Strumenti di misura e teoria degli errori

Laboratorio PLS@home
Dipartimento di Matematica e Fisica «E. De Giorgi»
Università del Salento

Strumenti di misura

Lo strumento di misura è un sistema fisico costruito sulla base di teorie e tecnologie opportune per ottenere informazioni su altri sistemi fisici con i quali si fa interagire.

Come già detto una misura può farsi tramite confronto diretto con l’unità di misura oppure tramite un apposito sistema, più o meno complesso, opportunamente **TARATO**.

Uno strumento si dice *tarato* quando sia stata determinata la sua risposta in corrispondenza di un certo numero di sollecitazioni note apportate da una grandezza omogenea a quella da misurare.

Principio di funzionamento

Sia

- ***G*** la grandezze fisica che si vuole misurare

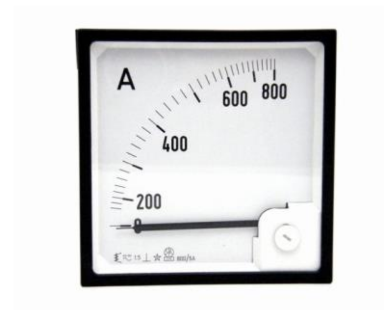
- ***V(G)*** il valore della grandezza che si vuole stimare tramite l'operazione di misura

- ***R(G)*** la risposta dello strumento ad una sollecitazione apportata dalla grandezza da misurare

Tipi di strumenti

Strumento analogico:

la risposta viene letta su una scala graduata sulla quale si muove un indice;



Strumento digitale:

la risposta analogica è digitalizzata
(e rappresentata in cifre su un supporto visivo-display).

Curva di risposta e scala

Al variare della sollecitazione apportata dalla grandezza fisica allo strumento di misura, varia la risposta dello strumento in base alle leggi che regolano il funzionamento dello strumento stesso.

Ogni strumento è caratterizzato da una funzione $R(G)$ che lega la risposta alla variazione della grandezza.

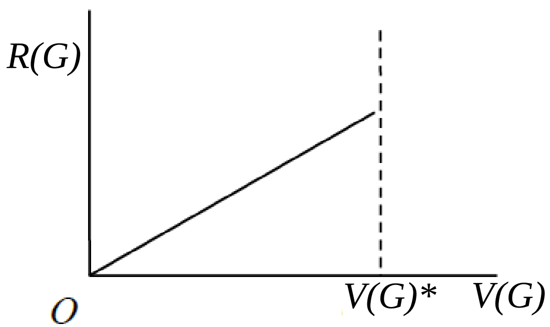
Affinchè lo strumento sia utilizzabile senza ambiguità è necessario che:

ad ogni valore di G ($\equiv V(G)$) corrisponda uno ed un solo valore di $R(G)$, e viceversa

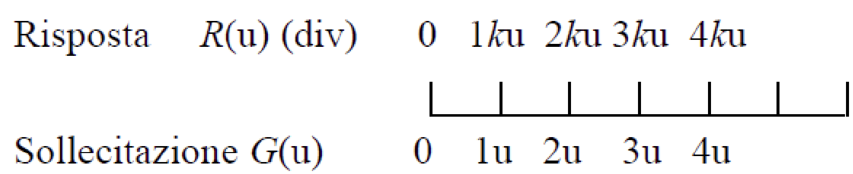
Curva di risposta e scala

Se la risposta è di tipo lineare:

$$R(G) = k \cdot V(G)$$



Scala lineare



Valore massimo apprezzabile dallo strumento (*portata*)

In uno strumento analogico $R(G)$ definisce la scala dello strumento (→ *la successione delle posizioni delle tacche con i corrispondenti valori*)

Caratteristiche generali degli strumenti di misura

Intervallo di funzionamento:
È dato dal valore minimo – *soglia* – e dal valore massimo – *portata* – della grandezza in esame che lo strumento è in grado di fornire

Fuori da questo intervallo la qualità della misura non è garantita ed in alcuni casi è possibile che lo strumento sia danneggiato

attenzione alla portata!

Prontezza:
È legata al tempo necessario (***tempo caratteristico*** $\boldsymbol{\tau}$) affinché lo strumento risponda ad una variazione della grandezza.

tempo caratteristico τ $\Downarrow$ prontezza $\Uparrow$

Rappresenta *la rapidità con cui lo strumento è in grado di fornire il risultato di una misura*.

Sensibilità

È la più piccola variazione della grandezza apprezzabile dallo strumento,

ovvero

È la più piccola variazione della sollecitazione che induce una variazione di risposta dallo strumento

Una definizione più rigorosa della sensibilità è:

Sia $\boldsymbol{\Delta V(G)}$ una variazione della grandezza $\boldsymbol{G}$ a cui corrisponde una variazione $\boldsymbol{\Delta R(G)}$ della risposta dello strumento.

Si definisce *sensibilità* il limite per $\Delta V \rightarrow 0$ del rapporto $\dfrac{\Delta R(G)}{\Delta V(G)}$

$$\boxed{s = \lim_{\Delta V(G) \rightarrow 0} \frac{\Delta R(G)}{\Delta V(G)} = \frac{dR(G)}{dV(G)}}$$

La sensibilità in generale è una funzione arbitraria di $\boldsymbol{\Delta V(G)}$, ovvero non è costante in tutto l'intervallo di funzionamento. S è costante solo se $R(G)$ è lineare (*infatti essa rappresenta la pendenza della curva di risposta*).

Poichè gli strumenti non sono in grado di rivelare variazioni infinitesime della sollecitazione, è più opportuno esprimere la sensibilità in termini di variazioni finite

$$\boxed{s = \frac{\Delta R(G)}{\Delta V(G)}}$$

La sensibilità ha dimensioni ***[G]$^{-1}$***
(es.: bilancia: div/mg).

Ad essa è legata l'indeterminazione con cui è misurata la grandezza G (*incertezza di sensibilità*):

$$\Delta V(G) = \frac{\Delta R(G)}{s}$$

La *incertezza di sensibilità* rappresenta l'intervallo di *V*(*G*) entro il quale lo strumento fornisce la stessa risposta.

Per strumenti *digitali*, l'*incertezza di sensibilità* corrisponde ad una unità sull'ultima cifra esibita dallo strumento.

Precisione:

Indica la capacità di uno strumento di fornire lo stesso valore di $R(G)$ quando sia sollecitato dallo *stesso* valore di $V(G)$.

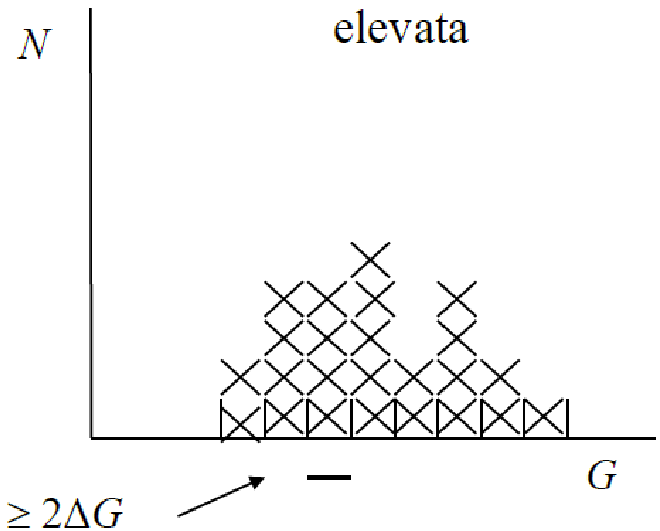
In una misura, anche eseguita in *condizioni di ripetibilità*, sono sempre presenti perturbazioni (attriti, giochi meccanici, ecc.) che possono produrre fluttuazioni nella risposta.

In uno strumento tarato ciò avviene quando l'entità delle fluttuazioni è *maggiore* della minima variazione di risposta ΔR apprezzabile: si ottiene così una distribuzione di valori di $V(G)$.

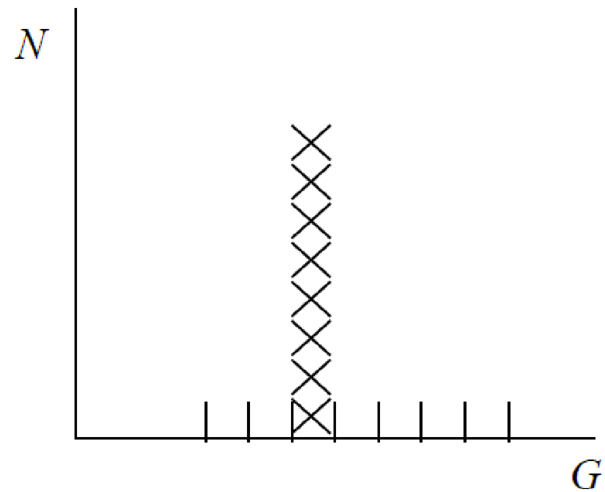
Quanto minore è la larghezza tanto più ripetibile è il funzionamento, migliore la qualità delle misure e tanto maggiore può essere definita la precisione.

$$s = 1/\Delta G$$

precisione bassa – sensibilità elevata

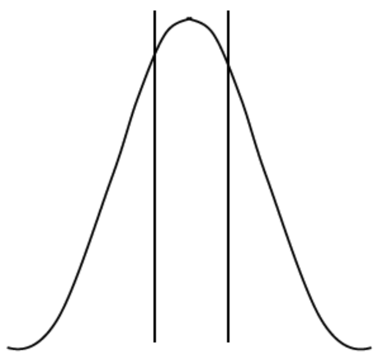


precisione alta – sensibilità bassa

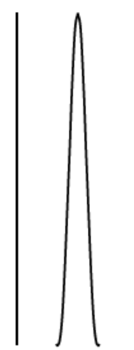


Uno strumento di misura è realizzato in modo che precisione ed incertezza di sensibilità siano confrontabili.

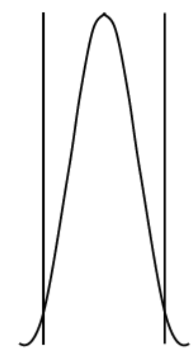
necessità di effettuare un gran numero di misure



precisione inutile



precisione e sensibilità confrontabili



Importanza delle incertezze nelle misure fisiche

La parola "errore" non significa **equivoco** o **sbaglio**

Essa assume il significato di **incertezza** da associare alla misura

Nessuna grandezza fisica può essere

misurata con completa certezza

Poichè è inevitabile che in una misura tutte le fonti di incertezza siano eliminate, il **valore vero** di una grandezza, che sarebbe il risultato di un'operazione di misura ideale, priva di errore, perde significato.

Pertanto, perchè una misura abbia senso è necessario determinare oltre alla "**migliore stima**" del valore vero, l'indeterminazione da cui è presumibilmente affetta.

Rappresentazione di una misura

Il risultato di una misura ha due componenti essenziali:

- un ***valore numerico*** (in un dato sistema di unità) che rappresenta **la migliore stima possibile** del valore vero della grandezza misurata,

- una ***incertezza*** associata al valore stimato (espressa con le stesse unità di misura della grandezza fisica a cui è associato).

Il risultato di una misura sarà espresso nella maniera seguente:

Valore misurato = stima ± incertezza

$$G = M(G) \pm \Delta G$$

Quest'affermazione significa che:

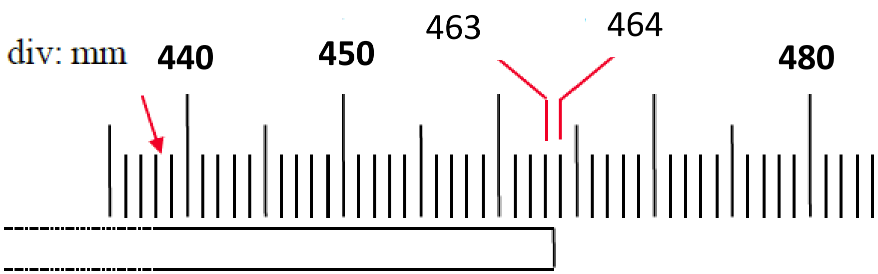
- la migliore stima della quantità misurata è $M(G)$;
- lo sperimentatore è confidente che la grandezza abbia un valore compreso tra

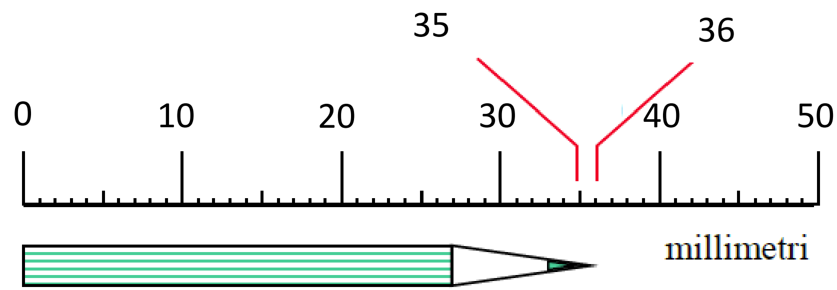
$$M(G) - \Delta G \qquad \text{e} \qquad M(G) + \Delta G$$

Misure e incertezze

Nessuna grandezza fisica può essere determinata con precisione assoluta ma è sempre affetta da una indeterminazione o errore.

La bontà della misura dipende dal modo in cui la grandezza e' misurata (*tipo di strumento, procedura,...*)





$463\ mm \leq l \leq 464\ mm$ $\qquad$ $35\ mm \leq l \leq 36\ mm$

$l = (463.5 \pm 0.5)\ mm$ $\qquad$ $l = (35.5 \pm 0.5)\ mm$

Si dice in questo caso che la misura di lunghezza è stata eseguita con una incertezza di "sensibilità" di 0.5 mm.

Ripetibilità dei risultati

Per ripetibilità dei risultati si intende l'accordo tra i risultati di misurazioni successive della stessa grandezza effettuate *nelle stesse condizioni*:

- stesso procedimento di misurazione
- stesso osservatore
- stesso strumento usato nelle stesse condizioni
- stesso luogo
- ripetizioni eseguite entro un "breve" intervallo di tempo

Riproducibilità dei risultati

Per *riproducibilità* dei risultati si intende l'accordo tra i risultati di misurazioni della stessa quantità effettuate in *condizioni diverse*.

Il cambiamento delle condizioni può riguardare:

- il principio su cui è basata la misurazione
- il metodo di misurazione
- l'osservatore
- lo strumento
- il luogo in cui si svolge la misurazione
- le condizioni in cui si svolge la misurazione
- il tempo in cui la misurazione è effettuata

Gli errori

- Svarioni
- Disturbi
- Errori sistematici
- Errori casuali

Gli svarioni

Sono quegli errori madornali dovuti ad esempio ad una distrazione dello sperimentatore (lettura errata dello strumento, trascrizione sbagliata dei dati, …)

I disturbi

I disturbi sono errori occasionali, temporanei, che scompaiono quando la misura viene ripetuta

Entrambi sono eliminabili da parte di un attento sperimentatore.

Gli errori sistematici

Sono errori che alterano la misura sistematicamente in eccesso o in difetto

↓

non sono rilevati mediante la ripetizione delle misure, ma confrontando risultati di misure eseguite con strumenti o procedure diverse

Gli errori sistematici

Difetti dello strumento (in uno strumento starato non esiste accordo tra il "valore vero" della grandezza e la risposta dello strumento)

Interazione strumento-sperimentatore (nell'errore di parallasse l'errore è dovuto ad una sbagliata angolazione dello sperimentatore rispetto alla scala dello strumento)

Interazione strumento-fenomeno (nella misura della temperatura di un fluido con un termometro ciò che si misura effettivamente è la temperatura del sistema termometro-fluido dopo il raggiungimento dell'equilibrio termodinamico)

Gli errori sistematici

Errate condizioni di lavoro (alcuni strumenti sono tarati per lavorare a determinate temperature e forniscono risposte non veritiere se usati ad altre temperature)

Errori dovuti all'imperfetta schematizzazione, riproduzione ed interpretazione del fenomeno (nello studio del moto uniformemente accelerato di un carrello su una rotaia-guida non si tiene conto degli attriti e si dà un'interpretazione ingenua, semplificata e non precisa del fenomeno)

Gli errori casuali

Possono avvenire con uguale probabilita' sia in difetto che in eccesso rispetto al valore vero: tipicamente si distribuiscono in modo simmetrico intorno alla **media aritmetica**

↓

<u>sono rilevati mediante la ripetizione delle misure e sono spiegati con l'impossibilita' di riprodurre esattamente le stesse condizioni sperimentali</u>

<u>Osservazione</u>: se si adopera per la misura uno strumento di scarsa sensibilità, i valori delle misure ripetute coincidono

Gli errori casuali

A differenza degli errori sistematici, gli errori casuali sono inevitabili e non eliminabili, ma trattabili in quanto il loro contributo può essere quantificato mediante l’analisi statistica dei risultati.

Accuratezza e precisione

Accuratezza

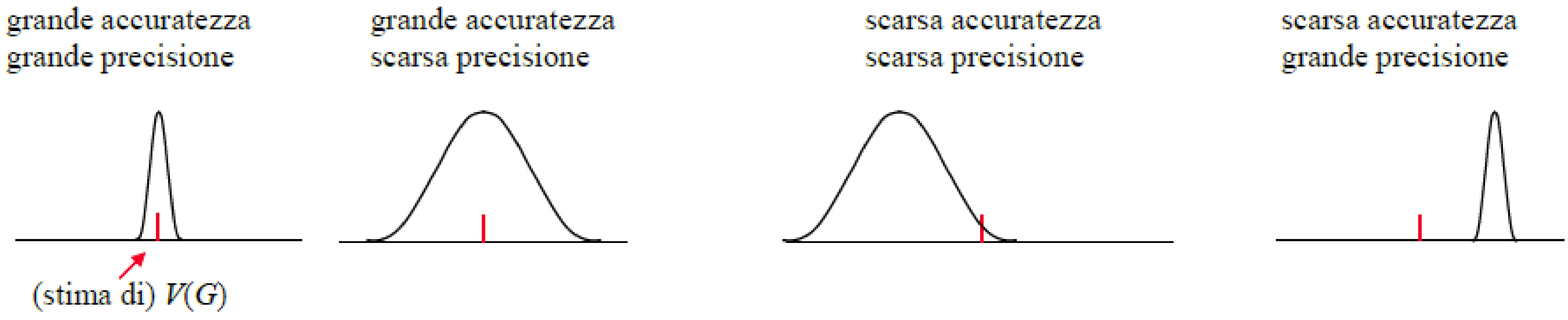
(è in relazione all'entità degli errori sistematici)

Si definisce accurata una misura per la quale sia stato ridotto al minimo il contributo degli errori sistematici

Precisione

(ha a che fare con la presenza degli errori casuali)

Si dice precisa una misura per la quale sia sufficientemente piccola l'ampiezza dei valori misurati attorno alla media



Normalmente in una misura ci sono sia incertezze casuali che sistematiche

In una buona misura deve essere

errore sistematico << errore casuale

Una misura richiede due tipi di operazioni:

- migliore stima del valore vero della grandezza
- valutazione dell’incertezza su tale stima (errore) incertezza

Risultato ed incertezza sperimentale devono essere scritti in modo ***coerente***, nel senso che, **nell’esprimere il risultato di una misura vanno indicate *tutte e sole* le *cifre significative*.**

Ma che cosa sono le cifre significative?

Definizione:
Per numero di cifre significative si intende il numero di tutte le cifre scritte a partire da destra, compresi gli zeri, fino all'ultima diversa da zero a sinistra.

In fisica è importante conoscere il numero di cifre significative del risultato di una misura in quanto è correlato alla bontà della misura e pertanto non può essere scelto arbitrariamente

Regole pratiche per il conteggio del numero di cifre significative:

- Tutte le cifre diverse da zero sono significative
- Tutti gli zeri compresi fra due non-zeri sono cifre significative
- Gli zeri a destra sono cifre significative
- Gli zeri a sinistra non sono cifre significative

Numero	cifre significative
123,4	4
123,42	5
123,420	6
0,04	1
0,042	2
0,0420	3
600 (600.)	3
$600 = 6\ 10^2$	1

Perché è importante scrivere il risultato di una misura con il numero corretto le cifre significative?

Le cifre significative sono tutte quelle cifre **fino alla prima di dubbio significato** → L'ultima cifra a destra, con cui si scrive il risultato, indica il grado di precisione con cui si conosce il valore della grandezza misurata.

Esempio:

$$x = 5.32\ m \ \rightarrow 5.31m < x < 5.33m$$

In questo caso il procedimento di misura o lo strumento è in grado di apprezzare differenze dell'ordine di *1 cm*.

Se invece si effettua la misura con una riga millimetrata che permette di apprezzare il mm allora il risultato è espresso fino alla terza cifra decimale:

$$x = 5.322\ m \rightarrow 5.321m < x < 5.323m$$

In questo caso la misura è più precisa ed il risultato è espresso con un numero maggiore di cifre significative.

Primo esempio $x = 5.32\ m \rightarrow 3$ *cifre significative*

Secondo esempio $x = 5.322\ m \rightarrow 4$ *cifre significative*

Pertanto:

$$x = 2.8\ cm \neq x = 2.80\ cm$$

Infatti

$$x = 2.8\ cm \rightarrow 2.7\ cm < x < 2.8\ cm$$

$$x = 2.80\ cm \rightarrow 2.79\ cm < x < 2.81\ cm$$

Primo esempio $x = 2.8\ cm \rightarrow 2\ cifre\ significative$

Secondo esempio $x = 2.80\ cm \rightarrow 3\ cifre\ significative$

Arrotondamenti

Se la prima cifra che deve essere eliminata è minore di 5, la cifra precedente resta inalterata.

Esempio:
arrotondamento a 3 cifre

- *3.472 viene arrotondato con 3.47*

Se la prima cifra che si deve eliminare è maggiore o uguale a 5, la cifra precedente viene aumentata di una unità. *(quasi sempre!!!)*

Esempio:
arrotondamento a 3 cifre

- *5.738 viene arrotondato con 5.74*
- *5.798 viene arrotondato con 5.80*
- *5.7953 viene arrotondato con 5.80*

- *5.685 viene arrotondato con 5.68*
- *5.675 viene arrotondato con 5.68*

Discrepanza o scarto

Se due misure della stessa grandezza sono in disaccordo, allora si dice che vi è una ***discrepanza***.
Numericamente la discrepanza (o scarto) è definita come segue:

discrepanza = differenza tra due valori misurati della stessa grandezza

Una discrepanza può essere o non essere significativa.

Se nella misura di una velocità si ottengono i risultati

$$40 \pm 5\ m/s \qquad \text{e} \qquad 42 \pm 8\ m/s$$

la discrepanza è minore delle loro incertezze e le due misure sono consistenti.

Se invece i risultati fossero stati

$$35 \pm 2\ m/s \qquad \text{e} \qquad 45 \pm 1\ m/s$$

allora le due misure sarebbero chiaramente inconsistenti e la discrepanza di 10 m/s è significativa.

In questo caso sarebbero necessari controlli accurati per capire cosa è stato fatto di sbagliato.

Incertezze nelle misure dirette

Incertezza massima

È l'incertezza che definisce l'intervallo entro il quale si confida debba cadere con sicurezza il valore vero di *G*.

La stima è pessimistica: ogni contributo di incertezza è stimato nelle condizioni peggiori.

Incertezza statistica

È l'incertezza che dà una stima della probabilità che il valore della grandezza misurata sia compreso in un certo intervallo.

Incertezze nelle misure dirette

1° Caso

Le incertezze sono legate alla sensibilità degli strumenti impiegati

Incertezza di sensibilità ≥ fluttuazione intrinseca delle misure.

Incertezze di sensibilità

Incertezze (*Errori*) di sensibilità

Supponiamo di voler eseguire la misura della lunghezza x di un parallelepipedo utilizzando una riga millimetrata e di ripetere la misura N volte.
Noteremo che tutte le misure danno come risultato lo stesso valore in quanto lo strumento non è così sensibile da percepire le fluttuazioni intrinseche alla misura.

In tal caso si può solo dire, ad esempio, che

$2.5\ cm < x < 2.6\ cm$ ovvero $x = (2.55 \pm 0.05)\ cm$

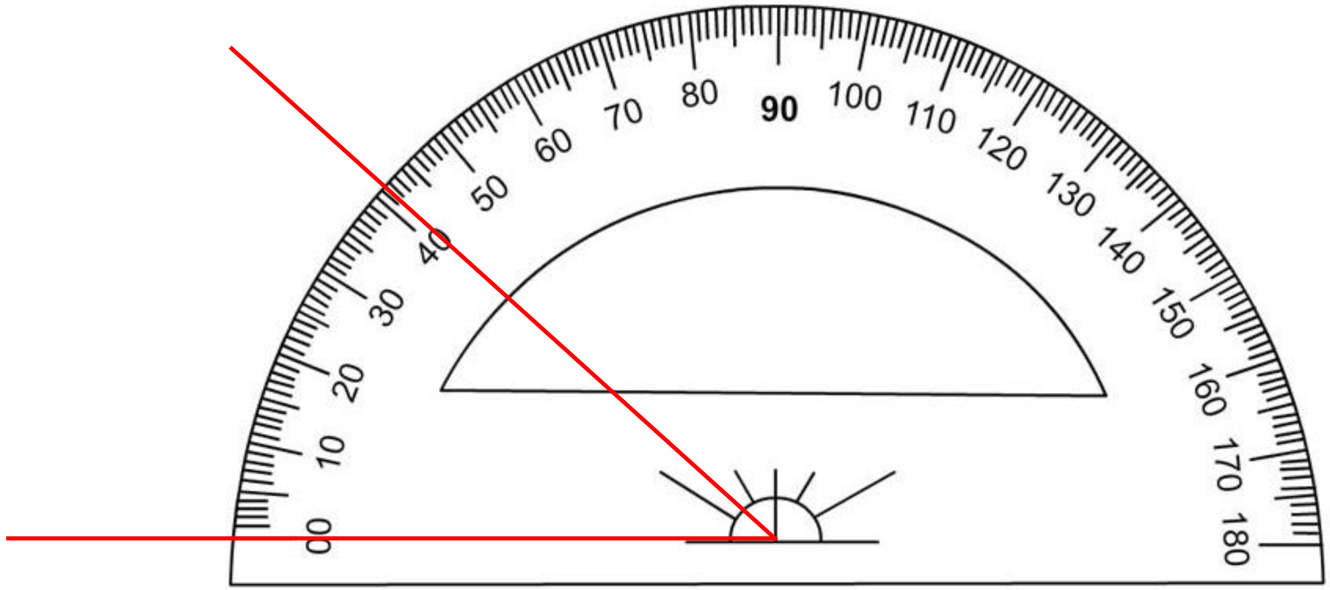
Analogamente se vogliamo effettuare una misura con il termometro clinico allora dalla lettura sulla scala risulta

$$36.6° \, C < x < 36.7° \, C$$

Siamo cioè in grado di apprezzare mezzo decimo di grado e il risultato della misura si scrive è

$$T = (36.65 \pm 0.05)° \, C$$

Ancora supponiamo di voler misurare l'ampiezza di un angolo con il goniometro in figura.



Con questo strumento si può apprezzare mezzo grado

$$41° < \alpha < 42°$$

e il risultato di una tipica misura si scrive

$$\alpha = (41.5 \pm 0.5)°$$

In tutti i casi che abbiamo considerato, l'incertezza associata alla misura è legata alla sensibilità dello strumento.

Se la sensibilità è stata definita come la più piccola variazione della grandezza che lo strumento è in grado di apprezzare, essa risulta legata alla più piccola divisione (tra due tacche consecutive) o ad una frazione apprezzabile di questa riportata sulla scala dello strumento.

Nei casi precedenti come incertezza ΔG è stata usata la mezza divisione, in linea più generale, quando visivamente non si è in grado di apprezzare la mezza divisione, si usa come incertezza ΔG una divisione.

Negli esempi precedenti allora poiché le più piccole divisioni corrispondono rispettivamente a $1\ mm$, $0.1°\ C$ e $1°$, è molto probabile trovare scritture del tipo:

$$x = (2.8 \pm 0.1)\ cm$$

$$T = (36.6 \pm 0.1)°\ C$$

$$\alpha = (41 \pm 1)°$$

Osservazione

Le incertezze sono caratterizzate da una sola cifra significativa e il valore che dà la stima della grandezza in esame è scritta in modo coerente con esse, ovvero l'ultima cifra significativa a destra coincide con la posizione della cifra significativa dell'errore.

$$x = (2.85 \pm 0.05)\ cm$$

$$T = (36.65 \pm 0.05)^\circ\ C$$

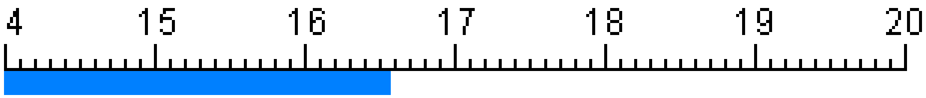
$$\alpha = (41.5 \pm 0.5)^\circ$$

$$x = (2.8 \pm 0.1)\ cm$$

$$T = (36.6 \pm 0.1)^\circ\ C$$

$$\alpha = (41 \pm 1)^\circ$$

Incertezze assolute e relative



$$x = (16.55 \pm 0.05)\ cm$$

L'**incertezza assoluta** della misura e' $0.05\ cm$ (ovvero $0.5\ mm$)

Ma l'incertezza ΔG da sola può non essere sufficiente a determinare la bontà della misura, che dipende anche dal valore della grandezza misurata.

L'**incertezza relativa** della misura e' data da $$\frac{\Delta G}{M} = \frac{\Delta x}{x}$$

(misura più grossolana)

$$x_1 = (4.55 \pm 0.05)\ cm$$

$$\frac{\Delta x_1}{x_1} = \frac{0.05}{4.55} \approx 0.01\left(1\%\right)$$

$$x_2 = (53.20 \pm 0.05)\ cm$$

$$\frac{\Delta x_2}{x_2} = \frac{0.05}{53.20} \approx 0.001\left(0.1\%\right)$$

Incertezze nelle misure indirette e propagazione degli errori massimi

Quando una grandezza fisica G viene determinata indirettamente attraverso la misura dirette di altre grandezze G_i

$$G = f(G_1, G_2, G_3, \ldots)$$

occorre stabilire come le incertezze sulle G_i si riflettono sull'incertezza della grandezza derivata G.

$$\Delta G_i \rightarrow \rightarrow \Delta G?$$

Somma di grandezze omogenee

Siano $G_1 = X$ e $G_2 = Y \rightarrow G = f(X, Y) = X+Y$

X_m *migliore stima di* X ; ΔX *incertezza associata*
Y_m *migliore stima di* Y ; ΔY *incertezza associata*

Ovvero

$$X = X_m \pm \Delta X \qquad\qquad Y = Y_m \pm \Delta Y$$

La migliore stima di G *è*

$$G_m = X_m + Y_m$$

e ΔG ?

$$X = X_m \pm \Delta X \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{X_m - \Delta X}_{X_{min}} \leq X \leq \underbrace{X_m + \Delta X}_{X_{max}}$$

$$Y = Y_m \pm \Delta Y \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{Y_m - \Delta Y}_{Y_{min}} \leq Y \leq \underbrace{Y_m + \Delta Y}_{Y_{max}}$$

$$\Downarrow$$

$$G_{max} = X_{max} + Y_{max} = (X_m + \Delta X) + (Y_m + \Delta Y) = (X_m + Y_m) + (\Delta X + \Delta Y)$$
$$= G_m + (\Delta X + \Delta Y)$$

analogamente

$$G_{min} = X_{min} + Y_{min} = (X_m - \Delta X) + (Y_m - \Delta Y) = (X_m + Y_m) - (\Delta X + \Delta Y) =$$
$$G_m - (\Delta X + \Delta Y)$$

$$G_{min} = G_m - (\Delta X + \Delta Y) \qquad G_{max} = G_m + (\Delta X + \Delta Y)$$

$$\Downarrow$$

$$G_m - (\Delta X + \Delta Y) \leq G \leq G_m + (\Delta X + \Delta Y)$$

Pertanto la quantità $(\Delta X + \Delta Y)$ definisce l'intervallo entro il quale deve cadere il valore di $\boldsymbol{G}$ e quindi rappresenta l'incertezza $\boldsymbol{\Delta G}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta G = (\Delta X + \Delta Y)}}$$

Regola generale

Sia $G = f(X, Y, Z, \ldots U, V, W,\ldots) = X+Y+Z - U - V - W\ldots..$

con $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta U, \Delta V, \Delta W,\ldots.$ *incertezze associate*

La migliore stima di G *è*

$$G_m = X_m + Y_m + X_m - U_m - V_m - Z_m \;\ldots..$$

e

$$\Delta G = \Delta X + \Delta Y + \Delta Z + \Delta U + \Delta V + \Delta W \;\ldots.$$

Propagazione delle incertezze nei prodotti

Siano $G_1 = X$ e $G_2 = Y \rightarrow G = f(X, Y) = X \cdot Y$ *(assumiamo per il momento X e $Y > 0$)*

X_m *migliore stima di* X ; ΔX *incertezza associata*

Y_m *migliore stima di* Y ; ΔY *incertezza associata*

Ovvero

$$X = X_m \pm \Delta X \qquad\qquad Y = Y_m \pm \Delta Y$$

La migliore stima di G *è*

$$G_m = X_m \cdot Y_m$$

e ΔG ?

$$G_{max} = X_{max} \cdot Y_{max} = (X_m + \Delta X) \cdot (Y_m + \Delta Y) =$$
$$X_m \cdot Y_m + X_m \cdot \Delta Y + Y_m \cdot \Delta X + \Delta X \cdot \Delta Y$$

Trascurabile se
$\Delta X << X_m$ e $\Delta Y << Y_m$

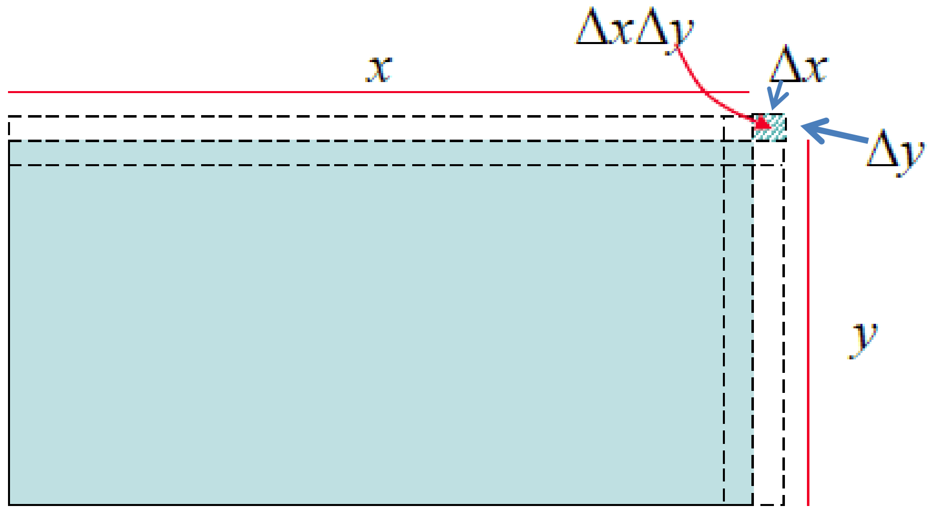
$$G_{max} = X_m \cdot Y_m + (X_m \cdot \Delta Y + Y_m \cdot \Delta X) =$$
$$G_m + (X_m \cdot \Delta Y + Y_m \cdot \Delta X)$$

Analogamente

$$G_{min} = X_{min} \; Y_{min} = X_m \cdot Y_m - (X_m \cdot \Delta Y + Y_m \cdot \Delta X) =$$
$$G_m - (X_m \cdot \Delta Y + Y_m \cdot \Delta X)$$

$$\Delta G = (X_m \cdot \Delta Y + Y_m \cdot \Delta X)$$

Graficamente:



$$\Delta G = (X_m \cdot \Delta Y + Y_m \cdot \Delta X)$$

$$\frac{\Delta G}{G_m} = \frac{X_m \Delta Y + Y_m \Delta X}{G_m} = \frac{X_m \Delta Y + Y_m \Delta X}{X_m Y_m} = \frac{X_m \Delta Y}{X_m Y_m} + \frac{Y_m \Delta X}{X_m Y_m} = \frac{\Delta Y}{Y_m} + \frac{\Delta X}{X_m}$$

$$\varepsilon_r(G) = \varepsilon_r(X) + \varepsilon_r(Y)$$

Se X e/o Y sono < 0

$$\Delta G = \left(\left| X_m \right| \cdot \Delta Y + \left| Y_m \right| \cdot \Delta X \right)$$

$$\frac{\Delta G}{\left| G_m \right|} = \frac{\Delta X}{\left| X_m \right|} + \frac{\Delta Y}{\left| Y_m \right|}$$

Regola generale

Sia $G = f(X, Y, Z, \ldots U, V, W, \ldots) = \dfrac{X \cdot Y \cdot Z \cdot \ldots}{U \cdot V \cdot W \cdot \ldots}$

con $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, \Delta U, \Delta V, \Delta W, \ldots.$ *incertezze associate*

La migliore stima di G è data da

$$G_m = \frac{X_m \cdot Y_m \cdot Z_m \cdot \ldots}{U_m \cdot V_m \cdot W_m \cdot \ldots}$$

e

$$\frac{\Delta G}{|G_m|} = \frac{\Delta X}{|X_m|} + \frac{\Delta Y}{|Y_m|} + \frac{\Delta Z}{|Z_m|} + \frac{\Delta U}{|U_m|} + \frac{\Delta V}{|V_m|} + \frac{\Delta W}{|W_m|} + \ldots\ldots$$

OSSERVAZIONE:

$$G = G_m \pm \Delta G$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta G = \left(\frac{\Delta X}{\left| X_m \right|} + \frac{\Delta Y}{\left| Y_m \right|} + \frac{\Delta Z}{\left| Z_m \right|} + \frac{\Delta U}{\left| U_m \right|} + \frac{\Delta V}{\left| V_m \right|} + \frac{\Delta W}{\left| W_m \right|} + \ldots\ldots \right) \cdot G_m$$

Generalizzazione della propagazione delle incertezze massime (*per una generica funzione*):

Se $G = f(X, Y, Z, \ldots)$

e $X = (X_m \pm \Delta X)$ $Y = (Y_m \pm \Delta Y)$ $Z = (Z_m \pm \Delta Z) \ldots\ldots$

per il teorema del differenziale abbiamo

$$dG = \frac{\partial G}{\partial X} dX + \frac{\partial G}{\partial Y} dY + \frac{\partial G}{\partial Z} dZ + \ldots$$

Passando dalle quantità infinitesime a quantità piccole ma finite, ΔX, ΔY, $\Delta Z, \ldots$ si ha, a meno di termini di ordine superiore:

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial G}{\partial Y} \Delta Y + \frac{\partial G}{\partial Z} \Delta Z + \ldots$$

Poiche' siamo interessati alla massima variazione di G (valutazione più pessimistica dell'incertezza)

$$\boxed{\Delta G \approx \left|\frac{\partial G}{\partial X}\right|\Delta X + \left|\frac{\partial G}{\partial Y}\right|\Delta Y + \left|\frac{\partial G}{\partial Z}\right|\Delta Z + \ldots}$$

OSSERVAZIONI

- È rigorosamente valida se G dipende linearmente X, Y, Z,....
- È valida approssimativamente se ΔX, ΔY, ΔZ,... sono piccoli rispetto a G.
- ΔG è un errore massimo.

Tabella riassuntiva sulla propagazione delle incertezze massime

	Relazione tra z e (x,y)	Relazione tra gli errori Δz e $(\Delta x, \Delta y)$ (errori massimi)
1	$z = x + y$	$\Delta z = \Delta x + \Delta y$
2	$z = x - y$	$\Delta z = \Delta x + \Delta y$
3	$z = x \cdot y$	$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
4	$z = x/y$	$\frac{\Delta z}{z} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}$
5	$z = x^n$	$\frac{\Delta z}{z} = n \frac{\Delta x}{x}$
6	$z = \ln x$	$\Delta z = \frac{\Delta x}{x}$
7	$z = e^x$	$\frac{\Delta z}{z} = \Delta x$

Tabella 1

Alcune derivate elementari *u* e *v* indicano funzioni arbitrarie di *x*, *a* ed *n* sono delle costanti		
$\frac{dx}{dx}=1$	$\frac{da}{dx}=0$	$\frac{d}{dx}(au)=a\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(u+v)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}$	$\frac{d}{dx}x^n=nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$
$\frac{d}{dx}e^x=e^x$	$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$	$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$
$\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$	$\frac{d}{dx}\tan x=\sec^2 x$	$\frac{d}{dx}[u(v)]=\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$

Nell'addizione (e nella sottrazione) il numero delle cifre significative del risultato è determinato da quella dell'addendo più incerto: *si fermano le cifre significative della somma in corrispondenza della più arretrata (a sinistra) tra le posizioni delle ultime cifre significative degli addendi*.
Non e' importante il numero di cifre significative ma la loro posizione.

Esempio

$$\begin{array}{rl} 3.3 & + \\ 23.424 & + \\ \underline{12.21} & \underline{=} \\ 38.934 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 38.9$$

Nella divisione e nella moltiplicazione il risultato ha un numero di cifre significative pari a quelle del numero che ne possiede meno di tutti.

$$\underbrace{3.40}_{\text{3 cifre significative}} \times 12.2321 = 41.58914 \Rightarrow \underbrace{41.6}_{\text{3 cifre significative}}$$

Errori casuali

Fino ad ora abbiamo correlato la bontà di una misura alla sensibilità degli strumenti utilizzati.
Siamo partiti da una situazione in cui effettuata una serie di *N* misure ripetute, le misure hanno tutte dato lo stesso valore come risultato.

E' possibile però anche che le *N* misure ripetute della stessa grandezza diano valori differenti:

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_N$$

2° Caso

Incertezza di sensibilità < fluttuazione intrinseca delle misure.

In questo caso i dati si possono suddividere in gruppi e rappresentare graficamente la distribuzione dei valori ottenuti.

Immaginiamo per esempio che un osservatore **A** abbia misurato il periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro sensibile ad apprezzare $0.01\ s$ e che abbia ripetuto la stessa misura 10 volte.

I risultati (in s) ottenuti sono riportati di seguito

$$x_i = 1.51,\ 1.50,\ 1.51,\ 1.53,\ 1.51,\ 1.50,\ 1.50,\ 1.51,\ 1.52,\ 1.52$$

Le misure non sono più ripetibili.

$$x_i = 1.51,\ 1.50,\ 1.51,\ 1.53,\ 1.51,\ 1.50,\ 1.50,\ 1.51,\ 1.52,\ 1.52$$

È corretto dare il risultato di ogni singola misura con tre cifre significative definite dalla sensibilità dello strumento, ma poiché le misure non danno lo stesso valore, *l’indeterminazione sulla misura non è data più solo dallo strumento*.

I valori sono diversi a causa delle fluttuazioni casuali legate alla procedura della misura. *Ad esempio, il tempo di reazione dell’osservatore non può essere rigorosamente lo stesso*.

E’ necessario trovare dei criteri per:

- Esprimere il valore più rappresentativo della grandezza (la migliore stima)
- Valutare l’indeterminazione associata
- Dare una rappresentazione grafica espressiva della serie di misure (<u>campione di dati</u>)

Frequenze assolute

Riprendiamo i dati:

$$1.51, 1.50, 1.51, 1.53, 1.51, 1.50, 1.50, 1.51, 1.52, 1.52$$

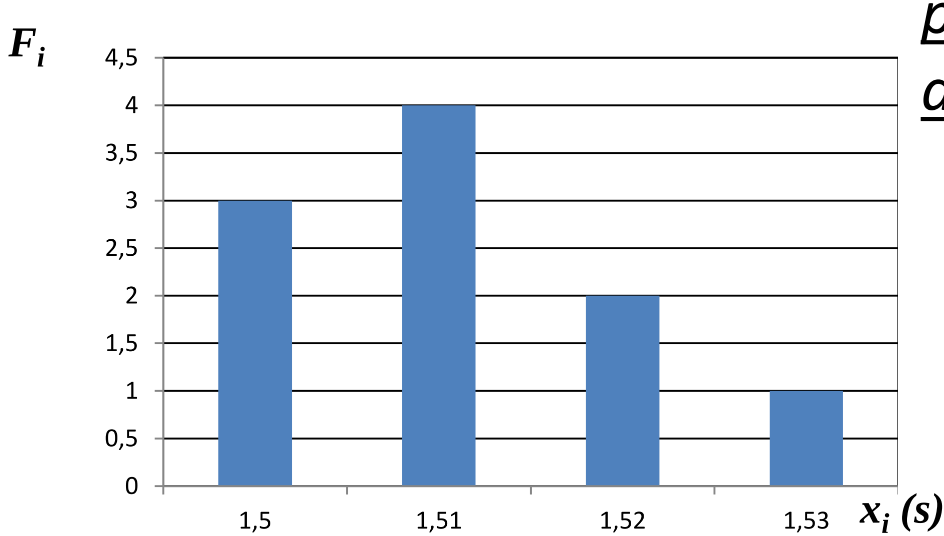
Si può osservare che alcuni valori si presentano più di una volta. Pertanto il campione delle 10 misure può essere organizzato in modo più conveniente in una tabella in cui si riporta il numero di volte che lo stesso valore si presenta in una serie di misure. Questa quantità è detta frequenza assoluta (F_i).

Dati x_i (s)	**Frequenza assoluta, F_i**
1.50	3
1.51	4
1.52	2
1.53	1

Dati x_i (s)	**Frequenza assoluta, F_i**
1.50	3
1.51	4
1.52	2
1.53	1

Rappresentiamo graficamente i dati in un diagramma riportando in ascissa i valori dei dati ed in ordinate le corrispondenti frequenze assolute.

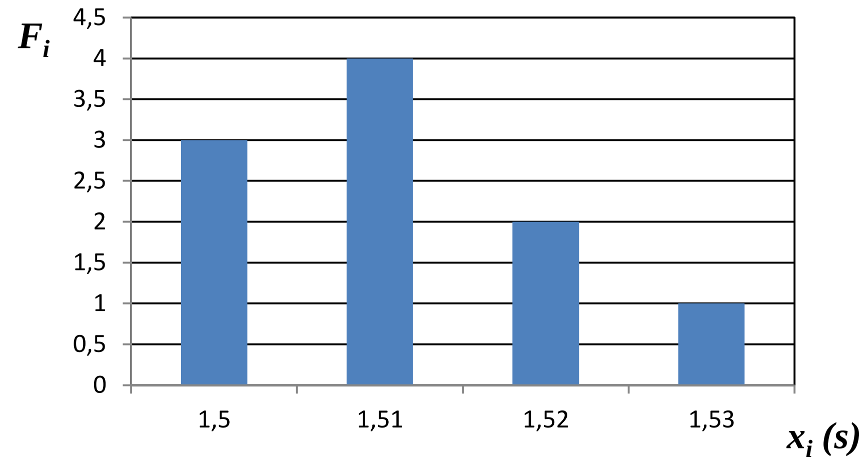
Nel diagramma le barre verticali hanno lunghezza proporzionale alla frequenza assoluta.



Si assume che il valore più rappresentativo della grandezza X sia la **media aritmetica** delle misure, definita come

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

Dati x_i (s)	Frequenza assoluta, F_i
1.50	3
1.51	4
1.52	2
1.53	1



In questo caso

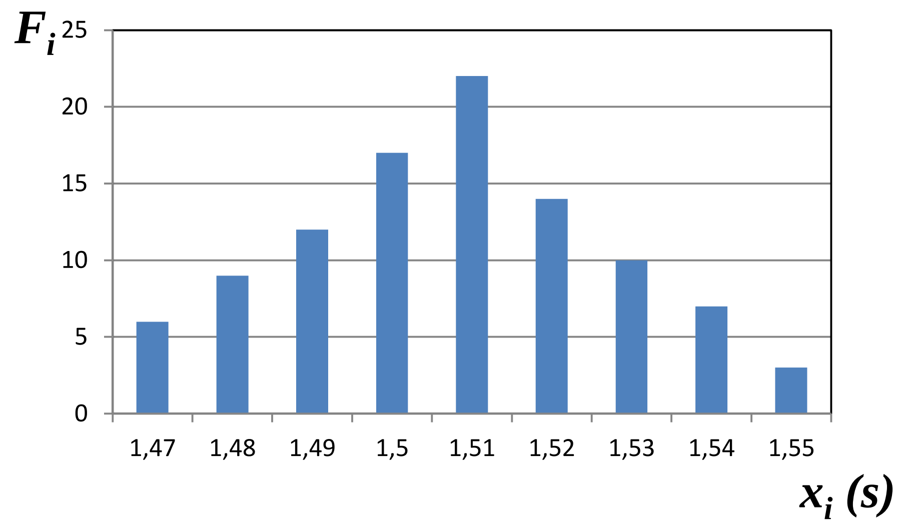
$$\bar{x} = \frac{1}{10}(1.51 + 1.50 + \ldots)s = 1.511s$$

Il diagramma usato per rappresentare le misure è detto diagramma a barre ed è appropriato solo nel caso in cui, come nel caso appena considerato, la grandezza x può assumere solo valori discreti.

Sono stati infatti raggruppati i dati aventi lo stesso valore discreto.

Supponiamo ora che **A** esegua una seconda serie di 100 misure. I valori ottenuti sono riportati con le corrispondenti frequenze assolute in tabella:

Dati x_i (s)	**F. assoluta, F_i**
1.47	6
1.48	9
1.49	12
1.50	17
1.51	22
1.52	14
1.53	10
1.54	7
1.55	3



Dove chiaramente

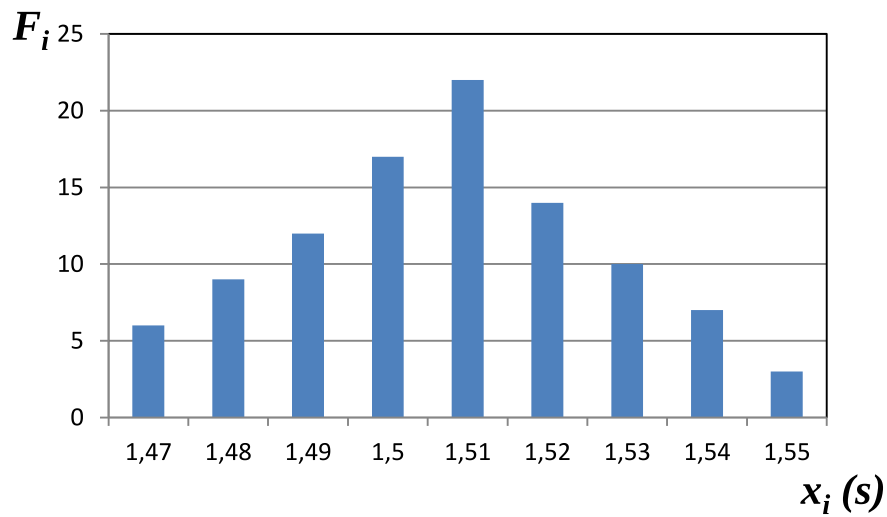
$$\sum_{j=1}^{Nclassi} Fj = N = 100$$

Osservazione: il diagramma, all'aumentare di *N*, assume un andamento più regolare, più simmetrico attorno ad un valore centrale.

Anche in questo caso il valore più attendibile è la media aritmetica che può essere riscritta e calcolata in maniera più conveniente usando la frequenza assoluta:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{Nclassi} F_j x_j}{\sum_{j=1}^{Nclassi} F_j} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{Nclassi} F_j x_j}$$

Dati x_i (s)	**F. assoluta, F_i**
1.47	6
1.48	9
1.49	12
1.50	17
1.51	22
1.52	14
1.53	10
1.54	7
1.55	3



Nel caso specifico $\boxed{\bar{x} = 1.5076 s}$

Incertezze

Per valutare l'incertezza associata si determina il **campo di variazione** (intervallo in cui varia il valore della grandezza) delle misure, detto anche **intervallo di dispersione**, e che è rappresentato tra la differenza fra il valore massimo, $\boldsymbol{x_{max}}$, ed il valore minimo, $\boldsymbol{x_{min}}$.

L'incertezza, Δx, è data da

$$\boxed{\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}}$$

detta **semidispersione massima**.

In questo caso si presume che, ripetendo ulteriormente la misura, il risultato cada nell'intervallo di estremi $(\bar{x} - \Delta x)$ e $(\bar{x} + \Delta x)$.

Anche in questo caso, come per gli errori di sensibilità degli strumenti, si ha a che fare con degli errori di tipo massimo.

L'errore massimo rappresenta un limite superiore dell'incertezza (stima più pessimistica dell'incertezza) e costituisce in taluni casi solo una stima grossolana dell'incertezza.

Questa valutazione dell'errore tramite la semidispersione massima si usa solitamente per un campione con N piccolo, come ad esempio nel caso del primo esercizio ($N = 10$, o anche per N minori).

Per N elevati si procede mediante trattazione statistica che vedremo in seguito.

Nell'esempio considerato con $N=10$:

Dati x_i (s)	F. assoluta, F_i
1.50	3
1.51	4
1.52	2
1.53	1

x_{min}=1.50 s

x_{max}=1.53 s

$$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2} = \frac{1.53 - 1.50}{2} = \frac{0.03}{2} = 0.015$$

essendo $\overline{x} = 1.511 s$

$$\boxed{x = (1.511 \pm 0.015)\ s}$$

Scarto

Quando si dispone di numerose misure di una grandezza, la semidispersione massima sarebbe una valutazione troppo pessimistica dell'errore (*non avrebbe senso ripetere un numero così alto di volte la misura, con dispendio di forze e tempo, senza un effettivo vantaggio, senza migliorare la bontà della misura*).

Una valutazione meno grossolana potrebbe essere fatta elaborando gli scarti.

- Si definisce *scarto della i-esima misura* la quantità

$$\boxed{\xi_i = x_i - \bar{x}}$$

Esso dà un'indicazione dello scostamento, dovuto alle fluttuazioni casuali, della singola misura dal valor medio.

Per quantificare la dispersione dei dati, si sarebbe tentati di fare una media degli scarti (*come cioè sono distribuiti i valori delle misure*), ma occorre subito dire che essa è di nessuna utilità in quanto tale media è sempre nulla.

Infatti:

Le fluttuazioni sono casuali e i valori si distribuiscono simmetricamente intorno alla media aritmetica

Si può dimostrare che:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{N}\sum_i \xi_i = \frac{1}{N}\sum_i (x_i - \bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_i x_i - \frac{1}{N}\sum_i \bar{x} = \bar{x} - \frac{1}{N} N\bar{x} = 0$$

Deviazione media

Una maniera più idonea potrebbe essere allora quella di fare la media dei valori assoluti degli scarti.

Chiamiamo **deviazione media** questa quantità ed indichiamola con α:

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{N}\sum_i \left| x_i - \bar{x} \right|}$$

A differenza di $\bar{\xi}$, α fornisce un mezzo per la valutazione dell'errore.

Tuttavia non è ancora questo il parametro più adatto per la valutazione dell'errore casuale.

Deviazione standard

La valutazione più opportuna dell'errore casuale è data dallo **<u>scarto quadratico medio</u>** o **<u>deviazione standard</u>**, σ, (*che come vedremo in seguito ha un <u>importante significato probabilistico</u>*).

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2}}$$

Ovvero è la radice quadrata della media dei quadrati degli scarti.

NOTA: il quadrato degli scarti evita che la sua sommatoria sia nulla e la radice quadrata restituisce a

$$\sum_i \left(x_i - \overline{x}\right)^2$$

le stesse dimensioni della grandezza x con la quale σ deve essere omogeneo.

Istogrammi

Fino ad ora abbiamo considerato situazioni in cui sono stati analizzate misure che assumono valori discreti. Vediamo come ci si comporta quando ciò non è più verificato.

Supponiamo di considerare un campione di $N=30$ misure di tempo in un esperimento con il solito cronometro con errore di sensibilità pari a $0.01\ s$.
I valori (in s) sono:

$x_i =$ 19.35, 19.83, 20.07, 19.40, 19.85, 20.08, 19.48, 19.87, 20.13, 19.49,
19.88, 20.18, 20.20, 19.89, 19.60, 19.67, 19.94, 20.25, 20.28, 19.95,
19.70, 19.70, 20.00, 20.40, 20.52, 20.04, 19.75, 19.80, 20.05, 20.64

Si può osservare che non esistono valori che si ripetono più volte; pertanto <u>non ha senso costruire un diagramma a barre.</u>

Ordiniamo per comodità i valori (in s) in ordine crescente:

$x_i =$ $19.35, 19.40, 19.48, 19.49, 19.60, 19.67, 19.70, 19.70, 19.75, 19.80, 19.83, 19.85, 19.87, 19.88, 19.89, 19.94, 19.95, 20.00, 20.04, 20.05, 20.07, 20.08, 20.13, 20.18, 20.20, 20.25, 20.28, 20.40, 20.52, 20.64$

Si divide l'intervallo di dispersione in intervalli (**classi**) la cui ampiezza (*che generalmente, ma non obbligatoriamente, è uguale per tutti gli intervalli*) scelta in modo che il numero di misure che vi cadono dentro sia né troppo piccolo, né troppo grande (*vale il buon senso*).

A questo punto si determina il numero di misure che cadono nella classe *j-esima*, ovvero la frequenza assoluta, F_j.

Se una misura coincide con il confine di un intervallo si può usare la convenzione di sommare mezza unità alla frequenza di ciascuna delle due classi contigue oppure inserire il dato sistematicamente nella classe precedente o in quella seguente.

Nell'esempio considerato

$x_i =$ *19.35,19.40, 19.48, 19.49, 19.60, 19.67, 19.70, 19.70, 19.75, 19.80, 19.83, 19.85, 19.87, 19.88, 19.89, 19.94, 19.95, 20.00, 20.04, 20.05, 20.07, 20.08, 20.13, 20.18, 20.20, 20.25, 20.28, 20.40, 20.52, 20.64*

si individua l'intervallo di dispersione mediante

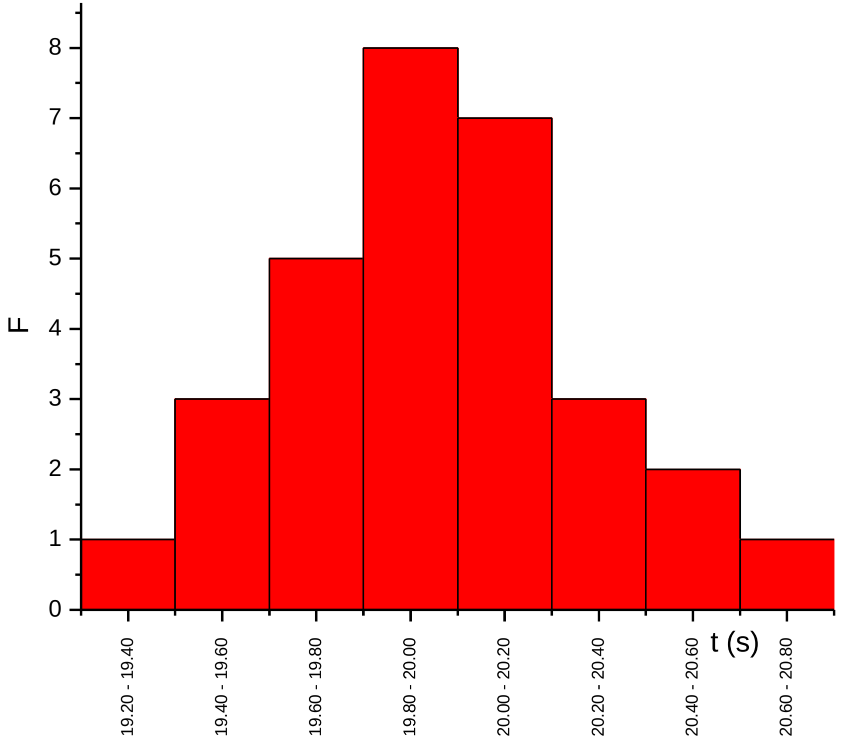
x_{min}=19.35 s x_{max}=20.64 s

si scelgono le classi e si riportano con le frequenze corrispondenti in una tabella (*in questo caso si è deciso di inserire un valore misurato sul confine nella classe successiva*).

Classe, j	**Intervalli (s)**	**F. assoluta, F_j**
1	19.20 - 19.40	1
2	19.40 - 19.60	3
3	19.60 - 19.80	5
4	19.80 - 20.00	8
5	20.00 - 20.20	7
6	20.20 - 20.40	3
7	20.40 - 20.60	2
8	20.60 - 20.80	1

I dati in tabella si possono rappresentare graficamente riportando sull'asse delle ascisse le classi individuate e costruendo dei rettangoli aventi le basi di ampiezza pari all'intervallo della classe e di altezza proporzionale alla frequenza assoluta. Tale diagramma è detto **istogramma**.

Classe, j	Intervalli (s)	F. assoluta, F_j
1	19.20 - 19.40	1
2	19.40 - 19.60	3
3	19.60 - 19.80	5
4	19.80 - 20.00	8
5	20.00 - 20.20	7
6	20.20 - 20.40	3
7	20.40 - 20.60	2
8	20.60 - 20.80	1



Spesso conviene invece rappresentare i dati in modo che <u>l'area di ogni rettangolo sia pari alla frequenza relativa associata alla classe considerata</u>.

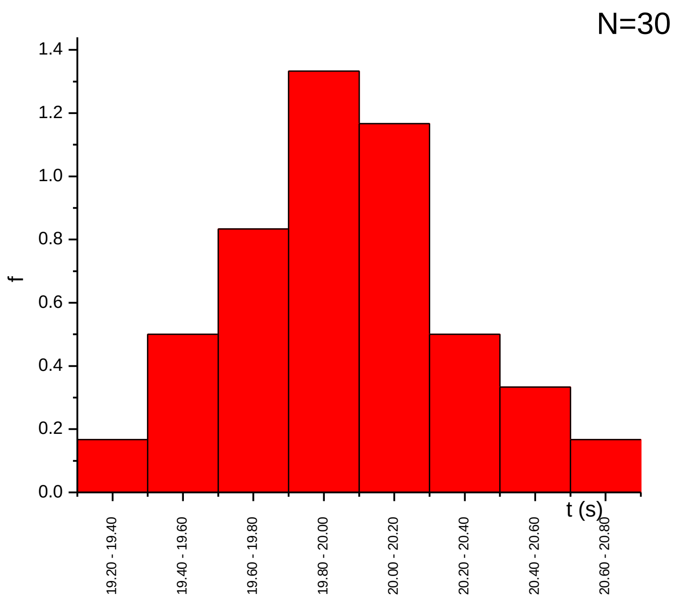
Indicata con f_j l'altezza del *j-esimo* rettangolo deve essere:

$$\boxed{f_j \cdot \Delta x_j = f_{rj} = \frac{F_j}{N}}$$

La quantità f_j è detta **<u>densità di frequenza</u>**

$$\boxed{f_j = \frac{f_{rj}}{\Delta x_j}}$$

Classe, j	**Intervalli (s)**	**Densità di frequenza, f_j**
1	19.20 - 19.40	0.17
2	19.40 - 19.60	0.5
3	19.60 - 19.80	0.83
4	19.80 - 20.00	1.33
5	20.00 - 20.20	1.17
6	20.20 - 20.40	0.5
7	20.40 - 20.60	0.33
8	20.60 - 20.80	0.17



Proviamo ora a determinare la migliore stima di x relativamente all'esempio riportato.

E' possibile seguire due strade:

$$\bar{x} = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j}^{Nclassi} F_j x_j}{\sum_{j}^{Nclassi} F_j} = \frac{\sum_{j=1}^{8} F_j x_j}{\sum_{j=1}^{8} F_j} = \frac{1}{30}\sum_{j=1}^{8} F_j x_j$$

dove x_j indica il valore centrale della *j-esima* classe.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{j}^{Nclassi} F_j\left(x_j - \bar{x}\right)^2}{\sum_{j}^{Nclassi} F_j}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{8} F_j\left(x_j - \bar{x}\right)^2}{\sum_{j=1}^{8} F_j}}$$