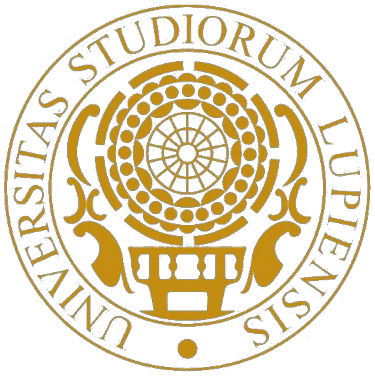




Esercizi di Gravitazione

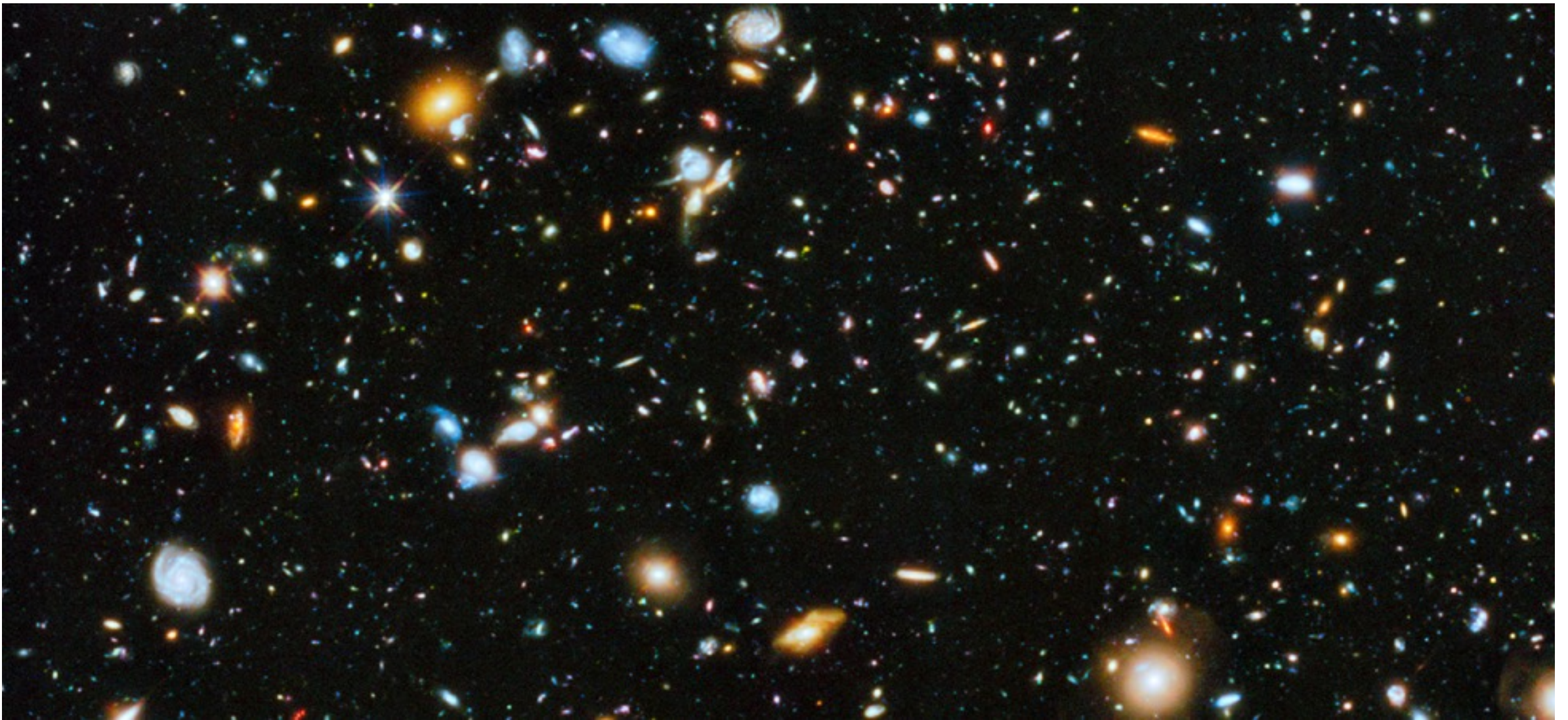
L. Martina

Dipartimento di Matematica e Fisica «Ennio De Giorgi» Università del Salento,

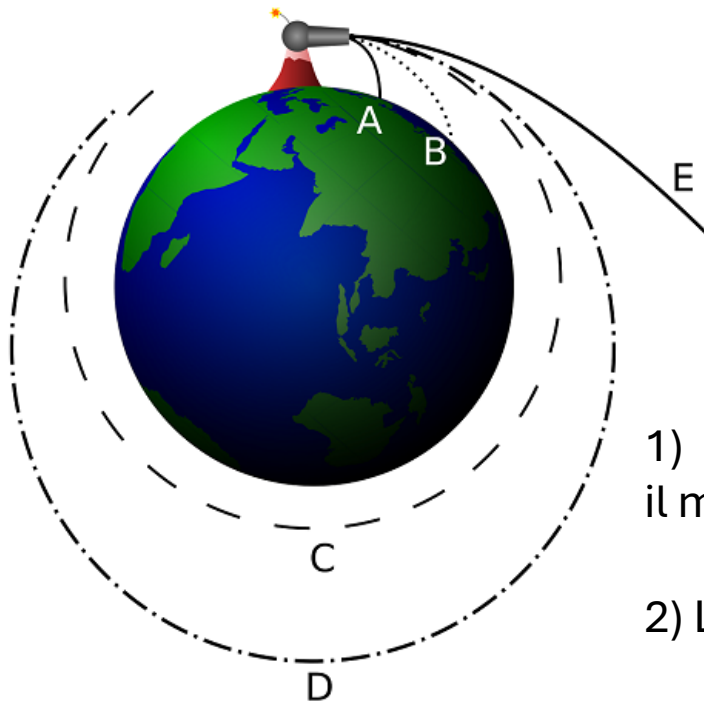
Sezione INFN – Lecce

XVI Scuola Estiva di Fisica

7/09/2026



Il nostro Universo visibile contiene miliardi di galassie, la cui stessa esistenza è dovuta alla **forza di gravità**. Essa è responsabile dell'energia che anima il moto le stelle e consente l'innesco in esse delle reazioni termonucleari. Questo consente al Sole di riscaldare la Terra e rendere le galassie visibili dalle più remote regioni dell'Universo . La maggior parte dei punti luminosi che vedete in questa immagine galassie, oltre che stelle. (credito: NASA)



Gravità Newtoniana



- 1) La forza che agisce tra i corpi celesti ha la stessa natura di quella che determina il moto dei gravi sulla Terra
- 2) Le masse «gravitazionali» puntiformi m_1 e m_2 (>0) esercitano tra di loro la forza

$$\mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^2} \hat{\mathbf{r}}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_{21}|^3} \mathbf{r}_{21}$$

dove $\mathbf{F}_{21}$ è la forza esercitata da 1 su 2

$$\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$$

$$\hat{\mathbf{r}}_{21} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

G è la Costante di Gravitazione Universale

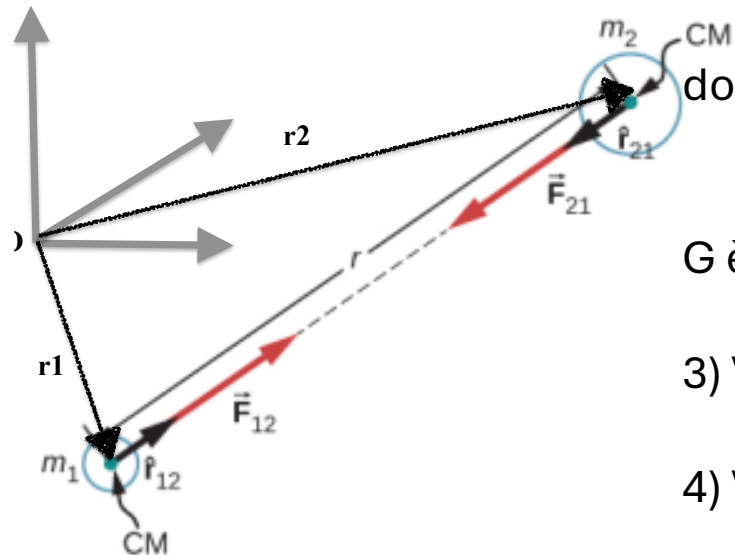
- 3) Vale il III Principio della Dinamica

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$

- 4) Vale il principio di Sovrapposizione:

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{32}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$$



Es1

Q4

Sia $R = 6372 \text{ km}$ il raggio della Terra e g il campo gravitazionale sulla superficie terrestre.

- A quale altezza dalla superficie terrestre il campo gravitazionale si dimezza?

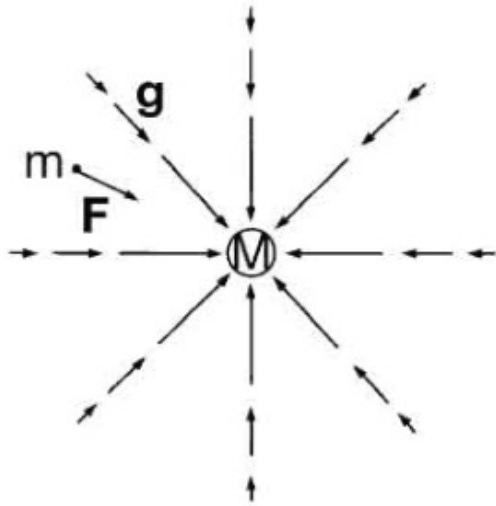
Campo : Funzione definita sullo Spazio –(Tempo), che descrive una qualche grandezza fisica a prescindere da dettagli su come sia misurata

Se **Vettoriale** in ogni punto è definita la **direzione**, il **verso** e l'**intensità**.

campo gravitazionale: Forza esercitata da M su m (N) $= - G \frac{M}{r^2} \hat{r}$

Digitare l'equazione qui.

Supposta la Terra Sferica (!), il campo gravitazionale è radiale e attrattivo



$$g = G M / R^2$$

alla Superficie

$$g' = G M / R_h^2$$

ad altezza h , $R_h = R + h$

$$g' = \frac{g}{2}$$

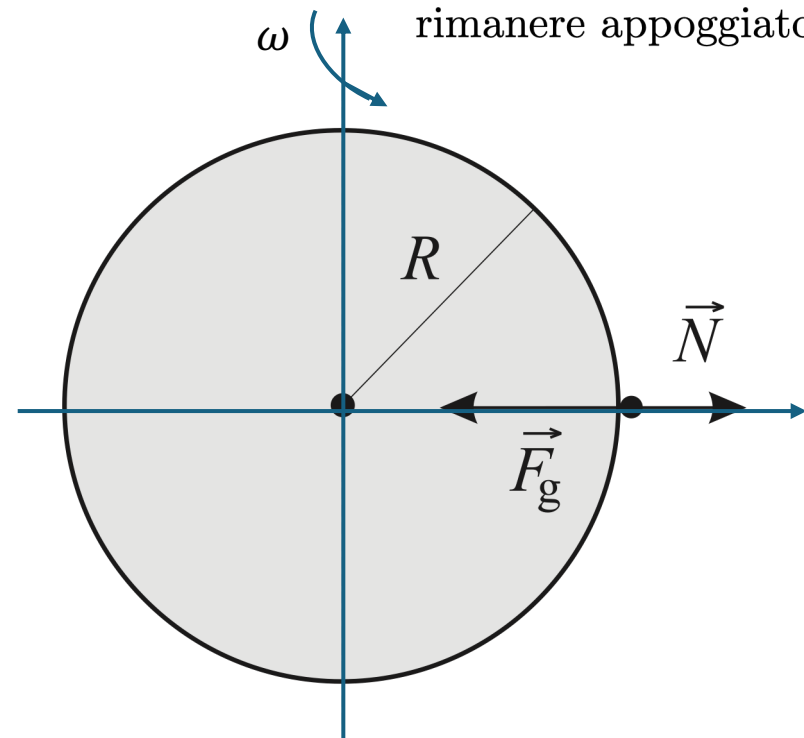
$$G M / (R_h)^2 = G M / (2 R^2) \Rightarrow R_h = \sqrt{2} R \Leftrightarrow h = (\sqrt{2} - 1) R = 2639 \text{ km}$$

Es. 2

Q !

Un corpo celeste sferico ha densità uniforme ρ e ruota attorno ad un suo asse in modo uniforme. Un sassolino è posto in un punto dell'equatore.

- Si esprima, in funzione di ρ , il periodo minimo di rotazione che il corpo può avere affinché il sassolino possa rimanere appoggiato.



$$\vec{F}_g + \vec{N} = m \vec{a}_c \quad \Rightarrow \quad -G \frac{Mm}{R^2} + N = -m \omega^2 R$$

$$N = G \frac{Mm}{R^2} - m \omega^2 R > 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \leq G \frac{M}{R^3}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \leq G \frac{4/3 \pi R^3 \rho}{R^3} = \frac{4}{3} \pi G \rho \quad \Rightarrow \quad T_{\min} = \sqrt{\frac{3\pi}{G \rho}}$$

Domande 1

Da dove Newton ha desunto questa espressione della forza?

Qual è la relazione tra masse gravitazionali e masse inerziali?

Come scrivere le equazioni del moto per sistemi gravitanti?

Come interviene l'energia potenziale?

Cosa fare quando i corpi sono estesi ? *

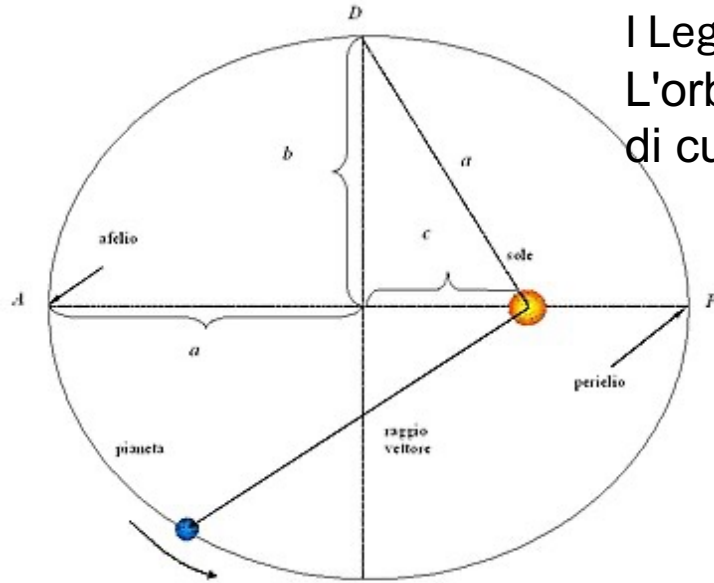
Quali Verifiche Sperimentali ? *

Quali i Limiti di validità ? *

Cosa sapeva Newton ?

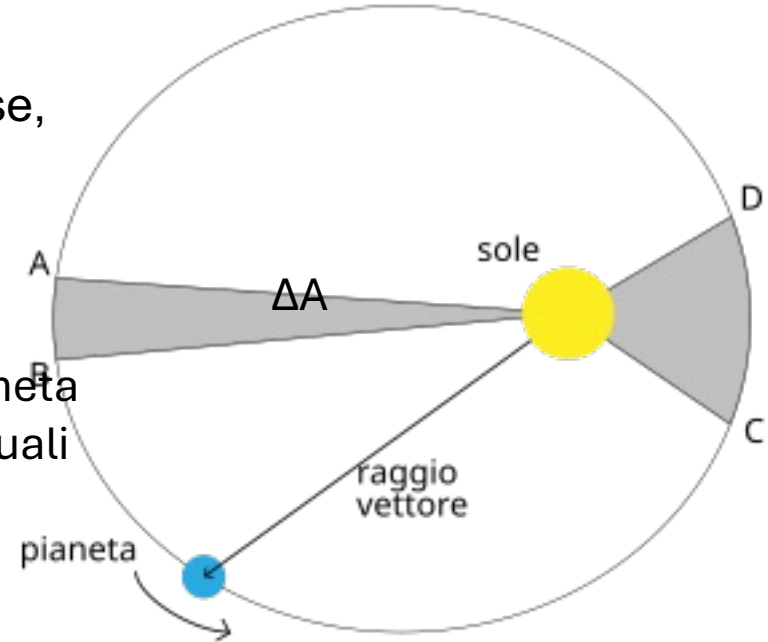
I Legge di Keplero

L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.



II Legge di Keplero

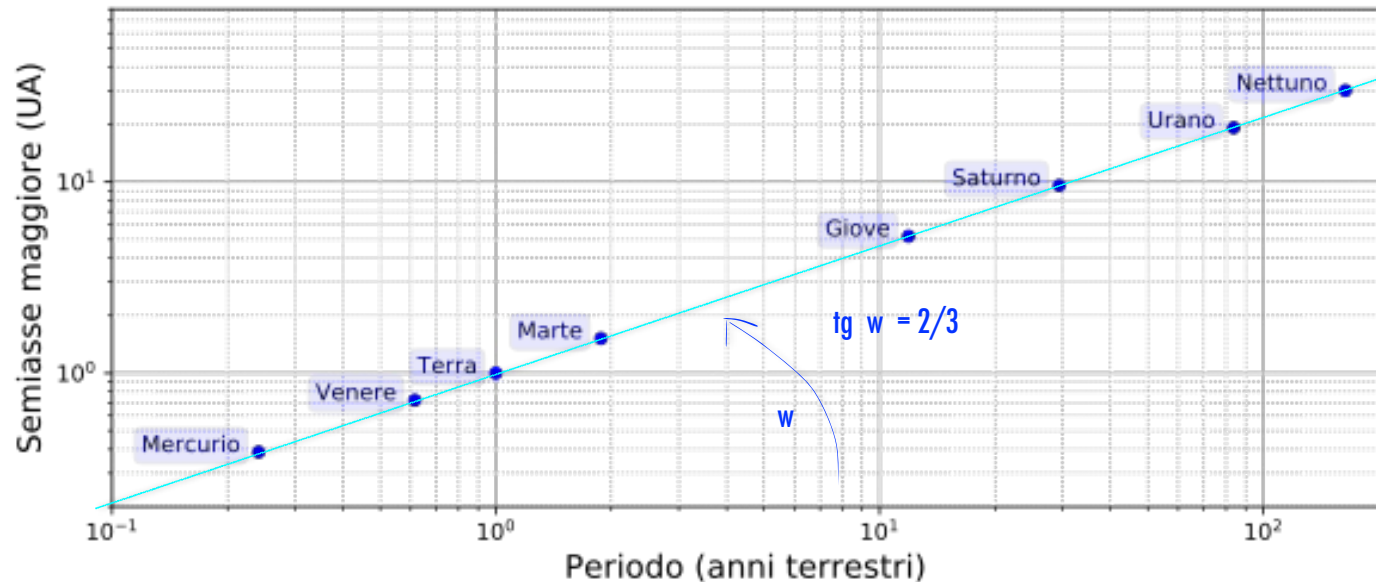
Il raggio vettore dal Sole al pianeta spazza aree uguali in tempi uguali



III Legge di Keplero

Il quadrato del periodo di rivoluzione (T) di un pianeta attorno al Sole è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita (a):

$$a^3/T^2 = \text{costante} = GM/4\pi^2$$



**Come si possono combinare questi fatti?
Qual è la loro relazione con F_{12} ?**

Le Equazioni del Moto per due masse $\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)$

Il moto è descritto da **6** variabili indipendenti !!!!

$$((\Delta t \rightarrow 0)) \quad \frac{\Delta}{\Delta t} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{v}_1(t) \quad \frac{\Delta}{\Delta t} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{v}_2(t), \quad \frac{\Delta}{\Delta t} \mathbf{v}_1(t) = \mathbf{a}_1(t) \quad \frac{\Delta}{\Delta t} \mathbf{v}_2(t) = \mathbf{a}_2(t)$$

$$\frac{\Delta}{\Delta t} f = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

Il Principio
della Dinamica
di Newton

$$m_1^I \mathbf{a}_1 = \mathbf{F}_{12}, \quad m_2^I \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_{21}$$

III Principio di Newton

$$m_1^I \mathbf{a}_1(t) + m_2^I \mathbf{a}_2(t) = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{12} - \mathbf{F}_{12} = \mathbf{0} \quad \leftarrow \text{Simmetria per traslazioni spaziali}$$

$$((\Delta t \rightarrow 0)) \quad = \frac{\Delta}{\Delta t} (m_1^I \mathbf{v}_1(t)) + \frac{\Delta}{\Delta t} (m_2^I \mathbf{v}_2(t)) = \frac{\Delta}{\Delta t} (\mathbf{p}_1(t) + \mathbf{p}_2(t)) = \frac{\Delta}{\Delta t} \mathbf{p}_{tot}(t)$$

$$\mathbf{p}_{tot}(t) = \mathbf{P}_{iniz}$$

La quantità di moto totale del sistema delle due masse si conserva

Il Principio di conservazione
della quantità di moto

Conservazione della quantità di moto

$$\mathbf{p}_{tot}(t) = m_1^I \mathbf{v}_1(t) + m_2^I \mathbf{v}_2(t) = \frac{\Delta}{\Delta t} (m_1^I \mathbf{r}_1(t) + m_2^I \mathbf{r}_2(t)) = \mathbf{P}_{iniz}$$

$$m_1^I \mathbf{r}_1(t) + m_2^I \mathbf{r}_2(t) = (m_1^I + m_2^I) \mathbf{R} = \mathbf{P}_{iniz} t + (m_1^I + m_2^I) m_1^I \mathbf{r}_1(0) + m_2^I \mathbf{r}_2(0)$$

Moto del Centro di Massa :

esso è rettilineo uniforme determinato solo dalle condizioni iniziali

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{P}_{iniz}}{(m_1^I + m_2^I)} t + \frac{m_1^I \mathbf{r}_1(0) + m_2^I \mathbf{r}_2(0)}{(m_1^I + m_2^I)}$$

Coordinate Relative : $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{R} + \frac{m_1^I}{(m_1^I + m_2^I)} \mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{R} - \frac{m_2^I}{(m_1^I + m_2^I)} \mathbf{r}$$

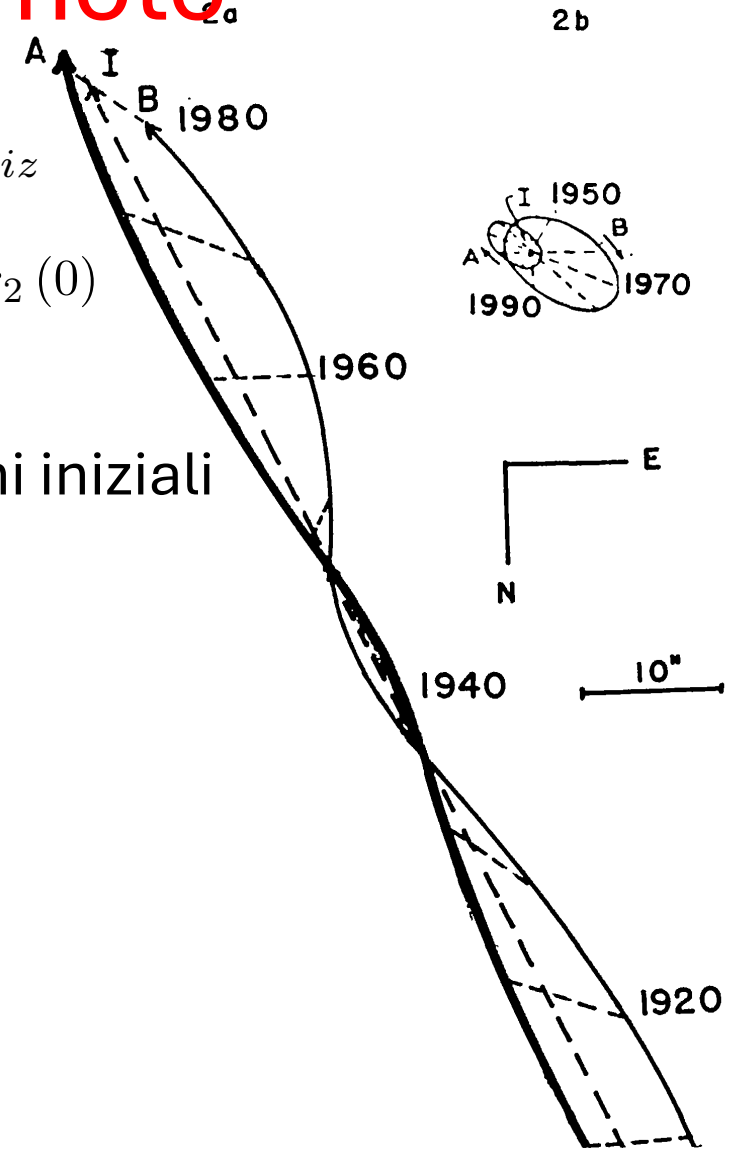


Fig. 2—a. Heliocentric paths of Sirius A, Sirius B, and the center of mass of the system, I.

b. Orbits of A and B around their common focus or center of mass.

L'Energia cinetica totale

costante

$$T = \frac{1}{2}m_1^I \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2}m_2^I \mathbf{v}_2^2 = \frac{\mathbf{P}_{iniz}^2}{2(m_1^I + m_2^I)} + \frac{1}{2}\mu \mathbf{v}^2, \quad \mathbf{v} = \frac{\Delta}{\Delta t} \mathbf{r} \quad \mu = \frac{m_1^I m_2^I}{m_1^I + m_2^I} \quad \text{Massa ridotta}$$

Mercury->	3.301*10 ²³ Kg	$\mu =$	1.660*10 ⁻⁷	x	1.988*10 ³⁰ Kg Massa Sole
Venus ->	4.867*10 ²⁴ Kg		2.448*10 ⁻⁶		
Earth ->	5.97*10 ²⁴ Kg		3.00*10 ⁻⁶		
Mars ->.	6.417*10 ²³ Kg		3.227*10 ⁻⁷		
Jupiter ->.	1.898*10 ²⁷		0.000954		
Saturn->	5.683*10 ²⁶		0.0002857		
Uranus->	8.681*10 ²⁵		0.0000437		
Neptune ->	1.0243*10 ²⁶		0.0000515		

$$\mu \frac{\Delta}{\Delta t} \mathbf{v} = \mathbf{F} \quad \mathbf{F}_{21} \rightarrow \mathbf{F} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Il problema delle due masse in attrazione gravitazionale è ridotto a quello del moto di una sola particella, di Massa ridotta, sottoposta all'azione di un *centro di forze centrali*, posto nel *Centro di Massa* del sistema originario.

Questa procedura è valida per qualunque forza di interazione che dipenda dalla posizione relativa dei due corpi e newtoiana

$$\mathbf{F}_{21} = \mathbf{f}(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t))$$

Ma ora la forza è **centrale**

$$\mathbf{F}_{21} = \mathbf{f}(|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)|) = f(|\mathbf{r}|) \hat{\mathbf{r}}$$

Esempi : F. Coulomb

$$\mathbf{F} = k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}|^2} \hat{\mathbf{r}}$$

F. Yukawa $\mathbf{F}_{Yukawa} = -c \frac{|\mathbf{r}| + r_0}{r_0 |\mathbf{r}|^2} \exp(-|\mathbf{r}|/r_0) \hat{\mathbf{r}}$

Forze Centrali e Momento Angolare

$$\mathbf{F} = f(|\mathbf{r}|) \hat{\mathbf{r}}$$

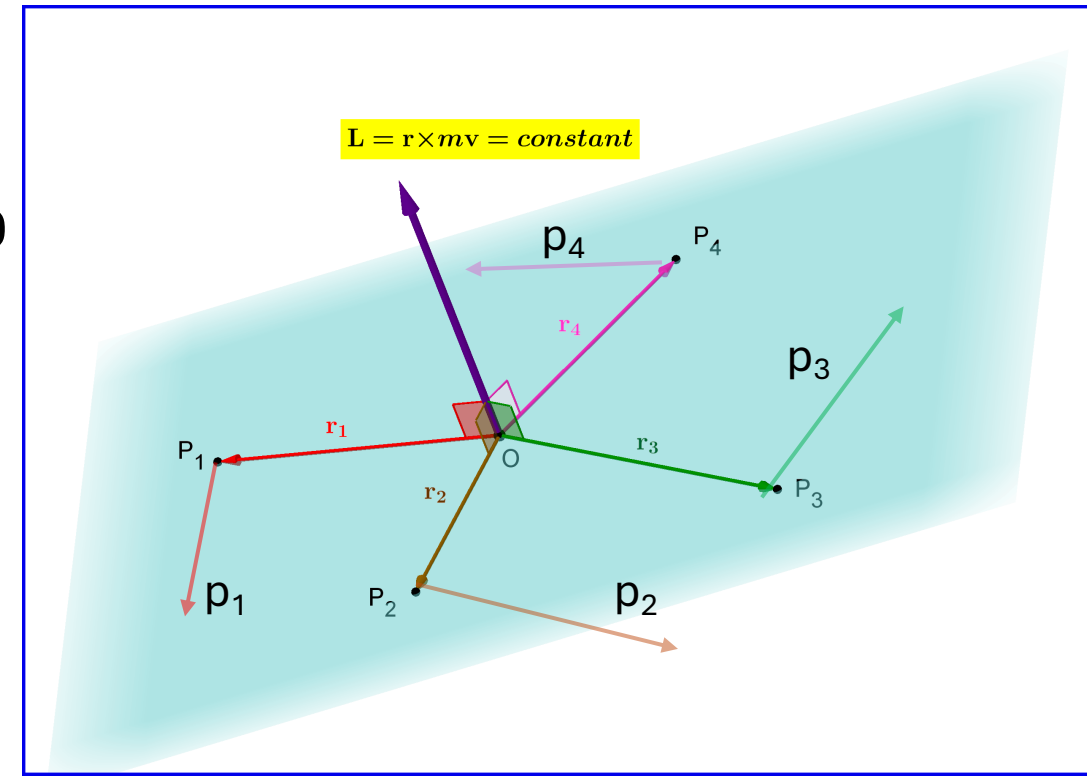
Simmetria del sistema per rotazioni

Momento Angolare $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta t} \mathbf{L} &= \frac{\Delta}{\Delta t} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \left(\frac{\Delta}{\Delta t} \mathbf{r} \right) \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \left(\frac{\Delta}{\Delta t} \mathbf{p} \right) = \\ &\mathbf{v} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mu \mathbf{v} \times \mathbf{v} + f(|\mathbf{r}|) \mathbf{r} \times \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Conservazione del Momento Angolare !! $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{iniz}$

Il Moto avviene nel piano ortogonale a $\mathbf{L}_{iniz}$



Es. 3

P 1

Un satellite cosiddetto “geostazionario” gira intorno alla Terra in (circa) 24 ore, stando ad un’altezza di circa 36 000 km sulla superficie terrestre.

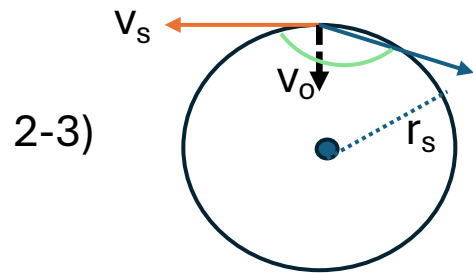
1. In quanto tempo una sonda spaziale percorre un’orbita circolare se la sua altezza dal suolo è di circa 900 km ?

Per un esperimento si vuole lanciare, dalla sonda spaziale verso la Terra, un oggetto che cada giù verticalmente, con una velocità iniziale $v_0 = 1.5 \text{ km s}^{-1}$ rispetto alla Terra (l’oggetto ha una massa trascurabile rispetto a quella della sonda).

2. Rispetto alla direzione di moto della sonda, a che angolo sarà lanciato l’oggetto?
3. Che velocità viene data all’oggetto, rispetto alla sonda?
4. Supponendo di poter trascurare la presenza dell’atmosfera fino ad una quota di circa 20 km dal suolo, che velocità ha l’oggetto quando incontra l’atmosfera?

NOTA: Nella soluzione del problema utilizzare, oltre ai valori numerici dei dati, solo quelli dell’accelerazione di gravità al suolo g e del raggio della Terra $R_T \approx 6400 \text{ km}$.

1). III L. Keplero $\frac{r_g^3}{T_g^2} = \frac{r_s^3}{T_s^2} \Rightarrow T_s = \left(\frac{r_s}{r_g}\right)^{3/2} T_g \approx 103 \text{ min} \quad v_s = 2\pi r_s / T_s \approx 7.4 \text{ km s}^{-1}$



$$\tan \alpha = \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = -\frac{v_0}{v_s} \Rightarrow \alpha \approx 169^\circ$$

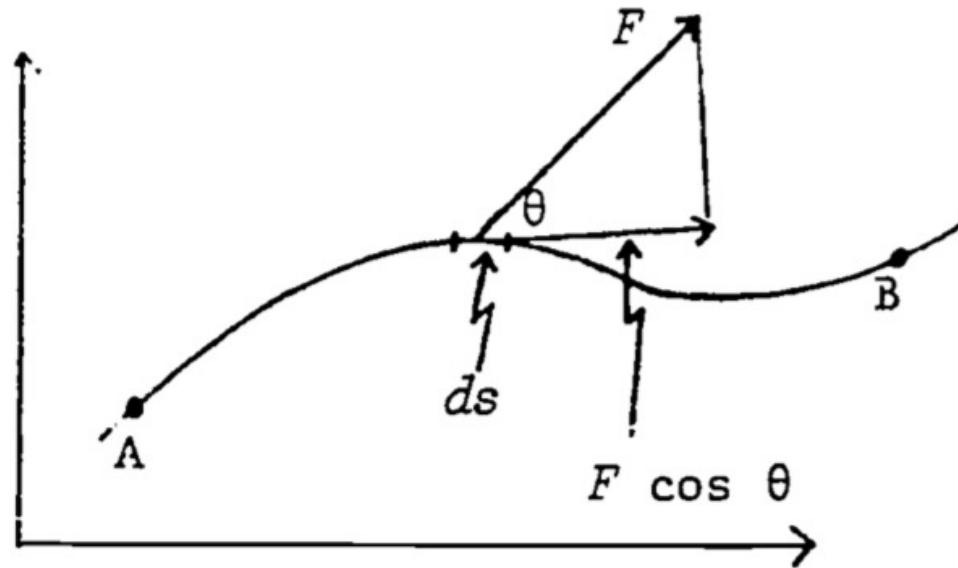
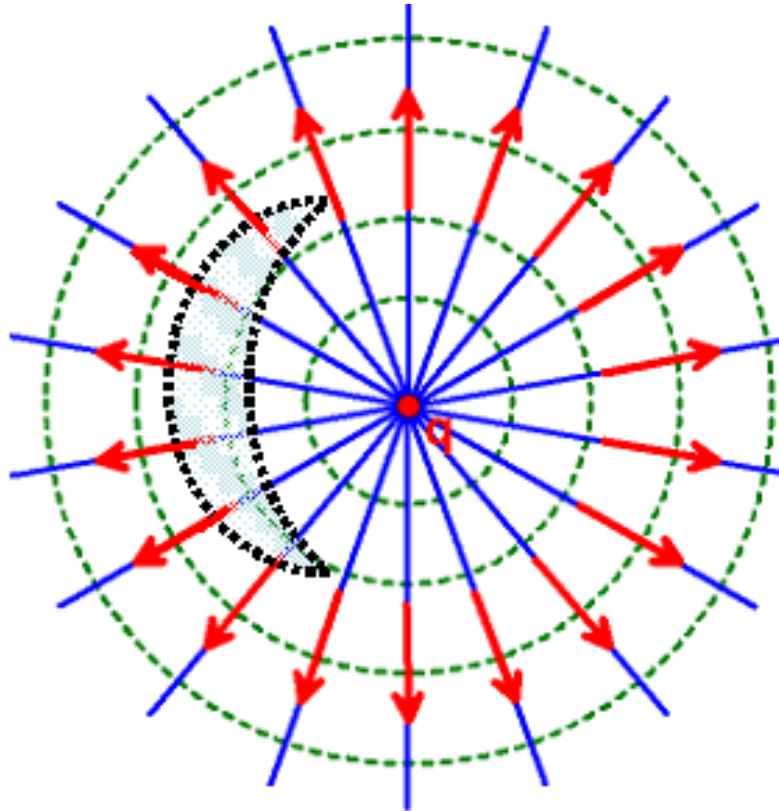
$$v_r = \sqrt{v_0^2 + v_s^2} \approx 7.6 \text{ km s}^{-1}$$

L'energia Potenziale di Forze Centrali

L'energia potenziale NON dipende dal cammino A – B , ma solo da $|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|$

$$\mathbf{F} = f(|\mathbf{r}|) \hat{\mathbf{r}}$$

$$U(\mathbf{r}_B) - U(\mathbf{r}_A) = -\mathcal{L}_{A \rightarrow B} = - \sum_{\Delta \mathbf{r}, |\Delta \mathbf{r}| \rightarrow 0} \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r}$$



$$U(\mathbf{r}) = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|}$$

E. Potenziale gravitazionale

$$U_C(\mathbf{r}) = k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}|}$$

E. Potenziale coulombiana

$$U_{Yukawa}(\mathbf{r}) = -c \frac{\exp(-|\mathbf{r}|/r_0)}{|\mathbf{r}|}$$

E. Potenziale Yukawa

$$\mathbf{F} = -\frac{\Delta}{\Delta r} U(|\mathbf{r}|) \hat{\mathbf{r}} \quad (r = |\mathbf{r}|)$$

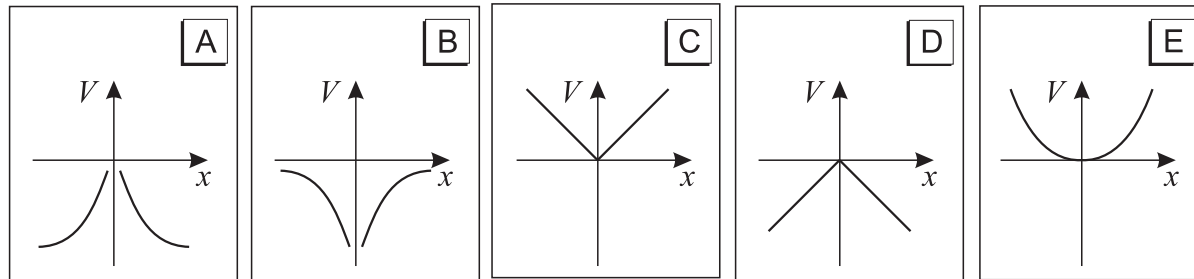
Su un qualunque cammino chiuso il lavoro è nullo

$$U(\infty) = 0$$

Es. 4

Q7

- Quale dei seguenti grafici rappresenta il potenziale gravitazionale V dovuto a una massa puntiforme posta in $x = 0$, in funzione della coordinata x ?



Q8

Un modulo lunare di massa 1850 kg sta scendendo verticalmente sulla superficie della Luna. Quando si trova a 2 km di altezza e ha una velocità di 87 m s^{-1} , accende i motori per frenare.

- Quale dev'essere la spinta dei motori, supposta costante, se si vuole che il modulo si posi sulla superficie lunare con velocità nulla?

Trattare come uniforme il campo di gravità.

QUESITO n. 8

Fissando un asse verticale, orientato verso il basso, con l'origine nel punto in cui inizia la frenata, si ha

$$v_i = 87 \text{ m s}^{-1}, \quad v_f = 0; \quad s_i = 0, \quad s_f = 2 \text{ km}.$$

Le forze che agiscono sul modulo (spinta S e peso mg_L) sono costanti nel tempo, quindi il moto è uniformemente accelerato con accelerazione data dalla seconda legge della dinamica

$$mg_L - S = ma \Rightarrow a = g_L - \frac{S}{m}, .$$

Dalle equazioni del moto uniformemente accelerato si ottengono le leggi orarie

$$v_f = v_i + at \quad s_f = s_i + v_i t + \frac{1}{2} at^2 .$$

Quindi, dalla prima $t = -v_i/a$; sostituendo nella seconda e ricordando che $v_f = 0$ e $s_i = 0$ si ottiene

$$-\frac{1}{2}v_i^2 = as_f = \left(g_L - \frac{S}{m}\right) s_f \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{2s_f}mv_i^2 + mg_L = 6\,500 \text{ N} .$$

Allo stesso risultato si può arrivare, sempre per via cinematica, anche partendo dalla relazione, valida nel moto uniformemente accelerato:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a \Delta s \quad \text{dalla quale si ottiene} \quad -\frac{1}{2}v_i^2 = as_f = \left(g_L - \frac{S}{m}\right) s_f$$

e si procede come sopra.

Si può anche usare la relazione tra lavoro delle forze non conservative ed energia meccanica E_M . Essendo la spinta S non conservativa e diretta in verso opposto allo spostamento $\Delta s = s_f - s_i = s_f$ si ha

$$-Ss_f = \Delta E_M = 0 - \left(\frac{1}{2}mv_i^2 + mg_L s_f\right) \quad \text{da cui si ottiene facilmente l'espressione per } S.$$

$$S = \frac{1}{2s_f}mv_i^2 + mg_L = 6\,500 \text{ N} .$$

RIS $\Rightarrow$

$$6\,450 \leq S \leq 6\,550 \quad [\text{N}]$$

Es. 3.4 Supponendo di poter trascurare la presenza dell'atmosfera fino ad una quota di circa 20 km dal suolo, che velocità ha l'oggetto quando incontra l'atmosfera?

$$K_{\text{ini}} + U_{\text{ini}} = K_{\text{fin}} + U_{\text{fin}} \quad \Rightarrow \quad K_{\text{fin}} = K_{\text{ini}} + U_{\text{ini}} - U_{\text{fin}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mv_0^2 + \left(\frac{GM_{\text{T}} m}{R_{\text{T}} + h} - \frac{GM_{\text{T}} m}{R_{\text{T}} + h_{\text{s}}} \right) = \frac{1}{2}mv_0^2 + gmR_{\text{T}}^2 \left(\frac{1}{R_{\text{T}} + h} - \frac{1}{R_{\text{T}} + h_{\text{s}}} \right) = \\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 + gm \frac{R_{\text{T}}^2}{(R_{\text{T}} + h)(R_{\text{T}} + h_{\text{s}})} (h_{\text{s}} - h) \approx \frac{1}{2}mv_0^2 + gm(h_{\text{s}} - h) \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2g \frac{R_{\text{T}}^2 (h_{\text{s}} - h)}{(R_{\text{T}} + h)(R_{\text{T}} + h_{\text{s}})}} = 4.16 \text{ km s}^{-1} \quad \text{oppure} \quad v \approx \sqrt{v_0^2 + 2g(h_{\text{s}} - h)} = 4.42 \text{ km s}^{-1}$$

Es. 4

Problema 1

Sonda SOHO (SOlar & Heliospheric Observatory)

20 punti

La sonda SOHO è stata mandata in orbita solare per studiare la struttura interna del Sole, la sua atmosfera ed il vento solare. In prima approssimazione si può affermare che essa staziona costantemente in un punto lungo la linea che congiunge la Terra al Sole.

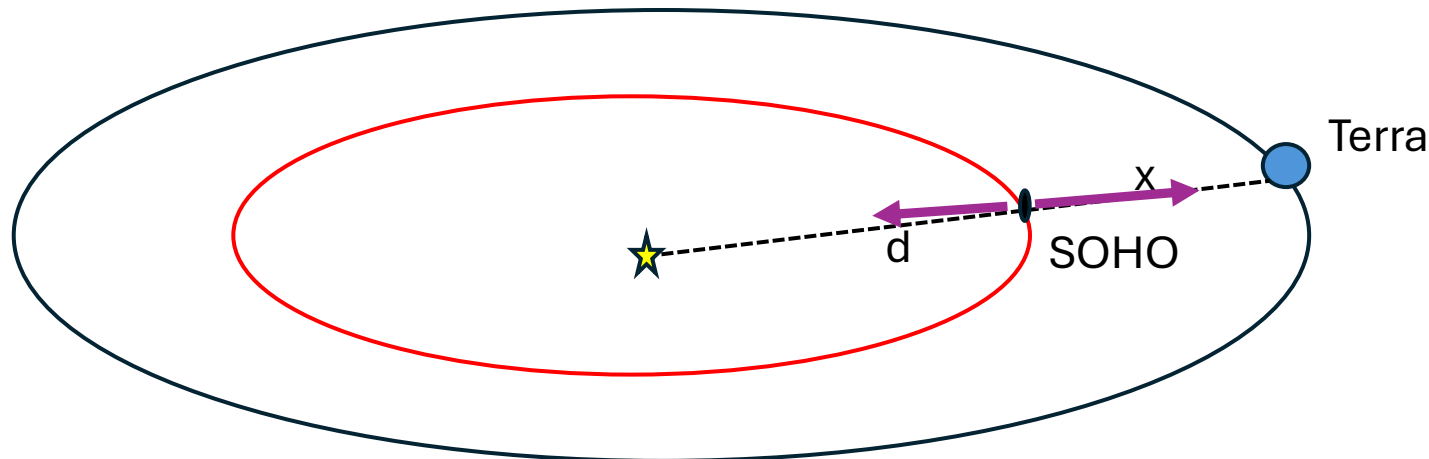
1. Quanto dista SOHO dalla Terra?

Nota: assumere l'orbita della Terra come circolare. Possono essere utili i seguenti dati:

- Distanza Sole - Terra 149.6×10^9 m.
- Rapporto fra la massa della Terra e quella del Sole $\alpha = 3.00 \times 10^{-6}$.

Suggerimento: ricorda che $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, se $x \ll 1$.

Problema dei 3 Corpi ridotto



$$m\omega^2(d - x) = \frac{GM_{\text{Sole}}m}{(d - x)^2} - \frac{GM_{\text{Terra}}m}{x^2},$$

III Legge di Keplero per la Terra $\omega^2 = GM_{\text{Sole}}/d^3 \stackrel{.}{=} \underline{(\omega_{SOHO})^2}$

$$\frac{GM_{\text{Sole}}(d-x)}{d^3} = \frac{GM_{\text{Sole}}}{(d-x)^2} - \frac{GM_{\text{Terra}}}{x^2}$$

$$\frac{d-x}{d^3} = \frac{1}{(d-x)^2} - \frac{\alpha}{x^2} \quad \stackrel{t=x/d}{\Rightarrow} \quad 1-t = \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{\alpha}{t^2}.$$

$$\alpha = M_{\text{Terra}}/M_{\text{Sole}} = 3.00 \times 10^{-6}$$

$$\frac{1}{(1-t)^2} \approx 1 + 2t \quad 1-t = 1 + 2t - \frac{\alpha}{t^2} \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt[3]{\frac{\alpha}{3}} = 0.01 \quad x = td = 1.496 \times 10^9 \text{ m}$$

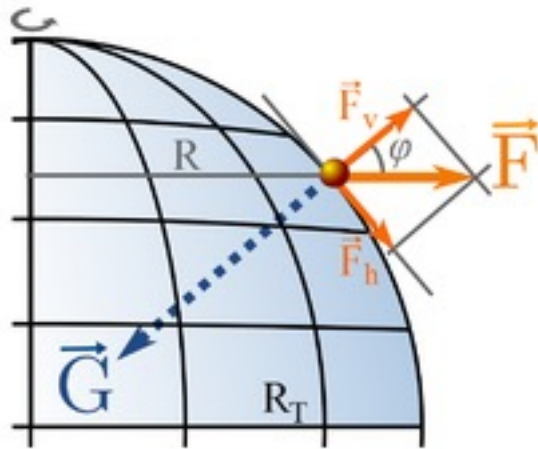
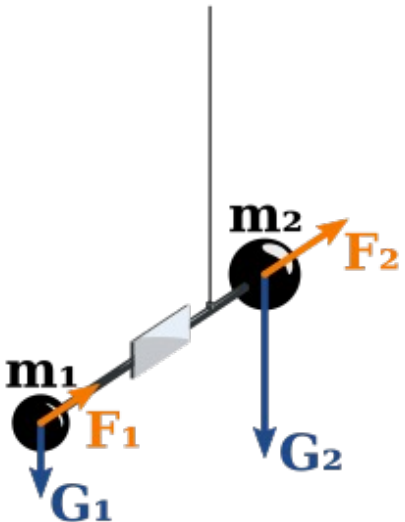
Energia Totale di due masse

$$E_{tot} = T + U = \frac{1}{2}\mu \mathbf{v}^2 - G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|}$$

Newton fa l'ipotesi che $m_k^I = m_k$ $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Principio di Equivalenza

in una zona delimitata dello spazio-tempo, è sempre possibile scegliere un opportuno sistema di riferimento, in modo da simulare l'esistenza di un campo gravitazionale uniforme o, reciprocamente, in modo da eliminare l'effetto della forza di gravità costante.



Esperienza di Eötvös

$$\mathbf{v} = v_r \hat{\mathbf{r}} + r\omega \hat{\theta} = \left(\frac{\Delta}{\Delta t} |\mathbf{r}| \right) \hat{\mathbf{r}} + |\mathbf{r}| \left(\frac{\Delta}{\Delta t} \theta \right) \hat{\theta}, \quad \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\theta} = 0$$

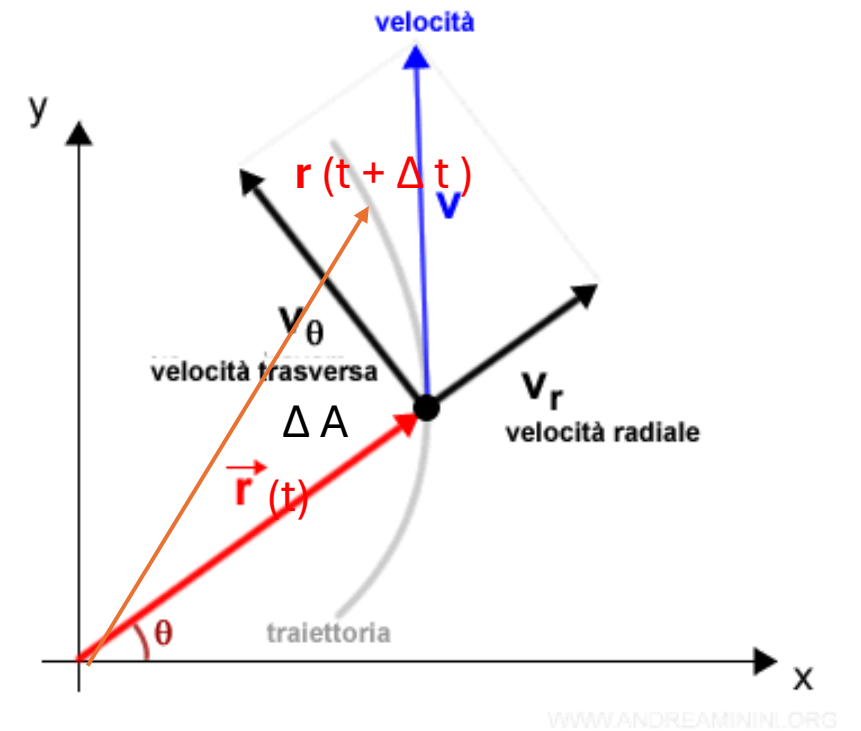
$$v^2 = \left(\frac{\Delta}{\Delta t} |\mathbf{r}| \right)^2 + |\mathbf{r}|^2 \left(\frac{\Delta}{\Delta t} \theta \right)^2 = v_r^2 + r^2 \omega^2$$

$$|\mathbf{L}| = |\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v}| = \mu r^2 \omega = \mu r^2 \frac{\Delta}{\Delta t} \theta \quad \text{Costante del moto !!}$$

$$\omega = \frac{\Delta}{\Delta t} \theta = \frac{|\mathbf{L}|}{\mu r^2}$$

Il Legge di Keplero

$$\frac{\Delta}{\Delta t} A = \frac{\Delta}{\Delta t} \left(\frac{1}{2} r^2 \Delta \theta \right) = \frac{|\mathbf{L}|}{2\mu}$$



Equazione radiale

Ci poniamo nel sistema di riferimento rotante a pulsazione ω

$$\mu a_r = \mu \frac{\Delta}{\Delta t} v_r = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} + \mu r \omega^2$$

Forza di attrazione gravitazionale
+ centrifuga

$$\mu \frac{\Delta}{\Delta t} v_r = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} + \frac{|\mathbf{L}|^2}{\mu r^3}$$

Il problema è ridotto alla sola
variabile $r(t)$!!!

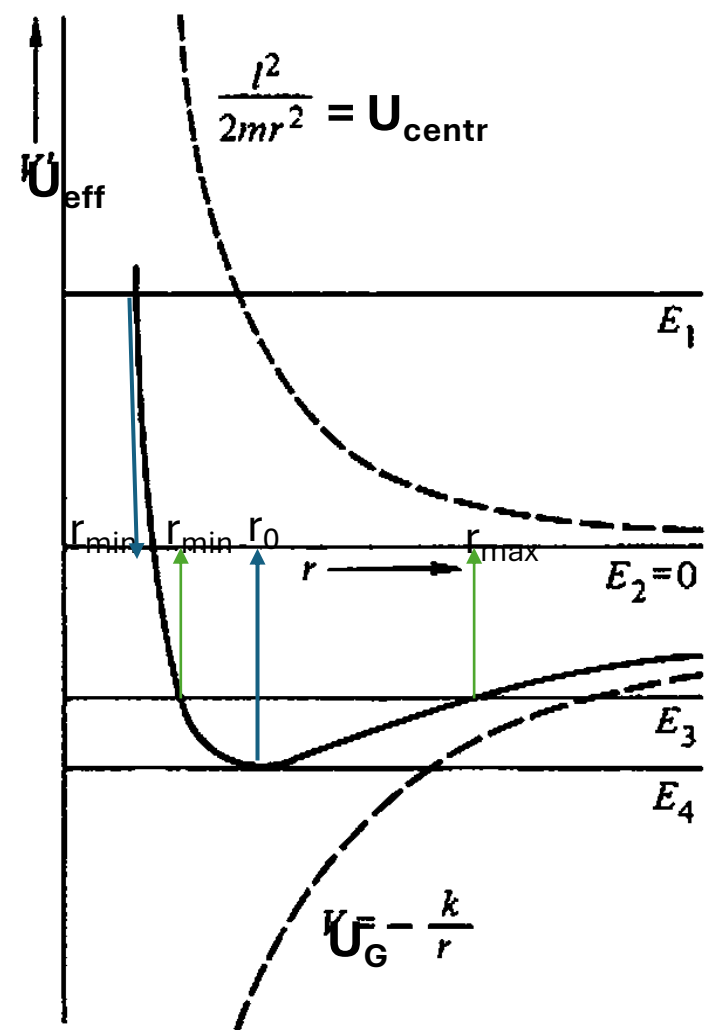
E' possibile scrivere l'equazione del moto
nella forma conservativa ?

$$\mu \frac{\Delta}{\Delta t} v_r = - \frac{\Delta}{\Delta r} U_{eff}$$

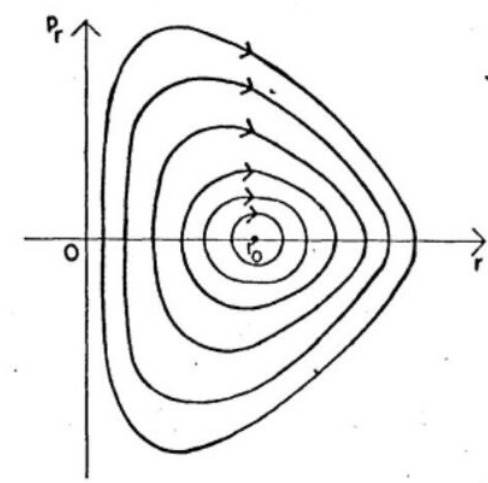
Chi è U_{eff} ?

$$U_{eff} = U_G + U_{centr} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|} + \frac{|\mathbf{L}|^2}{2\mu r^2}$$

Potenziale Efficace



Piano delle fasi



$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \times \mathbf{L} - G \frac{m_1 m_2}{r} \mathbf{r} \quad \frac{\Delta}{\Delta t} \mathbf{A} = 0$$

Vettore di Runge-Lenz

Il Vettore di Runge-Lenze è
una costante del moto

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\Delta t} \mathbf{A} &= \mathbf{a} \times \mathbf{L} - G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|} \mathbf{v} + G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|^3} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} = \\ &= -G \frac{m_1 m_2}{r} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mu \mathbf{v}) - G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|} \mathbf{v} + G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|^3} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} = \\ &= -G \frac{m_1 m_2}{r^3} [\mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} r^2] - G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|} \mathbf{v} + G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}|^3} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$$

$$|\mathbf{A}|^2 = (G m_1 m_2)^2 \mu^2 + 2\mu |\mathbf{L}|^2 \left(\frac{1}{2} \mu \mathbf{v}^2 - G \frac{m_1 m_2}{r} \right) = (G m_1 m_2)^2 \mu^2 + 2\mu |\mathbf{L}|^2 E_{tot}$$

Funzione solo di $\mathbf{L}$ ed E

La Traiettoria

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{r} = \mu G m_1 m_2 e \cos(\mathbf{r} \hat{\mathbf{r}}_{max}) = |\mathbf{L}|^2 - \mu G m_1 m_2 r \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}_{max}) = G m_1 m_2 \mu e \frac{\mathbf{r}_{max}}{|\mathbf{r}_{max}|}$$

$$r = \frac{|\mathbf{L}|^2 / (\mu G m_1 m_2)}{1 + e \cos \theta}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2|\mathbf{L}|^2 E_{tot}}{\mu (G m_1 m_2)^2}}$$

$E_{tot} < 0 \rightarrow e < 1$: ellissi, $E_{tot} = 0 \rightarrow e = 1$: parabola, $E_{tot} > 0 \rightarrow e > 1$: iperbole,
Orbite chiuse !!!

Le equazioni del moto sono state risolte usando solo le costanti del moto !! (Caso eccezionale, ma importante)

$$(e < 1) \quad a = \frac{1}{2} (r_{min} + r_{max}) = \frac{G m_1 m_2}{2|E_{tot}|}, \quad b = \frac{|\mathbf{L}|^2}{\sqrt{2\mu|E_{tot}|}} \quad \text{I semiassi}$$

$$\frac{\Delta}{\Delta t} A = \frac{|\mathbf{L}|}{2\mu} \Rightarrow A = \pi a b = \frac{|\mathbf{L}|}{2\mu} T$$

$$T^2 = (4\pi)^2 \frac{\mu}{G m_1 m_2} a^3 \quad \text{III Legge di Keplero}$$

La legge di gravitazione di Newton contiene le tre leggi di Keplero come sue conseguenze !!!

P I

Un granello di polvere su un satellite

Punti 22

Un satellite di raggio a e massa m descrive un'orbita circolare di raggio r attorno a un pianeta di massa M ; si trattino pianeta e satellite come sferici e omogenei.

Il centro di massa del sistema si può considerare coincidente con il centro del pianeta. I periodi di rotazione e rivoluzione del satellite sono identici, cosicché il satellite rivolge al pianeta sempre la stessa faccia (come la Luna fa con la Terra). In tutto il problema si trascuri la gravità della stella attorno a cui orbita il pianeta.

1. Si calcoli, in funzione di M ed r , la velocità angolare del moto di rivoluzione del satellite attorno al pianeta.

Si consideri un piccolo corpo di massa μ appoggiato sulla superficie del satellite, nel punto più vicino al pianeta.

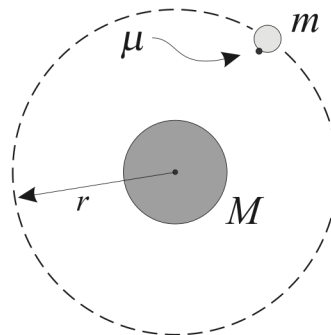
2. Si calcoli il modulo N della forza normale esercitata dalla superficie del satellite sul corpo. Si esprima il risultato in funzione di μ , M , m , r e a .
3. Qual è la condizione che deve essere verificata affinché il corpuscolo non si stacchi dalla superficie del satellite?

Se il satellite fosse troppo vicino al pianeta, il piccolo corpo non riuscirebbe a rimanere appoggiato sulla superficie del satellite.

4. Nell'ipotesi $a/r \ll 1$ si calcoli il minimo raggio orbitale r_0 per cui il corpuscolo non si stacca dalla superficie del satellite. Si esprima il risultato in funzione di M , m e a .

Suggerimento: si ricordi che, per $|x| \ll 1$ si può usare l'approssimazione $(1 \pm x)^\alpha \approx (1 \pm \alpha x)$ per qualunque α (anche negativo). Di conseguenza i binomi $(r \pm a)^\alpha$ con $a \ll r$ si possono approssimare ponendo $r \pm a = r(1 \pm a/r)$

5. Qual è il minimo raggio a cui potrebbe orbitare intorno alla Terra un piccolo satellite sferico di densità pari a $(2.49 \pm 0.01) \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ senza che un corpo appoggiato sulla sua superficie, nel punto più vicino al pianeta, si stacchi?



Q9

Una navetta spaziale di massa m si trova su un'orbita circolare di raggio R attorno alla Terra.

L'equipaggio della navetta deve portarla su un'orbita circolare di raggio $3R$ utilizzando la seguente procedura: per prima cosa, accende i motori per un breve tempo in modo che al termine dell'accensione si trovi su un'orbita ellittica con apogeo a $3R$. Dopo aver percorso mezza orbita, la navetta si trova a distanza $3R$ dal centro della Terra; a questo punto viene dato un altro impulso con i motori per portare la navetta su un'orbita circolare a $3R$.

- Quanta energia devono fornire complessivamente i motori alla navetta spaziale?

Si trascurino le perdite di massa della navetta a causa dell'uso dei motori e si esprima il risultato in termini di R , m , della massa della Terra M e della costante G .