

Meccanica 2

Antonio Quintavalle

Un satellite di raggio a e massa m descrive un'orbita circolare di raggio r attorno a un pianeta di massa M ; si trattino pianeta e satellite come sferici e omogenei.

Il centro di massa del sistema si può considerare coincidente con il centro del pianeta. I periodi di rotazione e rivoluzione del satellite sono identici, cosicché il satellite rivolge al pianeta sempre la stessa faccia (come la Luna fa con la Terra). In tutto il problema si trascuri la gravità della stella attorno a cui orbita il pianeta.

1. Si calcoli, in funzione di M ed r , la velocità angolare del moto di rivoluzione del satellite attorno al pianeta.

Si consideri un piccolo corpo di massa μ appoggiato sulla superficie del satellite, nel punto più vicino al pianeta.

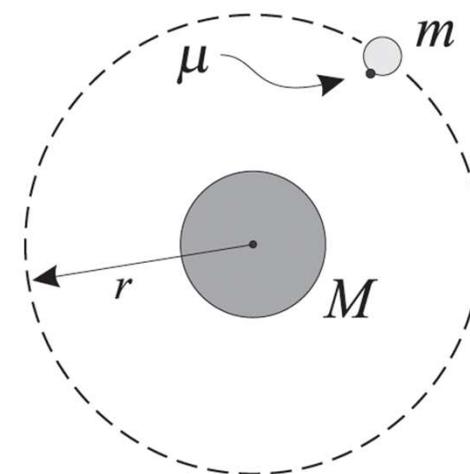
2. Si calcoli il modulo N della forza normale esercitata dalla superficie del satellite sul corpo. Si esprima il risultato in funzione di μ , M , m , r e a .
3. Qual è la condizione che deve essere verificata affinché il corpuscolo non si stacchi dalla superficie del satellite?

Se il satellite fosse troppo vicino al pianeta, il piccolo corpo non riuscirebbe a rimanere appoggiato sulla superficie del satellite.

4. Nell'ipotesi $a/r \ll 1$ si calcoli il minimo raggio orbitale r_0 per cui il corpuscolo non si stacca dalla superficie del satellite. Si esprima il risultato in funzione di M , m e a .

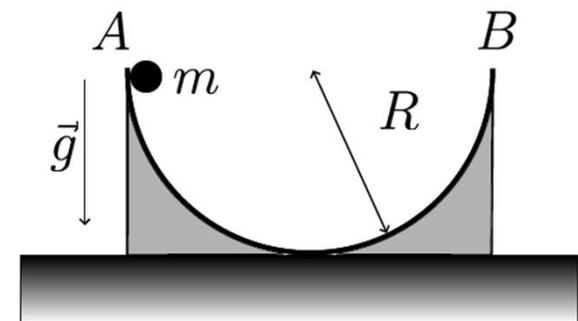
Suggerimento: si ricordi che, per $|x| \ll 1$ si può usare l'approssimazione $(1 \pm x)^\alpha \approx (1 \pm \alpha x)$ per qualunque α (anche negativo). Di conseguenza i binomi $(r \pm a)^\alpha$ con $a \ll r$ si possono approssimare ponendo $r \pm a = r(1 \pm a/r)$

5. Qual è il minimo raggio a a cui potrebbe orbitare intorno alla Terra un piccolo satellite sferico di densità pari a $(2.49 \pm 0.01) \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ senza che un corpo appoggiato sulla sua superficie, nel punto più vicino al pianeta, si stacchi?



\mathcal{P}_1 Riscaldare il tempo

Un oggetto di massa $m = 1 \text{ kg}$ si muove senza attrito e sotto l'effetto della gravità su una guida semicircolare fissata al suolo. La guida è disposta su un piano verticale e il suo diametro, i cui estremi sono i punti A e B , è orizzontale, come in figura. Sappiamo che l'oggetto impiega $t_0 = 2.2 \text{ s}$ per andare da A a B partendo da fermo. Se il raggio della guida raddoppiasse, quanto tempo impiegerebbe l'oggetto?



Unità di misura: s. Precisione richiesta: 0.5%.

Un corpo di massa M è appeso al soffitto tramite una molla ideale di costante elastica k . Il sistema è in quiete, nella sua configurazione di equilibrio.

1. Esprimere l'allungamento $\Delta\ell_0$ della molla in questa configurazione iniziale in funzione di M, k e dell'accelerazione di gravità g .

Il corpo viene urtato elasticamente da un corpo di uguale massa lanciato verticalmente dal basso. Sia v_0 la velocità di questo corpo al momento dell'urto. Si trascurino tutti gli attriti e si supponga che non avvengano altri urti tra i due corpi.

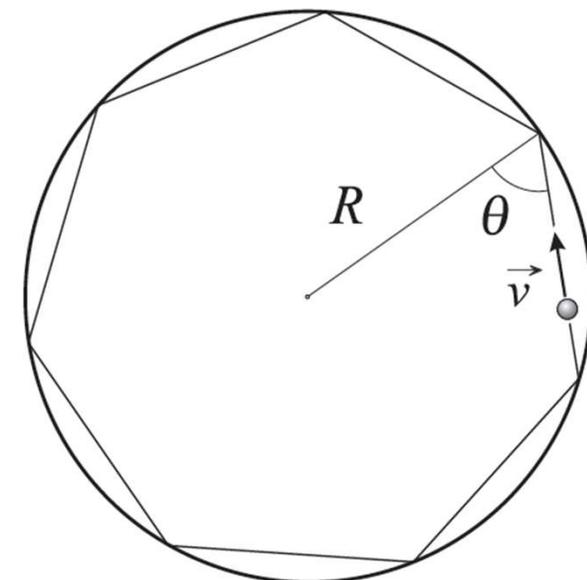
2. Esprimere in termini di M, k, g e v_0 l'allungamento massimo della molla $\Delta\ell_{\max}$ nel moto del corpo che è stato urtato.
3. Calcolare i valori numerici di $\Delta\ell_0$ e $\Delta\ell_{\max}$ se $M = 100 \text{ g}$, $k = 10 \text{ N m}^{-1}$, $v_0 = 20 \text{ cm s}^{-1}$.

Si supponga ora che il corpo di massa M sia costituito da due parti di massa m_1 e m_2 . Il sistema è tornato nella sua configurazione di equilibrio ed è in quiete. In un certo istante la parte di massa m_2 si stacca, e la parte rimanente inizia perciò ad oscillare.

4. Per quali valori del rapporto m_1/M la molla risulterà compressa, rispetto alla sua lunghezza di riposo, in alcune fasi della sua oscillazione?

Un oggetto di massa m e dimensioni trascurabili, in moto a velocità \vec{v} , incide sul bordo di una guida circolare priva di attrito con angolo θ rispetto alla normale, rimbalzando elasticamente. La guida, di raggio R , è fissata su un piano orizzontale, anch'esso senza attrito, e la traiettoria risultante è un poligono di n lati inscritto nella guida circolare.

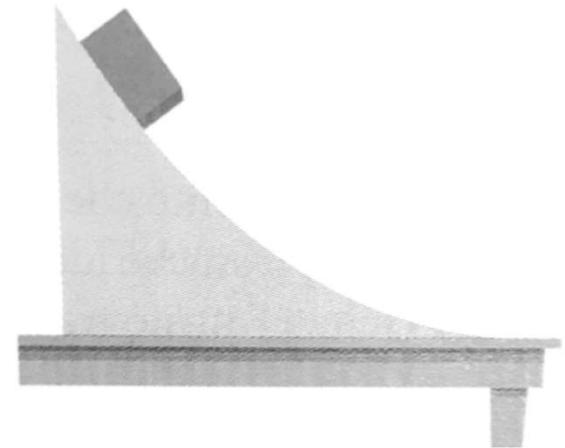
La figura mostra un esempio di questa situazione per una traiettoria poligonale di 7 lati ($n = 7$).



1. Determinare innanzitutto la variazione di quantità di moto di un corpo di massa m che urta una parete piana e priva di attrito, con velocità \vec{v} che forma un angolo θ con la normale alla parete e il valor medio dell'intensità della forza che la parete esercita sul corpo se questa agisce in un intervallo di tempo δt .
2. Nel caso esposto sopra di una traiettoria poligonale di n lati entro la guida circolare, quanto vale l'intensità media della forza che la parete circolare esercita sul corpo, assumendo ora che δt sia l'intervallo di tempo tra due urti successivi?
3. Passando al limite per n infinitamente grande che significato ha l'espressione trovata al punto precedente?

$\mathcal{P}8$ Piani smussati

Un blocco di massa 1.2 kg scende lungo una rampa di massa 2.4 kg , che è libera di muoversi lungo un tavolo orizzontale come in figura. Nel sistema non è presente alcuna forma di attrito. All'inizio il blocco e la rampa sono fermi; durante la discesa, il centro di massa del blocco si sposta di 90 cm verso il basso. La rampa è sagomata in modo da essere tangente al piano nella sua parte più bassa, facendo sì che la velocità del blocco sia orizzontale quando arriva in fondo. Quanto vale la velocità finale del blocco?



Unità di misura: m/s. *Precisione richiesta:* 0.5%.

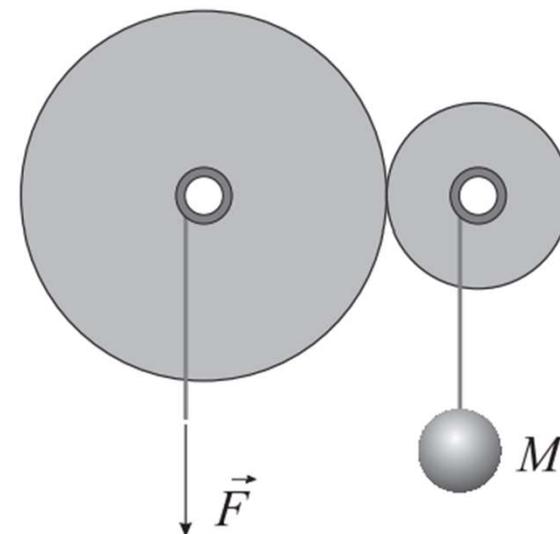


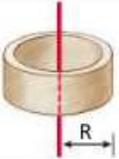
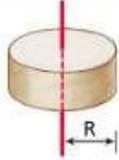
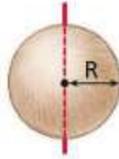
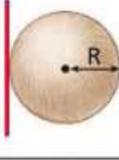
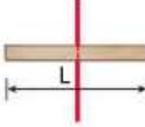
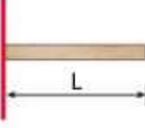
4

Il sistema in figura rappresenta due dischi di raggi $R_1 = R$ ed $R_2 = R/2$ che, per attrito, possono ruotare a contatto uno dell'altro senza slittare.

Su ciascun disco è fissato un rocchetto di raggio r su cui è avvolta una fune. Alla prima è applicata una forza verticale \vec{F} mentre alla seconda è appesa una massa M .

- Se sui perni non c'è attrito e tutto il sistema è in equilibrio, quanto vale il modulo della forza \vec{F} ?

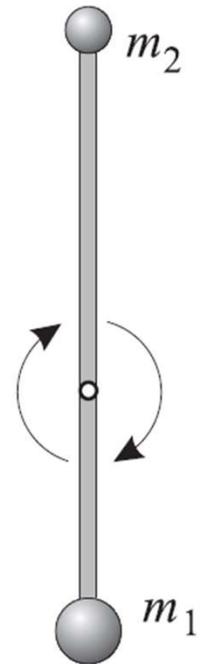


Momenti d'inerzia di alcuni corpi di massa m		
Cilindro o guscio cavo con pareti sottili, asse di rotazione coincidente con l'asse del cilindro		$I = mR^2$
Cilindro o disco pieno, asse di rotazione coincidente con l'asse del cilindro		$I = \frac{1}{2} mR^2$
Sfera piena, asse di rotazione passante per il centro		$I = \frac{2}{5} mR^2$
Sfera piena, asse di rotazione tangente alla superficie		$I = \frac{7}{5} mR^2$
Asta sottile, asse di rotazione perpendicolare all'asta e passante per il suo centro		$I = \frac{1}{12} mL^2$
Asta sottile, asse di rotazione perpendicolare all'asta e passante per un suo estremo		$I = \frac{1}{3} mL^2$

Q5

Un'asta rigida di massa trascurabile può ruotare attorno ad un perno. Due masse, una di $m_1 = 250$ g e l'altra di $m_2 = 200$ g, sono poste alle estremità dell'asta rispettivamente a distanza $d_1 = 100$ cm e $d_2 = 150$ cm dall'asse di rotazione. Il sistema, inizialmente fermo in posizione verticale con la massa m_2 in alto, viene spostato leggermente, nel verso indicato in figura. L'attrito è trascurabile.

- Qual è la velocità angolare quando il sistema passa per la posizione di equilibrio stabile?



\mathcal{P}_{13} Il piccolo principe

Il piccolo principe, di massa 50 kg, vive su un asteroide sferico uniforme, di massa 3.75×10^{13} kg e raggio 1960 m. Inizialmente l'asteroide è fermo e il piccolo principe è seduto a guardare il tramonto. Invidioso dei pianeti che ruotano attorno al proprio asse, egli decide di far sì che anche il suo asteroide ruoti su se stesso: perciò inizia a spostarsi, camminando a piccoli passi, lungo il suo equatore. Usando questa strategia, tuttavia, egli non riesce a dare all'asteroide una velocità angolare maggiore di un certo valore Ω . Quanto vale Ω ?

Unità di misura: 10^{-15} rad/s. *Precisione richiesta:* 0.5%.

Parte C

[Punti 7]

Tre cilindri, tutti di massa m , rotolano senza scivolare lungo un piano inclinato di altezza h . I cilindri hanno le seguenti caratteristiche: il primo è vuoto ed ha raggio r ; il secondo è pieno ed ha raggio $r/2$; il terzo è pieno ed ha raggio r .

- Se i tre cilindri sono stati lasciati liberi simultaneamente dalla stessa altezza, quale cilindro impiegherà più tempo a raggiungere la base del piano inclinato?

\mathcal{P}_5 Discesa dal cilindro

Un cilindro cavo, di raggio $r = 10$ cm, rotola senza strisciare su una superficie fissa a forma di semicilindro, di raggio $R = 1$ m, sotto l'effetto della gravità. Sia θ l'angolo formato dalla verticale con la congiungente i centri dei due oggetti, come in figura. Sapendo che quando $\theta = 0$ la velocità del cilindro è molto piccola, qual è il valore di θ nel momento in cui il cilindro si stacca dalla superficie?

Unità di misura: rad. *Precisione richiesta:* 0.5%.

