore ai 10 KeV) l'elettrone si può considerare praticamente libero dall'atomo e si ha l'effetto Compton.

Per energie dei fotoni superiori ai 10 MeV si ha l'effetto fotonucleare cioè l'emissione di neutroni o protoni da parte del nucleo che interagisce col fotone.

13) Per energie delle radiazioni incidenti superiori al MeV/fotone si ha la produzione di coppie nel campo del nucleo e per energie superiori ai 10 MeV/fotone la produzione di coppie nel campo degli elettroni. Molti di questi processi avvengono alle stesse energie ma con sezioni d'urto diverse.

Per energie molto maggiori di quelle dei fotoni della radiazione ultravioletta, ci aspettiamo effetti diversi, anzi, la bontà della nostra modellizzazione delle interazioni tramite scambio di quanti ci spinge a chiederci che cosa succeda quando le frequenze della radiazione incidente non corrispondano più a quelle della luce visibile o del vicino ultravioletto ma siano molto maggiori di queste (10.000 o 100.000 volte maggiori, ad esempio)... come nel caso dell'effetto Compton.

### ***Effetto Compton***

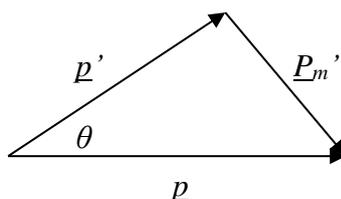
Nella descrizione di questo effetto utilizzeremo una terminologia per lo più tradizionale, per brevità, per quello che riguarda l'elettrone (nel senso che non staremo quasi mai a parlare di quanto del campo elettronico, parleremo più semplicemente di "elettrone" anche se intenderemo come oggetto primario sempre il campo e l'elettrone come esistente solo al momento dell'interazione considerata); e questo perché in questi paragrafi vogliamo mettere in evidenza come si possano generalizzare le idee della chimica alla descrizione delle interazioni del campo elettromagnetico (vogliamo, cioè dare consistenza all'idea di fotone e perciò useremo fin dove è possibile una terminologia relativa ad un continuo, per arrivare ad introdurre l'idea di fotone solo quando è necessario).

Come è stato osservato discutendo l'effetto fotoelettrico, un elettrone "libero", non può interagire con un'onda elettromagnetica assorbendone un fotone, infatti questo avverrebbe in violazione del principio di conservazione della quantità di moto. Da un punto di vista sperimentale questo significa che se i fotoni della radiazione incidente hanno energia maggiore,

diciamo, di 1keV, cioè una energia molto maggiore dell'energia di legame degli elettroni, l'effetto fotoelettrico non può avvenire, almeno con le modalità con cui è stato precedentemente descritto. Infatti, in tale caso, gli elettroni non sono sufficientemente accoppiati al reticolo cristallino e si possono, invece, considerare praticamente liberi. E' ragionevole supporre, allora, che gli elettroni vengano ugualmente "strappati" dal metallo (e che in questo senso l'effetto fotoelettrico si manifesti certamente) ma la radiazione interagente non sia più assorbita; ci si chiede, allora, che cosa accada alla radiazione elettromagnetica.

Supponiamo, allora, che un'onda elettromagnetica di frequenza molto maggiore di quelle utilizzate negli esperimenti di Lenard sull'effetto fotoelettrico incida su una lastrina metallica. Per quanto detto fin qui possiamo modellizzare il processo dicendo che l'onda verrà diffusa da parte degli elettroni della lastrina. Con un'ulteriore semplificazione consideriamo il singolo processo di *scattering* di una "porzione" dell'onda elettromagnetica da parte di un quanto materiale di massa  $m$  inizialmente in quiete e che possiamo considerare praticamente libero, cioè non legato al metallo; indichiamo con  $E, \underline{p}$  e  $E', \underline{p}'$  rispettivamente l'energia e la quantità di moto, della "porzione" della perturbazione elettromagnetica che viene deviata ad un certo angolo, prima e dopo lo scattering e con  $E'_m$  e  $\underline{p}'_m$  l'energia e la quantità di moto del quanto dopo lo *scattering* (come già detto, supponiamo, per semplicità, nulle quelle iniziali).

Allora, dai principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto si ha (Fig. 5.3):



**Fig. 5.3** Conservazione della quantità di moto nel processo di *scattering*

di una porzione di onda elettromagnetica da parte di una particella di massa  $m$ . Osserviamo che questo diagramma non rappresenta le direzioni dei singoli quanti prima e dopo l'interazione ma solo la conservazione della quantità di moto nel processo (siamo cioè nello spazio dei momenti e non nello spazio delle posizioni)

$$\begin{cases} E = E' + E_m \\ \underline{p} = \underline{p}' + \underline{p}'_m \end{cases} \quad (5.12)$$

da cui:

$$\begin{cases} p_m'^2 = p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta = \frac{1}{c^2} (E^2 + E'^2 - 2EE' \cos \theta) \\ p_m'^2 = \frac{(E + mc^2 - E')^2}{c^2} - m^2c^4 = \frac{1}{c^2} [E^2 + E'^2 + 2(E - E')mc^2 - 2EE'] \end{cases} \quad (5.13)$$

e allora uguagliando le due precedenti espressioni abbiamo:

$$E - E' = \frac{EE'}{mc^2} (1 - \cos \theta). \quad (5.14)$$

Da cui, dividendo per  $EE'$ :

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{EE'}{mc^2} (1 - \cos \theta). \quad (5.15)$$

L'analisi è stata fin qui condotta utilizzando solo i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto e senza preoccuparci dei meccanismi di interazione, così abbiamo trovato un'equazione per la perdita di energia della radiazione incidente.

Ricordando ora le conclusioni a cui siamo pervenuti studiando l'effetto fotoelettrico, è possibile supporre che la radiazione elettromagnetica interagisca con la particella di massa  $m$  tramite un solo fotone e scrivere pertanto, con ovvia simbologia, immaginando che la "porzione" di perturbazione elettromagnetica sia proprio quella descritta da un unico fotone:

$$E = h\nu; \quad E' = h\nu' \quad (5.16)$$

e ottenere quindi dalla (5.15):

$$\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} = \frac{h}{mc^2} (1 - \cos \theta) \quad (5.17)$$

ovvero, in termini di lunghezza d'onda:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta). \quad (5.18)$$

Cosicché la radiazione, diffusa ad un angolo  $\theta$  dalla direzione di incidenza, avrà una lunghezza d'onda  $\lambda(\theta)$  data da:

$$\lambda(\theta) = \lambda + \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta). \quad (5.19)$$

Niente di quanto abbiamo fin qui discusso dipende in modo esplicito dalle proprietà del quanto materiale e possiamo, perciò, riferirlo ad un qualsiasi quanto di massa  $m$  (purché sia in grado di diffondere la luce).

Il significato fisico di quanto visto fin qui è semplice ma conviene esplicitarlo nuovamente.

Una radiazione monocromatica di lunghezza d'onda  $\lambda$  che viene diffusa da un quanto "libero" di massa  $m$  dovrebbe subire una variazione della sua lunghezza d'onda che non dipende da  $\lambda$  ma solo da  $\theta$  e da  $m$ . Più precisamente la sua lunghezza d'onda, se la nostra teoria è vera, aumenterà all'aumentare dell'angolo di diffusione  $\theta$  e la sua massima variazione si avrà per  $\theta = 180^\circ$  e varrà:

$$\Delta\lambda_{\max} = \frac{2h}{mc}. \quad (5.20)$$

Se il quanto è un elettrone si avrà, allora:

$$\frac{h}{mc} \approx 0,024 \text{ \AA} \quad (5.21)$$

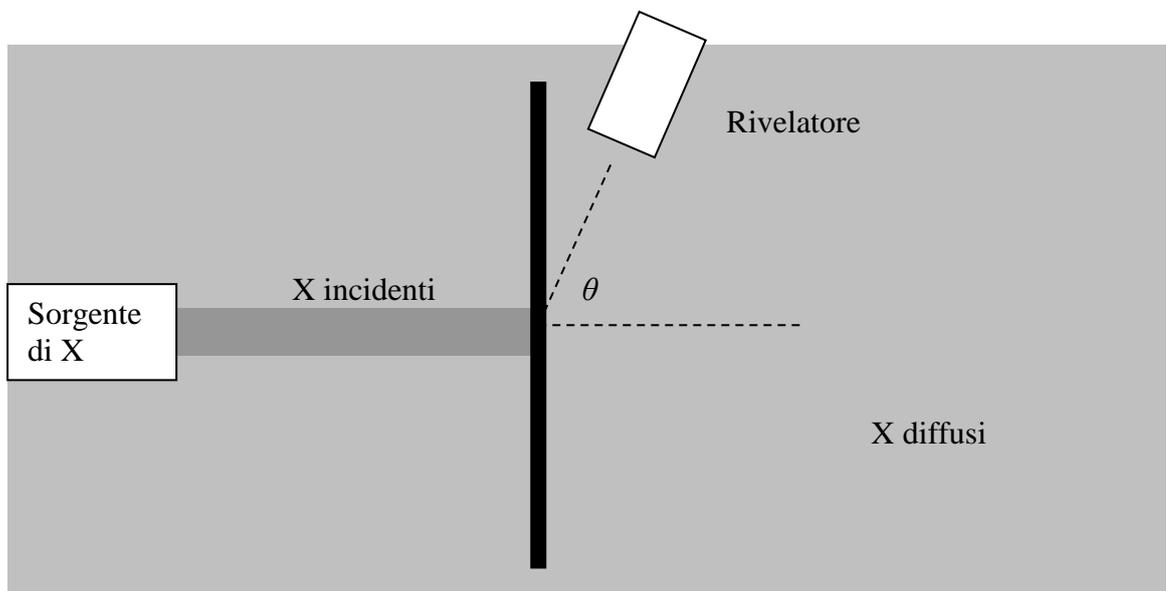
(e quindi in tal caso  $\Delta\lambda_{max} \approx 0,048 \text{ \AA}$ ) mentre se il quanto è qualcosa di molto più massivo si avrà in pratica:

$$\frac{h}{mc} \approx 0 \quad (5.22)$$

e quindi:

$$\Delta\lambda \approx 0. \quad (5.23)$$

Eseguiamo, allora, un esperimento con un fascio di raggi X (i cui fotoni hanno energie dell'ordine di una decina di keV) inviato contro un bersaglio di grafite e andiamo a misurare la lunghezza d'onda degli X diffusi ad un angolo  $\theta$  dalla direzione di incidenza, secondo il *set-up* sperimentale mostrato in Fig. 5.4.



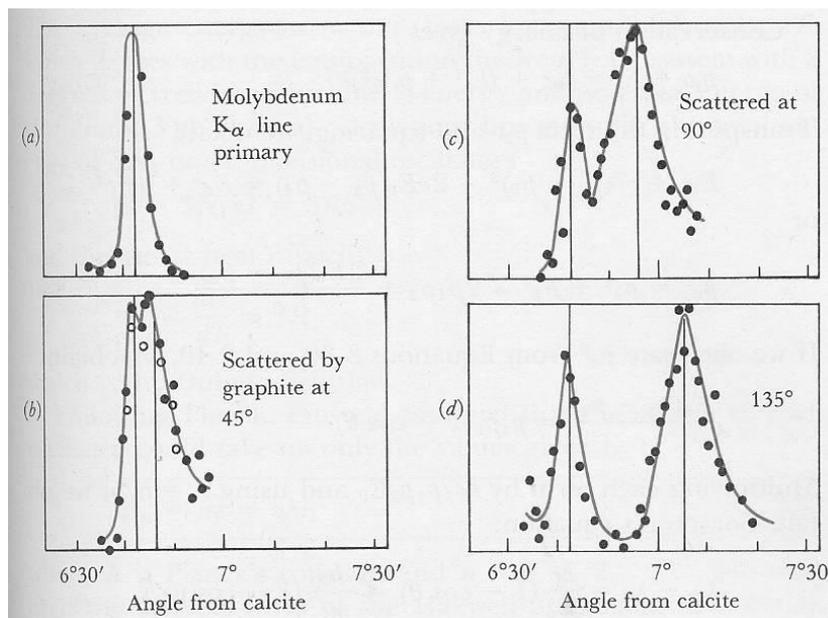
**Fig. 5.4** Rappresentazione schematica dell'effetto Compton. In grigio scuro il pennello di X incidenti sulla lamina di grafite; in grigio chiaro gli X diffusi in tutte le direzioni.

Se le nostre previsioni sono corrette ci aspettiamo di trovare una relazione del tipo:

$$\lambda(\theta) = \lambda + \text{cost}(1 - \cos\theta). \quad (5.24)$$

Eseguendo l'esperimento si trova che, in effetti, oltre ad una radiazione avente lunghezza d'onda  $\lambda$  uguale a quella della radiazione incidente, ve ne è anche un'altra, con una lunghezza d'onda  $\lambda'$  maggiore di  $\lambda$  e dipendente da  $\theta$  (Fig. 5.5) secondo la relazione

$$\Delta\lambda \approx 0,024 \text{ \AA} (1 - \cos\theta) \quad (5.25)$$



**Fig. 5.5** Intensità dei raggi X diffusi in funzione della lunghezza d'onda a vari angoli.  
 Tratto da A. Compton, Phys. Rev. **22**, 409 (1923); la figura è a pag. 411.

Possiamo, ora, spiegare i risultati dell'esperimento precedentemente in base alle considerazioni fatte sopra. La radiazione incidente sulla grafite può interagire con elettroni vincolati al reticolo cristallino (o direttamente con nuclei atomici), oppure con elettroni liberi; nei primi due casi la massa che compare nell'espressione  $h/mc$  è molto grande e questo dà una variazione di lunghezza d'onda della radiazione  $\Delta\lambda = 0$ ; nel secondo caso, invece, tale massa è molto più piccola e così otteniamo, proprio come previsto, la (5.25)! Ecco, allora, che il modello a fotoni dell'interazione del campo elettromagnetico con la materia diventa sempre più credibile in quanto prevede fatti nuovi, come per esempio la "reazione"

$$\text{luce di certa lunghezza d'onda} + \text{grafite della lamina} \rightarrow \\ \rightarrow \text{materia elettronica} + \text{luce di diversa lunghezza d'onda}$$

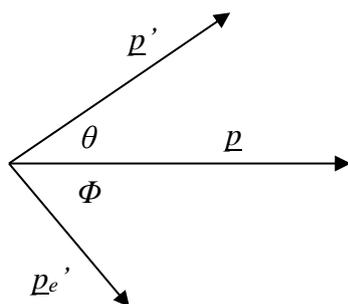
L'effetto qui presentato prende il nome di effetto Compton, dal nome del fisico che nel 1923 per primo lo studiò e lo interpretò. Storicamente le cose non andarono affatto così come le abbiamo raccontate noi e fu prima scoperto l'effetto sperimentalmente e poi ne fu data la spiegazione teorica; ma, come abbiamo più volte sottolineato, noi non seguiamo sempre la linea cronologica delle fatti...

La quantità  $h/mc$  è detta lunghezza Compton del quanto di massa  $m$ . Questo è solo un nome e non ha nulla a che vedere con le cosiddette proprietà ondulatorie della particella; è però interessante riprendere un'osservazione fatta nel capitolo precedente per dire che la lunghezza Compton di un quanto coincide sperimentalmente con l'inverso della costante  $\mu$  presente nell'equazione dei campi materiali, qualora espressa nelle unità di misura del Sistema Internazionale. Ecco così che il significato di tale costante diventa ora chiaro: essa rappresenta l'inverso della massa del quanto relativo al campo!

Per quanto visto fin qui, possiamo anche capire come mai la luce riflessa da un metallo in tutte le direzioni, non presenti variazioni di lunghezza d'onda (cioè abbia lo stesso colore di quella incidente). Ciò accade, infatti, perché la radiazione, che non dà luogo all'effetto fotoelettrico, viene diffusa dagli elettroni, che in questo caso, per le energie in gioco, sono legati al reticolo cristallino; in tal caso la massa che compare a denominatore nell'espressione  $h/mc$  è la massa

dell'intero metallo e allora, come abbiamo visto, risulterà  $\Delta\lambda \approx 0$ .

E' interessante notare che l'interpretazione qui fornita dello *scattering* di una radiazione elettromagnetica da parte di un elettrone libero fornisce anche un'altra previsione, riguardante la materia elettronica questa volta. Infatti lo studio fatto da noi è stato concentrato sulla variazione di energia della radiazione. Le stesse equazioni da noi scritte, però, danno anche informazioni sulla quantità di moto dell'elettrone dopo lo *scattering*. Alcuni calcoli, che per semplicità omettiamo, forniscono un collegamento tra l'angolo  $\theta$  di cui sopra e l'angolo  $\phi$ , formato tra la direzione della quantità di moto acquistata dall'elettrone e la direzione della radiazione incidente, come mostrato in Fig. 5.6.



**Fig. 5.6** Relazione tra le direzioni delle quantità di moto del fotone e dell'elettrone prima e dopo l'interazione

Abbiamo così:

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = - \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{mc\lambda}\right) \operatorname{tg} \phi} . \quad (5.26)$$

Un esperimento per verificare la precedente relazione fu fatto da Compton e Simon nel 1925<sup>ii</sup>. Essi controllarono che l'elettrone colpito dai raggi X ricevesse proprio un impulso nella direzione prevista dai principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto. Il risultato del difficile esperimento, che fruttò il premio Nobel a Compton nel 1927, fu convincente: la teoria forniva i risultati corretti! Ulteriori esperimenti furono fatti da H. Crane, E. Gaertner e J. Turin nel 1936. Essi, al posto degli X, utilizzarono raggi  $\gamma$  con fotoni di energia compresa tra 0.5 e 2.6 MeV, e, come bersaglio della celluloidi. Anche in questo caso i risultati furono in buon accordo con quanto previsto dal modello qui esposto.

Osserviamo, infine, che si verifica anche l'effetto Compton inverso, tanto comune in cosmologia, nel quale nell'interazione radiazione materia si ha una diminuzione di lunghezza d'onda della radiazione; tale effetto viene spiegato appunto come un effetto Compton... all'inverso...

### ***Altri esempi di interazione radiazione-materia***

Per illustrare quanto detto sopra diamo ora, senza alcun approfondimento, altri due esempi di processi importanti di interazione radiazione-materia, tipo reazione chimica. Proviamo a descriverli utilizzando l'idea di fotone come "atomo di luce"; immaginiamo ancora che ogni "tipo" di sostanza elettromagnetica interagisca tramite dei quanti, indicati con la lettera greca  $\gamma$ , detti fotoni.

Es.1 Alcuni processi importanti d'interazione tra la radiazione e la materia vanno in generale sotto il nome di fotosintesi. Principalmente in questi processi si ha la formazione di carboidrati dalla sintesi di biossido di carbonio e di acqua, prodotta dall'assorbimento di fotoni mediato da un composto, chiamato clorofilla. In simboli si può così scrivere:



Es. 2 Un altro processo importante è la dissociazione dell'ossigeno atmosferico dovuto all'assorbimento di radiazioni ultraviolette di lunghezza d'onda tra i  $1000 \text{ \AA}$  e  $2400 \text{ \AA}$  (corrispondente a fotoni di energia compresa tra i  $5,2\text{eV}$  e i  $7,8\text{eV}$ ). Esso si può schematizzare come segue:



L'ossigeno atomico si combina poi con l'ossigeno molecolare e forma l'ozono  $O_3$ , il quale, a sua volta, si dissocia interagendo con la radiazione ultravioletta di lunghezza d'onda compresa tra i  $2400 \text{ \AA}$  e i  $3600 \text{ \AA}$  (corrispondenti a fotoni di energia tra i  $3,4\text{eV}$  e i  $5,2\text{eV}$ ); in simboli:



Queste due reazioni assorbono praticamente tutte le radiazioni ultraviolette tra i  $1600 \text{ \AA}$  e i  $3600 \text{ \AA}$  che provengono dal sole, impedendo che raggiungano la Terra se non in piccole quantità.

Come abbiamo già osservato, l'idea di atomo, oltre a fornire un'eccellente base per l'interpretazione delle reazioni chimiche e delle interazioni radiazione-materia, svolge un ruolo importante anche nella teoria cinetica dei gas. Allora, spingendo ancora in avanti l'analogia di comportamento tra materia e radiazione, ci possiamo aspettare che anche nella spiegazioni della fenomenologia presentata da un gas "di luce" contenuto in una cavità, la struttura quantistica sia importante. In effetti è proprio così, come ben si capisce dal famoso problema della radiazione di corpo nero, che storicamente ha messo le premesse per l'idea di fotone e che noi invece, in questa rielaborazione dei "fatti" importanti, presentiamo dopo una discussione sulle interazioni tra radiazione e materia alla "stregua" della chimica. Non affronteremo qui ulteriormente il problema della radiazione emessa da una cavità ad una certa temperatura ma notiamo soltanto, infine, che l'analogia tra gas materiale e gas elettromagnetico è così stretta che si possono anche considerare, in modo simile a quanto fatto per i gas "materiali" anche cicli termodinamici per il gas di radiazione<sup>iii</sup>...

## NOTE

---

<sup>i</sup> Un elemento è una sostanza che non è possibile scindere chimicamente in altre sostanze e che non si può nemmeno ottenere dall'unione di altre sostanze.

<sup>ii</sup> Una bella simulazione del famoso esperimento di Compton e Simon è fatta nel software “Effetto Compton” di N. Bergomi, G. Vegni et al..

<sup>iii</sup> Cfr Lee M. H. “*Carnot cycle for photon gas?*”, Am. J. Phys. **69** (8), August 2001, 874-878.