

# Meccanica del punto

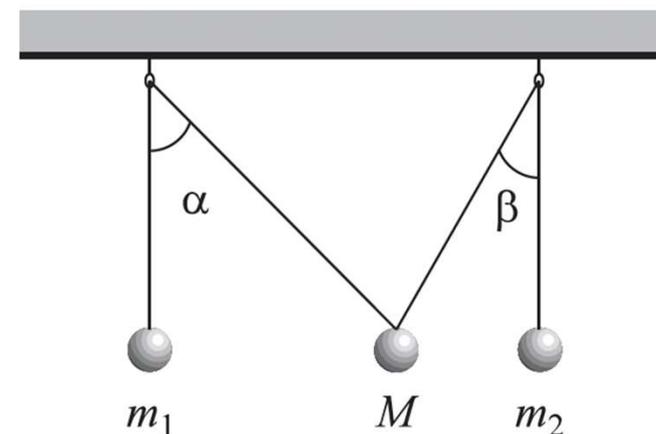
Antonio Quintavalle

XIV Scuola Estiva di Fisica

# Problema 8

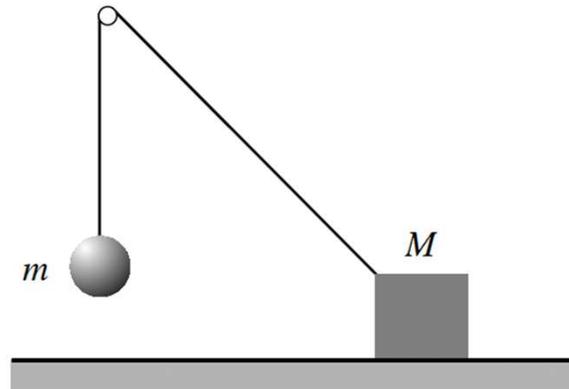
Tre palline sono sospese ad un filo di massa trascurabile che può scorrere senza attrito su due piccole carrucole, come mostrato in figura. La pallina centrale ha massa  $M = 30 \text{ g}$  e gli angoli valgono  $\alpha = \pi/4$  e  $\beta = \pi/6$ .

- Determinare quanto devono valere le masse  $m_1$  ed  $m_2$  per avere una situazione di equilibrio.



Un blocco di massa  $M$ , appoggiato su un piano orizzontale scabro, è unito mediante un filo (inestensibile e di massa trascurabile) a un secondo corpo di massa  $m = M/2$ . Il filo viene fatto passare su una carrucola posta a una certa altezza sopra il piano in modo che il secondo corpo resti sospeso mentre il tratto di filo che va dal blocco alla carrucola forma un angolo di  $45^\circ$  con la verticale.

Dalla sola osservazione che il sistema è in equilibrio, si possono ricavare informazioni circa il coefficiente di attrito statico tra il blocco e il piano e sul rapporto delle due masse.



1. Mostrare che l'equilibrio del sistema è possibile se il coefficiente d'attrito statico tra blocco e piano è maggiore di un certo valore  $\mu_0$  e determinare tale valore.

L'equilibrio è possibile anche con un rapporto di masse maggiore di quello dato, ma fino ad un certo limite, oltre il quale i due corpi non possono rimanere fermi in quella posizione, qualunque sia il valore del coefficiente d'attrito statico.

2. Quanto può valere al massimo il rapporto  $m/M$  tra le due masse perché il sistema resti in equilibrio nella posizione data?

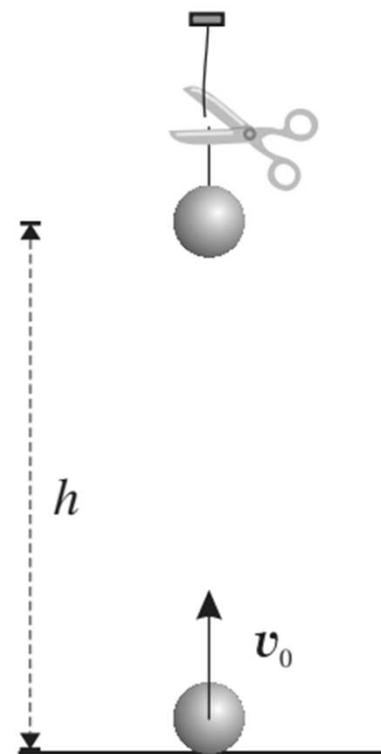
Successivamente si mette in oscillazione il corpo sospeso, con un'ampiezza  $\theta$  (angolo massimo rispetto alla verticale) mentre il blocco rimane fermo sul piano. Ripetendo la prova con ampiezze di oscillazione progressivamente crescenti, si osserva che per  $\theta = 30^\circ$  nell'istante in cui il corpo che oscilla passa nel punto più basso, il blocco inizia a muoversi sul piano.

3. Mostrare che è possibile adesso determinare il valore del coefficiente d'attrito statico (sempre nel caso  $m = M/2$ ).

QUESITO n. 10

Un oggetto è lasciato cadere da un'altezza  $h$  e, simultaneamente, un altro viene lanciato da terra, in alto, lungo la stessa verticale del primo, con velocità  $v_0$ . Le dimensioni degli oggetti (ingrandite in figura) sono trascurabili rispetto alla distanza  $h$ .

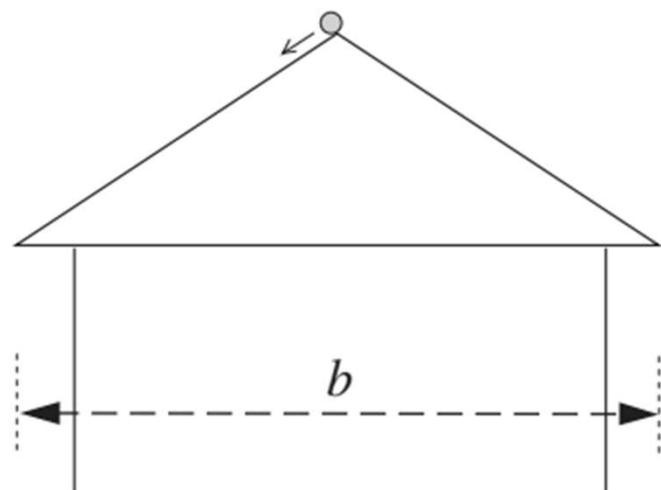
- Qual è la condizione perché i due oggetti possano scontrarsi in volo, cioè prima che il secondo tocchi nuovamente terra?



Il tetto di una casa è realizzato con un materiale che non si bagna; si supponga che una goccia di pioggia, che si trova sulla sommità del tetto, possa scorrervi senza attrito (vedi figura a lato).

- Quale deve essere l'inclinazione del tetto affinché la goccia di pioggia scorra nel minimo tempo?

*Nota. Per la soluzione di questo quesito non è necessario l'uso delle derivate.*

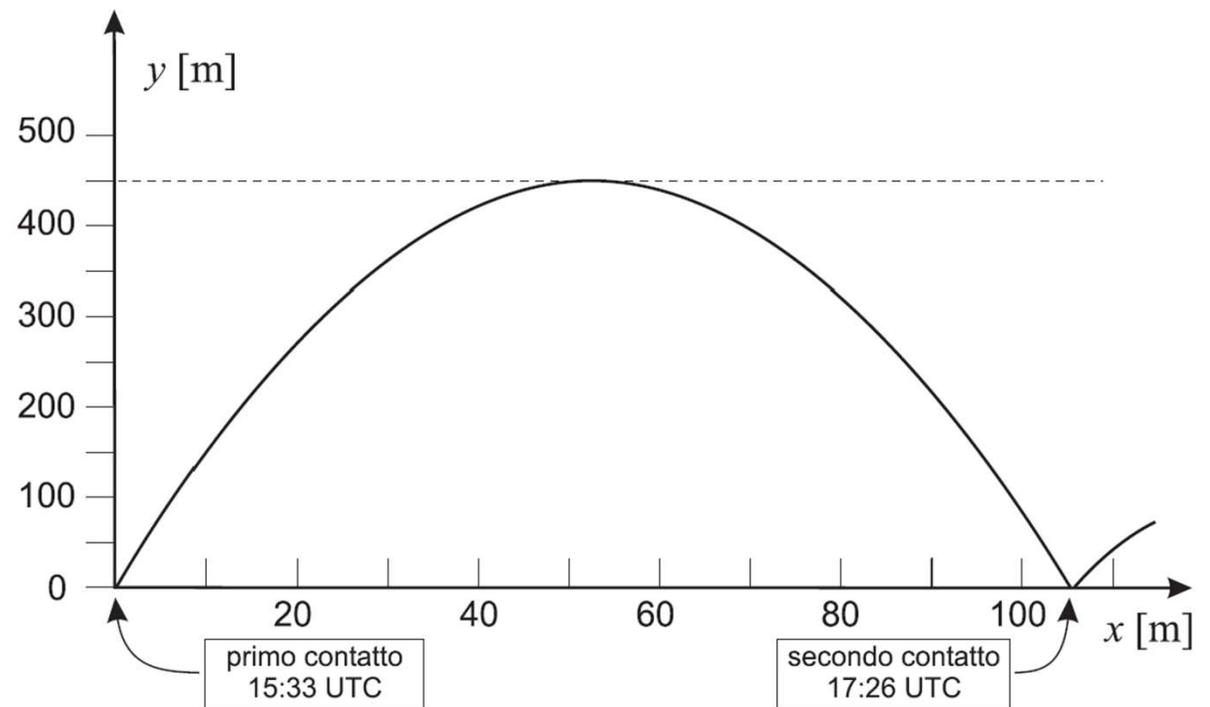


# Q9

Il 12 novembre 2014 il *lander* Philae, trasportato dalla sonda spaziale Rosetta, atterrò sulla cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko.

Il *lander* rimbalzò due volte stabilizzandosi solo al terzo contatto con la superficie. In figura è mostrata la traiettoria del primo rimbalzo e sono indicati i tempi dei primi due contatti con la cometa.

- Stimare l'intensità media dell'accelerazione di gravità della cometa 67P/Churyumov-Gerasimenko, con un modello (estremamente semplificato) di gravità uniforme.



---

Q

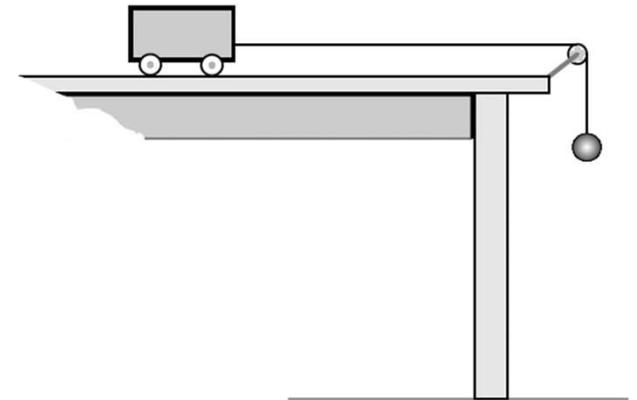
1

Due ciclisti fanno una gara ad inseguimento partendo da punti opposti di una pista circolare. Trascurando i brevi intervalli di tempo delle accelerazioni, il moto dei due ciclisti può essere trattato come uniforme.

- Se uno dei due mantiene una velocità superiore all'altro del 10%, dopo quanti giri il più veloce raggiunge l'altro?

## Problema 8

Un carrello di massa  $M = 200 \text{ g}$  può muoversi senza attrito su un piano orizzontale ed è trainato, come in figura, per mezzo di un filo e una carrucola (entrambi sono di massa trascurabile e il filo è inestensibile) da un pesetto di massa  $m = 50 \text{ g}$ .

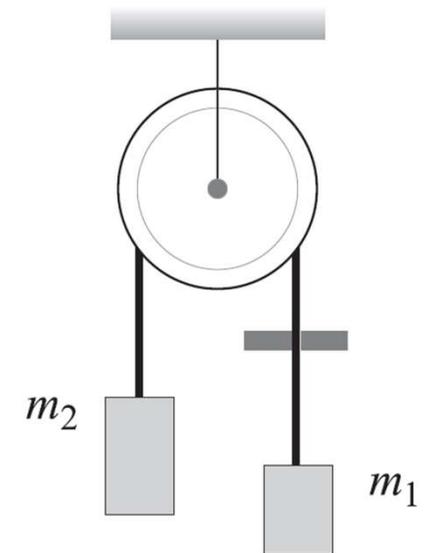


- Se la massa trainante raddoppia, qual'è il rapporto fra le accelerazioni dei due carrelli?

**q5** Un filo è avvolto su una carrucola e passa attraverso una fenditura come in figura. Ai suoi estremi sono appesi due blocchetti di massa  $m_1$  ed  $m_2$  con  $m_2 > m_1$ . Carrucola e filo possono essere trattati come ideali.

Il sistema è inizialmente in quiete e, lasciato libero, si mette in movimento spontaneamente. Il filo, strisciando nella fenditura, subisce da parte di questa una forza d'attrito costante,  $\vec{A}$ .

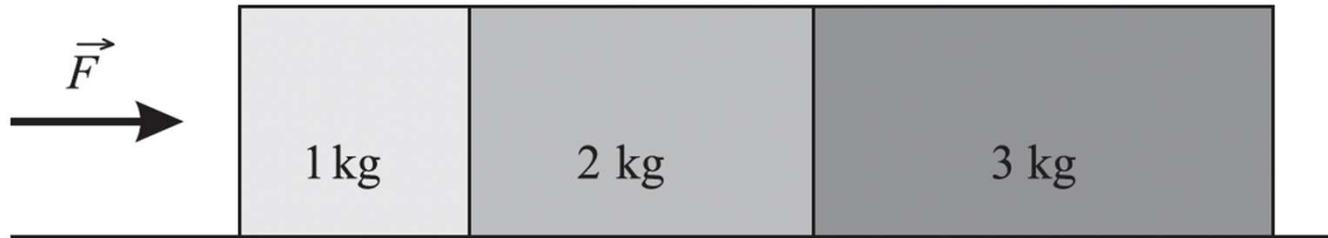
- Si determini il modulo dell'accelerazione della massa  $m_2$ .



Q

2

Tre scatole sono spinte lungo una superficie liscia orizzontale con una forza  $\vec{F}$  parallela al piano, come mostrato in figura.



- Qual è l'intensità della forza che la scatola centrale esercita sulla scatola di sinistra?

Sul piano  $(x, y)$  sono dati due punti  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$  collegati con una molla di costante elastica  $k$  e lunghezza di riposo nulla.

1. Scrivere l'espressione della forza applicata al punto B in funzione dei vettori posizione  $\vec{r}_A$  e  $\vec{r}_B$  dei due punti rispetto all'origine delle coordinate, in forma vettoriale o in termini di componenti dei vettori.

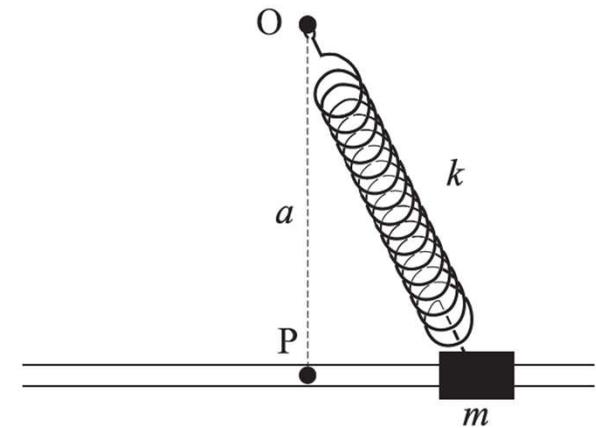
Quattro punti,  $P_1, P_2, P_3$  e  $P_4$ , sono fissati ciascuno sulla verticale di uno dei quattro vertici consecutivi di un quadrato di lato  $\sqrt{2}b$ , a quote rispettivamente  $h_1, h_2, h_3, h_4$ . Un punto materiale P è collegato ai precedenti quattro con quattro molle identiche aventi massa e lunghezza a riposo trascurabili.

2. Fissato un riferimento cartesiano ortogonale avente per origine il centro del quadrato e con gli assi  $x$  e  $y$  allineati con le diagonali del quadrato, scrivere i vettori posizione  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4$  ed  $\vec{r}$  dei punti  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e P.
3. Determinare la quota  $h_0$  alla quale il punto materiale P è in equilibrio sotto l'azione delle forze elastiche.

Q5

Una massa  $m$  può scorrere senza attrito su una guida rettilinea in un piano orizzontale; la massa viene agganciata ad una molla avente costante elastica  $k$  e lunghezza a riposo trascurabile. La molla è fissata a un punto del piano a distanza  $a$  dalla guida, come in figura, vista dall'alto.

- Determinare il periodo delle oscillazioni della massa attorno alla sua posizione di equilibrio.

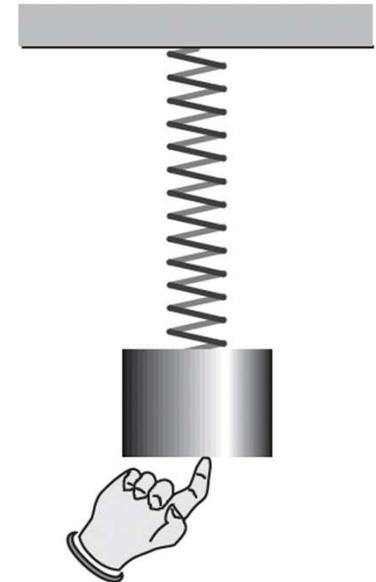


Q

10

Un corpo di massa  $m = 400 \text{ g}$  è in equilibrio, appeso ad una molla di costante elastica  $k = 10 \text{ N m}^{-1}$ , che lo sostiene. Il corpo viene sollevato, molto lentamente, di un tratto  $\Delta x = 30 \text{ cm}$ .

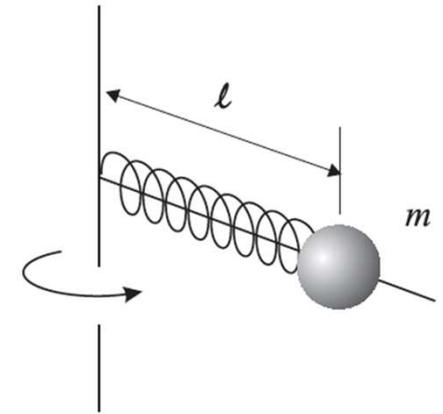
- Calcolare il lavoro compiuto dalla forza che solleva il corpo.



Q5

Una molla ideale, di costante elastica  $k$ , ha lunghezza  $\ell_0$ ; ad essa è attaccata una massa  $m$ ; il sistema si muove su un piano orizzontale e ruota, con velocità angolare uniforme  $\omega$ , attorno ad un asse verticale (vedi figura).

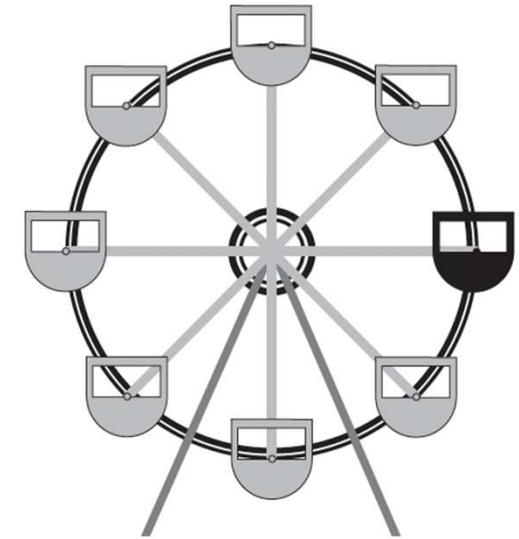
- Trovare la lunghezza  $\ell$  della molla quando è in rotazione.



Q6

Una cabina di una ruota panoramica (*evidenziata in nero in figura*), in un parco divertimenti, ha una massa di 400 kg e descrive una circonferenza verticale di raggio 5.3 m. Durante il collaudo della ruota, questa viene fatta ruotare uniformemente ad una velocità di  $5.5 \text{ m s}^{-1}$ , molto maggiore di quella di esercizio.

- Trovare il modulo della forza che la struttura della ruota esercita sulla cabina quando il punto in cui è agganciata è all'altezza del centro di rotazione, trattando la cabina stessa come un punto materiale.



quesito  
2

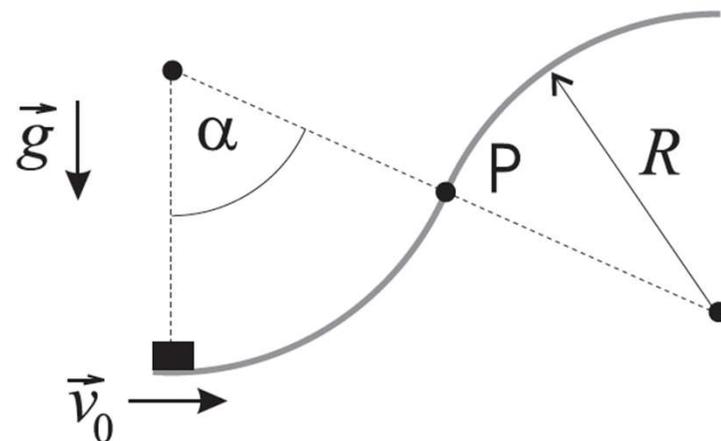
Un motociclista percorre una curva di 120 m di raggio alla velocità di 90 km/h.

- Che informazione se ne può ricavare circa il coefficiente di attrito statico tra la gomma della ruota e l'asfalto della strada?

Un carrello di massa  $m$  viene appoggiato su una rotaia che presenta attrito trascurabile e lanciato con velocità  $v_0$  dal punto più basso, come mostrato in figura. La rotaia è formata da due archi di cerchio uguali, di raggio  $R$  su un piano verticale, raccordati nel punto P. Sia  $\alpha$  l'angolo che la normale comune ai due archi di circonferenza nel punto di raccordo forma con la verticale (v. figura).

Si vuole che il carrello arrivi nel punto più alto senza distaccarsi mai dalla rotaia.

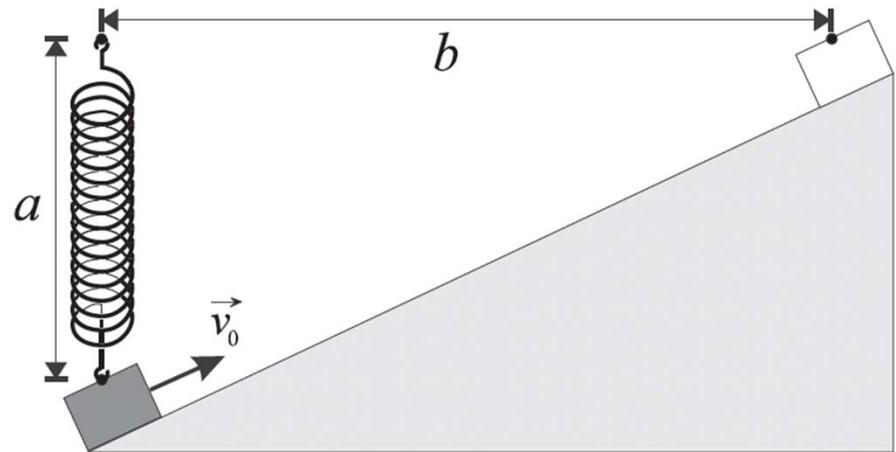
1. Supponendo che il carrello possa arrivare nel punto più alto senza staccarsi dalla rotaia, qual è – in funzione dei dati forniti – la minima velocità iniziale  $v_0$  che deve avere?
2. Si dimostri che, se il carrello si stacca dalla rotaia, questo avviene appena superato il punto P.
3. Che condizione deve soddisfare la velocità iniziale  $v_0$  perché il carrello non si stacchi?
4. Per quali valori dell'angolo  $\alpha$  non è possibile che il carrello arrivi nel punto più alto mantenendo il contatto con la rotaia?



## Quesito 3

Un oggetto di massa  $m$  viene lanciato verso l'alto su un piano inclinato privo di attrito, con velocità iniziale  $v_0$ . Nel suo moto l'oggetto è fissato ad un estremo di una molla di massa trascurabile che inizialmente è alla lunghezza di riposo.

- Osservato che il corpo si ferma esattamente al bordo superiore del piano inclinato, all'altezza del punto di sospensione della molla come mostrato in figura, quanto vale la costante elastica della molla?

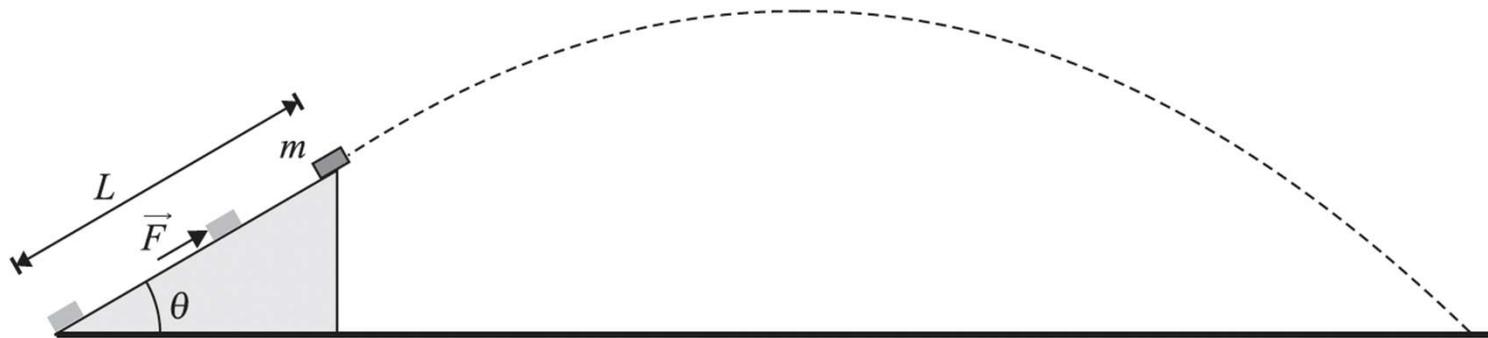


---

Q 7

Una forza  $\vec{F}$  avente modulo di 400 N spinge una massa  $m$  di 5 kg su per un piano inclinato di  $30^\circ$ . Il piano è liscio e lungo  $L = 2$  m e la massa, di dimensioni trascurabili rispetto al piano inclinato, inizialmente è ferma. Quando la massa raggiunge la sommità del piano, la forza  $\vec{F}$  cessa di agire e rimane solo la gravità.

- Con che velocità tocca terra la massa?



---

Q

7

Una goccia di pioggia di massa  $m$  sta scendendo verticalmente a velocità costante a causa dell'azione di una forza di frenamento  $F = kv^2$ , dove  $k$  è una costante.

- Calcolare l'energia cinetica della goccia di pioggia, in funzione della massa  $m$ , della costante  $k$  e dell'accelerazione di gravità  $g$ .

Un satellite di raggio  $a$  e massa  $m$  descrive un'orbita circolare di raggio  $r$  attorno a un pianeta di massa  $M$ ; si trattino pianeta e satellite come sferici e omogenei.

Il centro di massa del sistema si può considerare coincidente con il centro del pianeta. I periodi di rotazione e rivoluzione del satellite sono identici, cosicché il satellite rivolge al pianeta sempre la stessa faccia (come la Luna fa con la Terra). In tutto il problema si trascuri la gravità della stella attorno a cui orbita il pianeta.

1. Si calcoli, in funzione di  $M$  ed  $r$ , la velocità angolare del moto di rivoluzione del satellite attorno al pianeta.

Si consideri un piccolo corpo di massa  $\mu$  appoggiato sulla superficie del satellite, nel punto più vicino al pianeta.

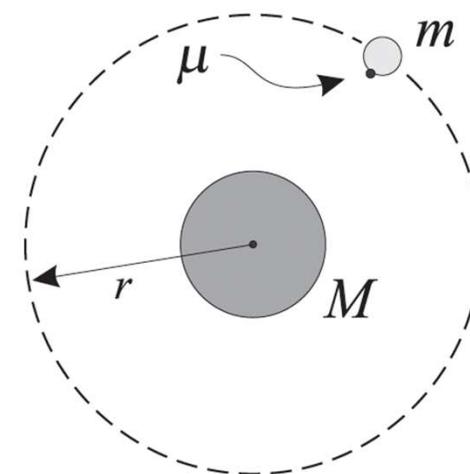
2. Si calcoli il modulo  $N$  della forza normale esercitata dalla superficie del satellite sul corpo. Si esprima il risultato in funzione di  $\mu$ ,  $M$ ,  $m$ ,  $r$  e  $a$ .
3. Qual è la condizione che deve essere verificata affinché il corpuscolo non si stacchi dalla superficie del satellite?

Se il satellite fosse troppo vicino al pianeta, il piccolo corpo non riuscirebbe a rimanere appoggiato sulla superficie del satellite.

4. Nell'ipotesi  $a/r \ll 1$  si calcoli il minimo raggio orbitale  $r_0$  per cui il corpuscolo non si stacca dalla superficie del satellite. Si esprima il risultato in funzione di  $M$ ,  $m$  e  $a$ .

*Suggerimento: si ricordi che, per  $|x| \ll 1$  si può usare l'approssimazione  $(1 \pm x)^\alpha \approx (1 \pm \alpha x)$  per qualunque  $\alpha$  (anche negativo). Di conseguenza i binomi  $(r \pm a)^\alpha$  con  $a \ll r$  si possono approssimare ponendo  $r \pm a = r(1 \pm a/r)$*

5. Qual è il minimo raggio  $a$  a cui potrebbe orbitare intorno alla Terra un piccolo satellite sferico di densità pari a  $(2.49 \pm 0.01) \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  senza che un corpo appoggiato sulla sua superficie, nel punto più vicino al pianeta, si stacchi?



## $\mathcal{P}_2$ Meteoriti antichi

---

Durante i primi milioni di anni di vita del Sistema Solare, la Terra fu intensamente bombardata da meteoriti. Supponendo che un meteorite di  $5.3 \times 10^3$  kg, partendo da fermo a distanza praticamente infinita dal nostro pianeta, sia caduto sulla Terra, con quale velocità impattò sulla superficie terrestre?

*Unità di misura:* m/s. *Precisione richiesta:* 0.5%.

---

---

**Q9**

Una navetta spaziale di massa  $m$  si trova su un'orbita circolare di raggio  $R$  attorno alla Terra. L'equipaggio della navetta deve portarla su un'orbita circolare di raggio  $3R$  utilizzando la seguente procedura: per prima cosa, accende i motori per un breve tempo in modo che al termine dell'accensione si trovi su un'orbita ellittica con apogeo a  $3R$ . Dopo aver percorso mezza orbita, la navetta si trova a distanza  $3R$  dal centro della Terra; a questo punto viene dato un altro impulso con i motori per portare la navetta su un'orbita circolare a  $3R$ .

- Quanta energia devono fornire complessivamente i motori alla navetta spaziale?

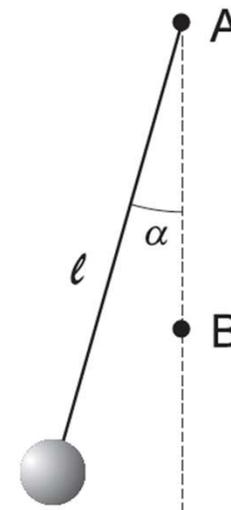
*Si trascurino le perdite di massa della navetta a causa dell'uso dei motori e si esprima il risultato in termini di  $R$ ,  $m$ , della massa della Terra  $M$  e della costante  $G$ .*

## Problema 5

Un corpo di massa  $M = 0.83 \text{ kg}$  è sospeso, con un filo di lunghezza  $\ell = 75 \text{ cm}$ , ad un chiodo (indicato in figura con A); un secondo chiodo (B) è posto più in basso, sulla verticale del primo, a  $2/3$  della lunghezza del filo. Il corpo viene spostato in modo che il filo teso formi con la verticale un angolo piccolo ( $\alpha$ ), e poi lasciato da fermo.

- In quanto tempo il corpo torna nella posizione iniziale?

*NOTE: il corpo può essere trattato come puntiforme, il filo inestensibile e di massa trascurabile rispetto al corpo; ogni forma di attrito sia trascurabile.*

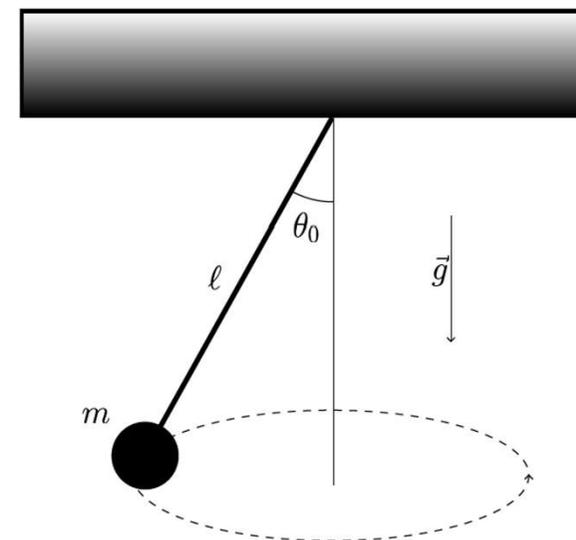


## $\mathcal{P}_7$ Pendolo rotante

---

Un oggetto puntiforme di massa 200 g è appeso ad un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza 40 cm. Il sistema è immerso nel campo gravitazionale terrestre. L'oggetto si muove di moto circolare uniforme con periodo  $T$  e l'angolo che il filo forma con la verticale, come in figura, è  $\theta_0 = 13^\circ$ . Se l'oggetto venisse messo in moto circolare uniforme con periodo  $T/2$ , quanto varrebbe il nuovo valore di  $\theta_0$ ?

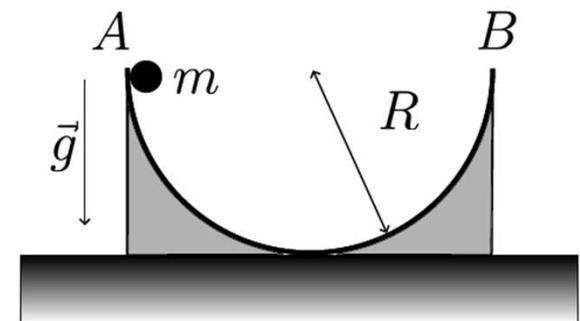
*Unità di misura:  $^\circ$ . Precisione richiesta: 0.5%.*



## $\mathcal{P}_1$ Riscalare il tempo

---

Un oggetto di massa  $m = 1 \text{ kg}$  si muove senza attrito e sotto l'effetto della gravità su una guida semicircolare fissata al suolo. La guida è disposta su un piano verticale e il suo diametro, i cui estremi sono i punti  $A$  e  $B$ , è orizzontale, come in figura. Sappiamo che l'oggetto impiega  $t_0 = 2.2 \text{ s}$  per andare da  $A$  a  $B$  partendo da fermo. Se il raggio della guida raddoppiasse, quanto tempo impiegherebbe l'oggetto?



*Unità di misura: s. Precisione richiesta: 0.5%.*

QUESITO n. 1

Un oggetto pesante viene legato ad un filo (di massa trascurabile) fissato, all'altro estremo, ad un supporto. Il filo, che si può ritenere inestensibile di lunghezza  $\ell = 2$  m, viene teso orizzontalmente e successivamente l'oggetto viene lasciato cadere.

- Se la tensione massima che il filo può sopportare è di 210 N quale può essere, al massimo, la massa dell'oggetto senza che il filo si strappi?

(Assumere  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ )

Un corpo di massa  $M$  è appeso al soffitto tramite una molla ideale di costante elastica  $k$ . Il sistema è in quiete, nella sua configurazione di equilibrio.

1. Esprimere l'allungamento  $\Delta\ell_0$  della molla in questa configurazione iniziale in funzione di  $M, k$  e dell'accelerazione di gravità  $g$ .

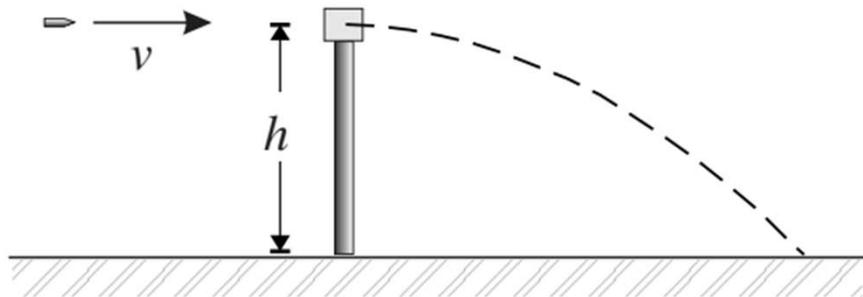
Il corpo viene urtato elasticamente da un corpo di uguale massa lanciato verticalmente dal basso. Sia  $v_0$  la velocità di questo corpo al momento dell'urto. Si trascurino tutti gli attriti e si supponga che non avvengano altri urti tra i due corpi.

2. Esprimere in termini di  $M, k, g$  e  $v_0$  l'allungamento massimo della molla  $\Delta\ell_{\max}$  nel moto del corpo che è stato urtato.
3. Calcolare i valori numerici di  $\Delta\ell_0$  e  $\Delta\ell_{\max}$  se  $M = 100 \text{ g}$ ,  $k = 10 \text{ N m}^{-1}$ ,  $v_0 = 20 \text{ cm s}^{-1}$ .

Si supponga ora che il corpo di massa  $M$  sia costituito da due parti di massa  $m_1$  e  $m_2$ . Il sistema è tornato nella sua configurazione di equilibrio ed è in quiete. In un certo istante la parte di massa  $m_2$  si stacca, e la parte rimanente inizia perciò ad oscillare.

4. Per quali valori del rapporto  $m_1/M$  la molla risulterà compressa, rispetto alla sua lunghezza di riposo, in alcune fasi della sua oscillazione?

QUESITO n. 6

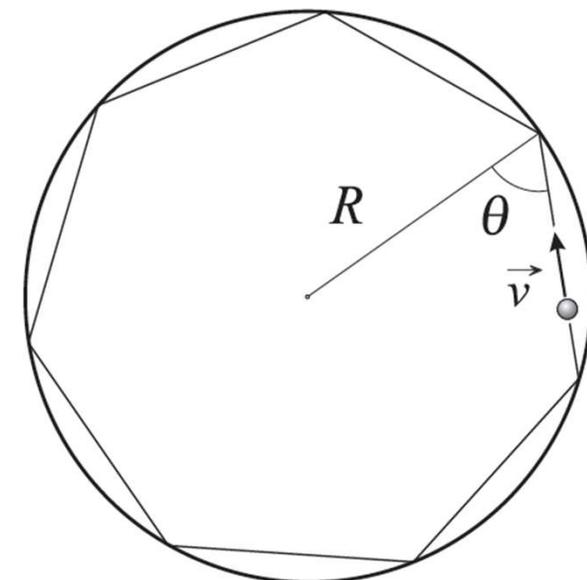


Un proiettile di massa  $m$  e velocità  $v$  si conficca in un blocco di massa  $M$  posto sopra un supporto di altezza  $h$ .

- A quale distanza dal piede del supporto cade il blocco con il proiettile conficcato dentro?

Un oggetto di massa  $m$  e dimensioni trascurabili, in moto a velocità  $\vec{v}$ , incide sul bordo di una guida circolare priva di attrito con angolo  $\theta$  rispetto alla normale, rimbalzando elasticamente. La guida, di raggio  $R$ , è fissata su un piano orizzontale, anch'esso senza attrito, e la traiettoria risultante è un poligono di  $n$  lati inscritto nella guida circolare.

La figura mostra un esempio di questa situazione per una traiettoria poligonale di 7 lati ( $n = 7$ ).



1. Determinare innanzitutto la variazione di quantità di moto di un corpo di massa  $m$  che urta una parete piana e priva di attrito, con velocità  $\vec{v}$  che forma un angolo  $\theta$  con la normale alla parete e il valor medio dell'intensità della forza che la parete esercita sul corpo se questa agisce in un intervallo di tempo  $\delta t$ .
2. Nel caso esposto sopra di una traiettoria poligonale di  $n$  lati entro la guida circolare, quanto vale l'intensità media della forza che la parete circolare esercita sul corpo, assumendo ora che  $\delta t$  sia l'intervallo di tempo tra due urti successivi?
3. Passando al limite per  $n$  infinitamente grande che significato ha l'espressione trovata al punto precedente?