

Calcolatrice grafica Casio fx-CG50

&

GAS

1. Studio di funzioni e ricerca di equilibri

2. Calcolo di integrali definiti

3. Risoluzione numerica di equazioni

4. Inserimento delle costanti di uso maggiore

5. Analisi di dati sperimentali

1. Studio di funzioni e ricerca di equilibri

2. Calcolo di integrali definiti

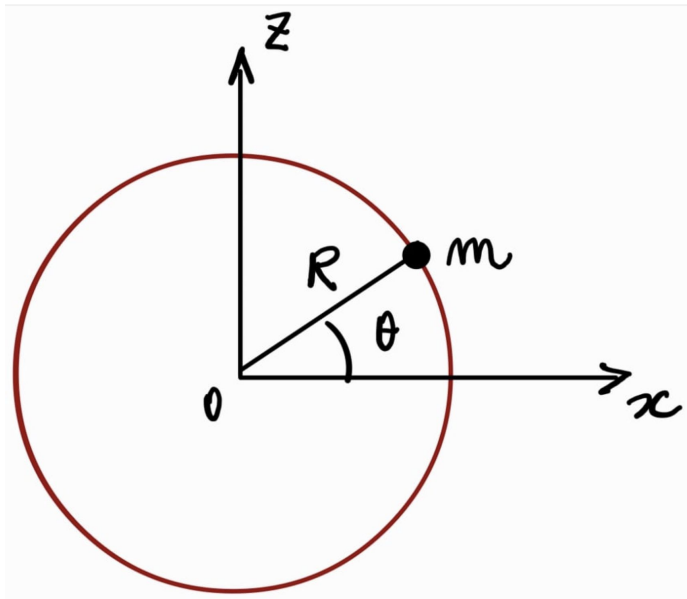
3. Risoluzione numerica di equazioni

4. Inserimento delle costanti di uso maggiore

5. Analisi di dati sperimentali

Posizioni di equilibrio per un sistema conservativo con un grado di libertà

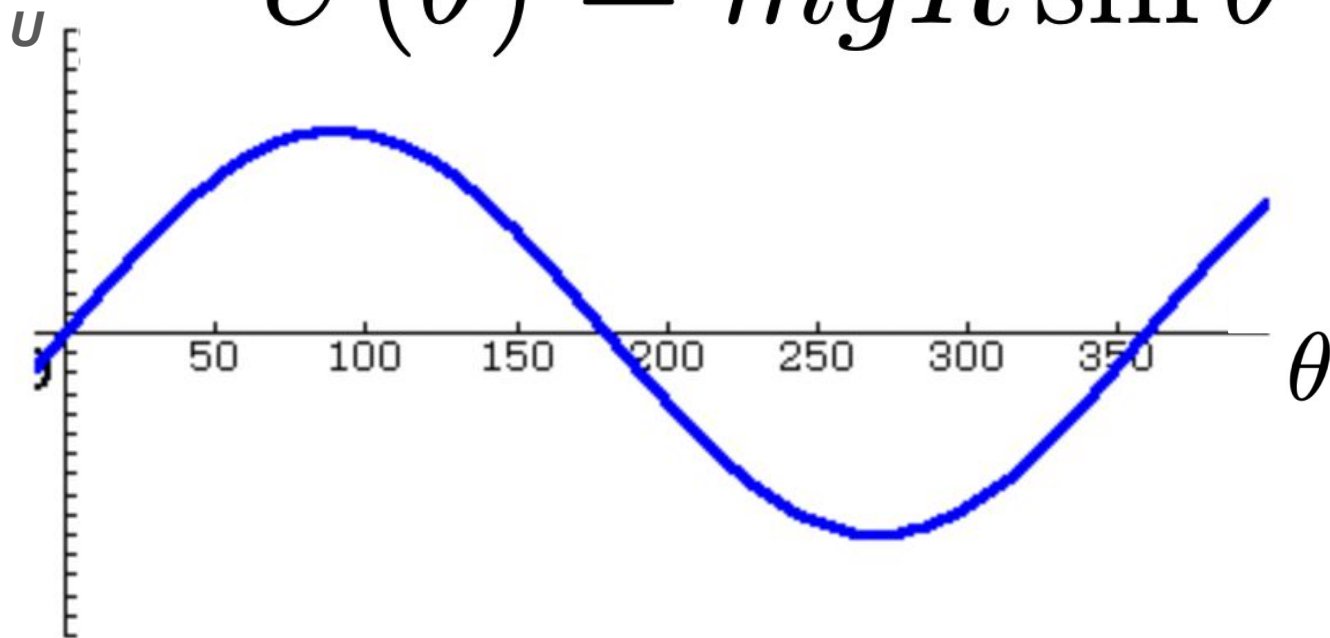
Un solo grado di libertà significa che ogni configurazione possibile del sistema è identificata da una sola variabile q . Quindi, anche se il sistema è immerso nello spazio tridimensionale, la sua posizione reale può essere scritta come $\vec{r} = \vec{r}(q)$. Ad esempio un corpo che si muove di moto circolare in un piano verticale:



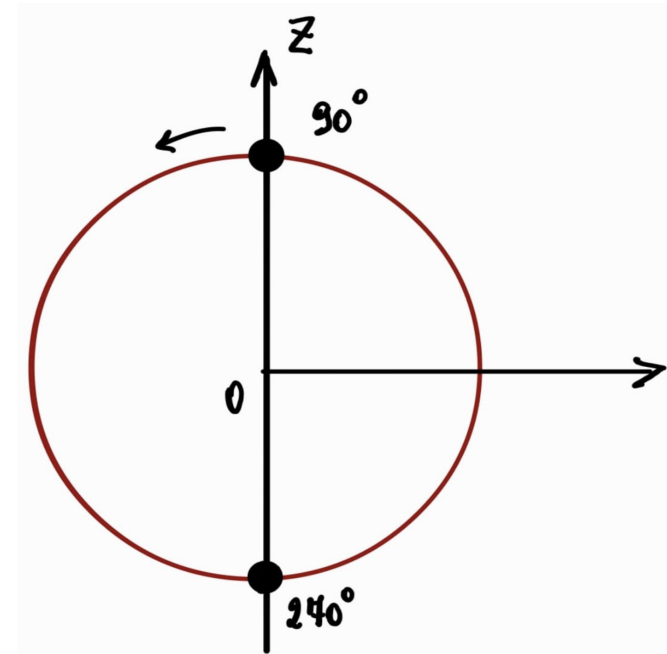
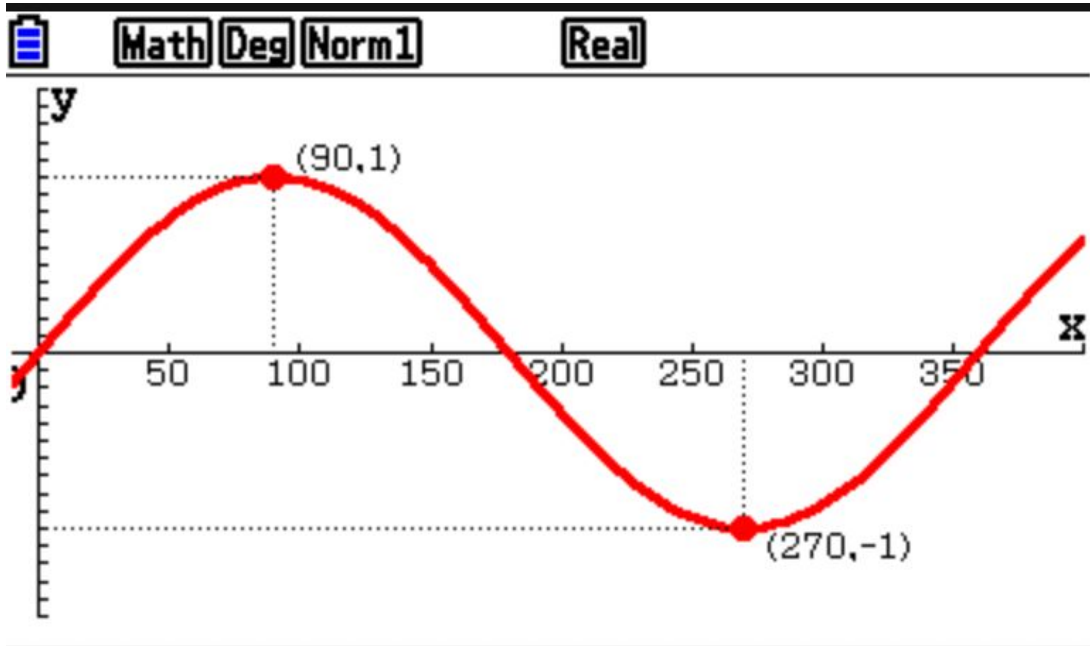
$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ z = R \sin \theta \end{cases}$$

Alle forze conservative possiamo associare un'energia potenziale U . Poiché le configurazioni possibili sono descritte dalla coordinata q , allora anche il potenziale può essere scritto come funzione $U(q)$.

$$U(\theta) = mgR \sin \theta$$

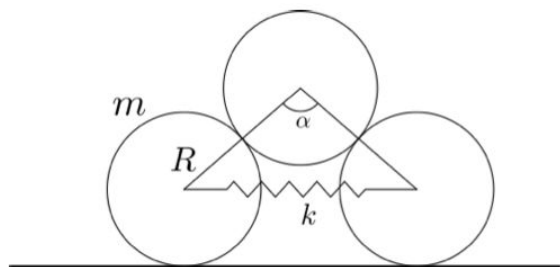


Le posizioni di equilibrio stabile si trovano nei minimi di $U(q)$, quelle instabili nei massimi. Infatti sia $U(q_0)$ un minimo, allora nei dintorni di q_0 , $U(q) > U(q_0)$. Se pongo il sistema nella posizione q_0 fermo, allora $E = U(q_0)$. Ma allora se lo voglio spostare da quella posizione, dovrei dare energia. Quindi è equilibrio stabile. Con un ragionamento simili si dimostra che i massimi di $U(q)$ sono posizioni di equilibrio instabile.



$\mathcal{P}8$ Cilindri in equilibrio

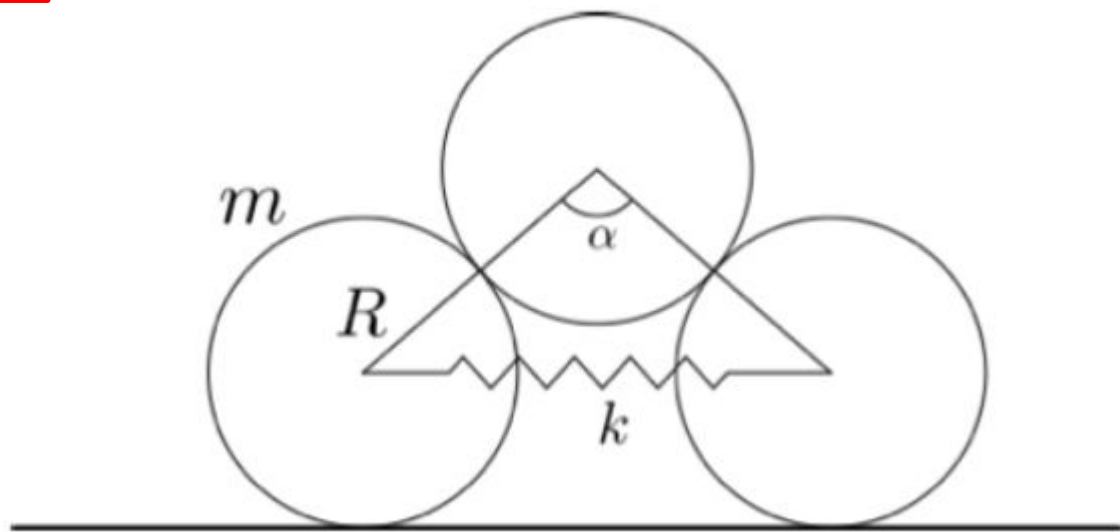
Due cilindri, di raggio $R = 10\text{ cm}$ e massa $m = 1\text{ kg}$, sono appoggiati con le loro superfici laterali su un piano orizzontale. I loro assi, vincolati a restare paralleli e orizzontali, sono collegati da una molla di lunghezza a riposo nulla, massa trascurabile e costante elastica $k = 200\text{ N/m}$. Un terzo cilindro, identico ai primi, viene appoggiato sopra agli altri due, come in figura. Non è presente alcuna forma di attrito. Nella posizione di equilibrio (instabile) del sistema, quanto vale l'angolo al centro α individuato dai punti di contatto tra i cilindri?



Unità di misura: rad. *Precisione richiesta:* 0.5%.

$$U(\alpha) = mg \left(2R \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{1}{2} k \left(4R \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2$$

$$\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \pi$$



La funzione da graficare con la CASIO, ricordando che $m = 1$ kg, $R = 0.1$ m e $k = 200$ N/m, dopo le semplificazioni è:

$$y = 9.81 \cos \left(\frac{x}{2} \right) + 80 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right), \quad \text{con } \frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$$



SHIFT



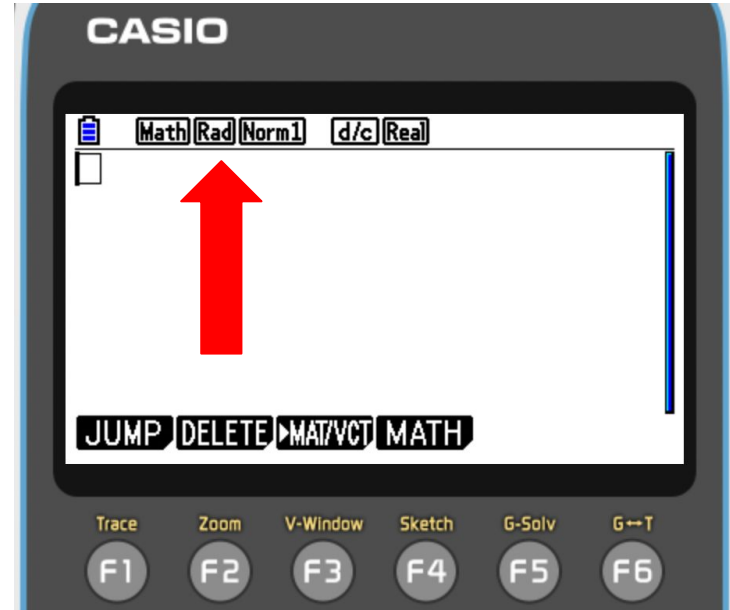
con

F2

SETUP

selezionare Angle

seleziona radiante



Math Rad Norm1 Real
 Funz. graf. : X=
 $Y1 = 9.81 \times \cos \frac{x}{2} + 8 \left[- \right]$
 $X2 = \frac{\pi}{3} \quad \left[- \right]$
 $X3 = \pi \quad \left[- \right]$
 SELECT DELETE TYPE TOOL MODIFY DRAW



MENU

GRAPH

TYPE

Y=

$y = 9.8 \times \cos(x \div 2)$ ecc....

Dominio della x: $[\pi/3; \pi]$

Tracciamo 2 rette: $x = \pi/3$ e $x = \pi$

TYPE

X=

e poi **DRAW**

π : lo ottieni con **SHIFT**



Il tasto **V-Window (F3)** (Vertical Window) serve a **impostare la finestra di visualizzazione del grafico.**

Quando la calcolatrice disegna una funzione, deve sapere **quale parte del piano cartesiano mostrare sullo schermo:**

- quanto deve estendersi l'asse x (orizzontale)
- quanto deve estendersi l'asse y (verticale)
- la scala su ogni asse

Visualizza finestra

min : -1

max : 4

scale : 1

dot : 0.01322751

min : -10

max : 100

INITIAL TRIG STANDRD V-MEM SQUARE

Trace

Zoom

V-Window

Sketch

G-Solv

G $\leftrightarrow$ T

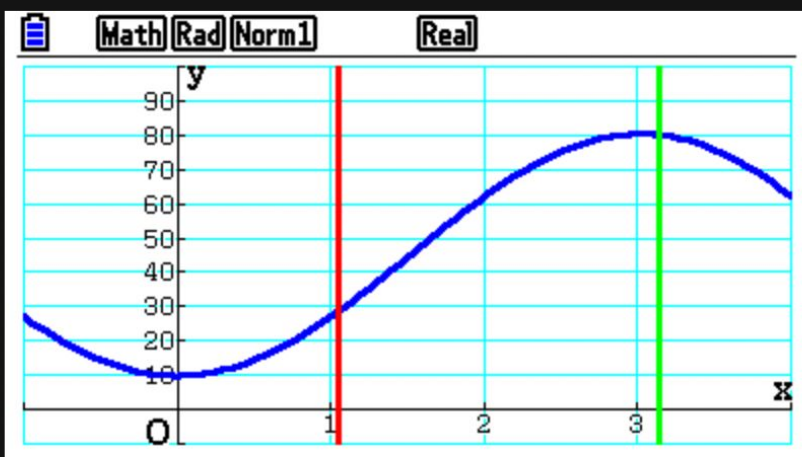
F1

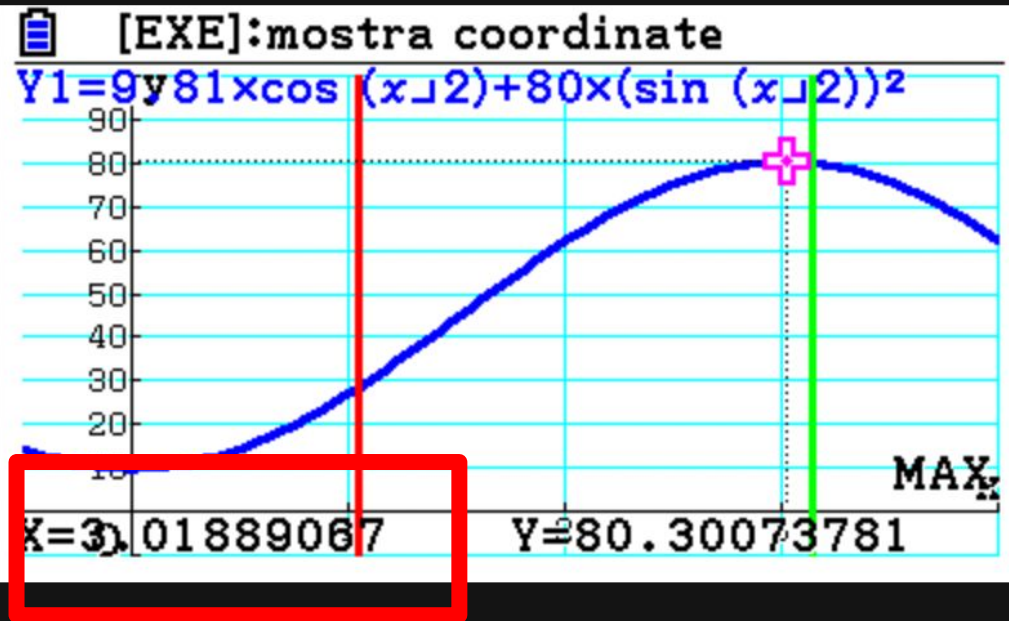
F3

F4

F5

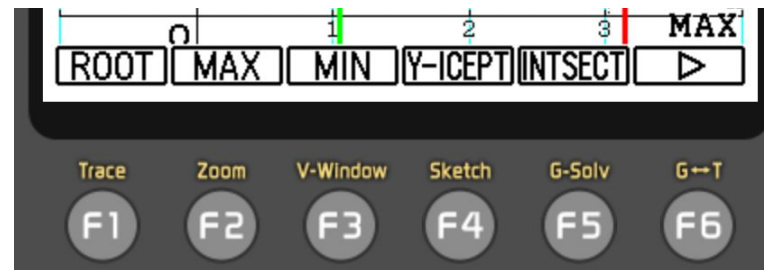
F6





Il massimo della porzione visibile del grafico si trova facendo:

(F5) G-Solv + (F2) (MAX)



P6 Tre cariche

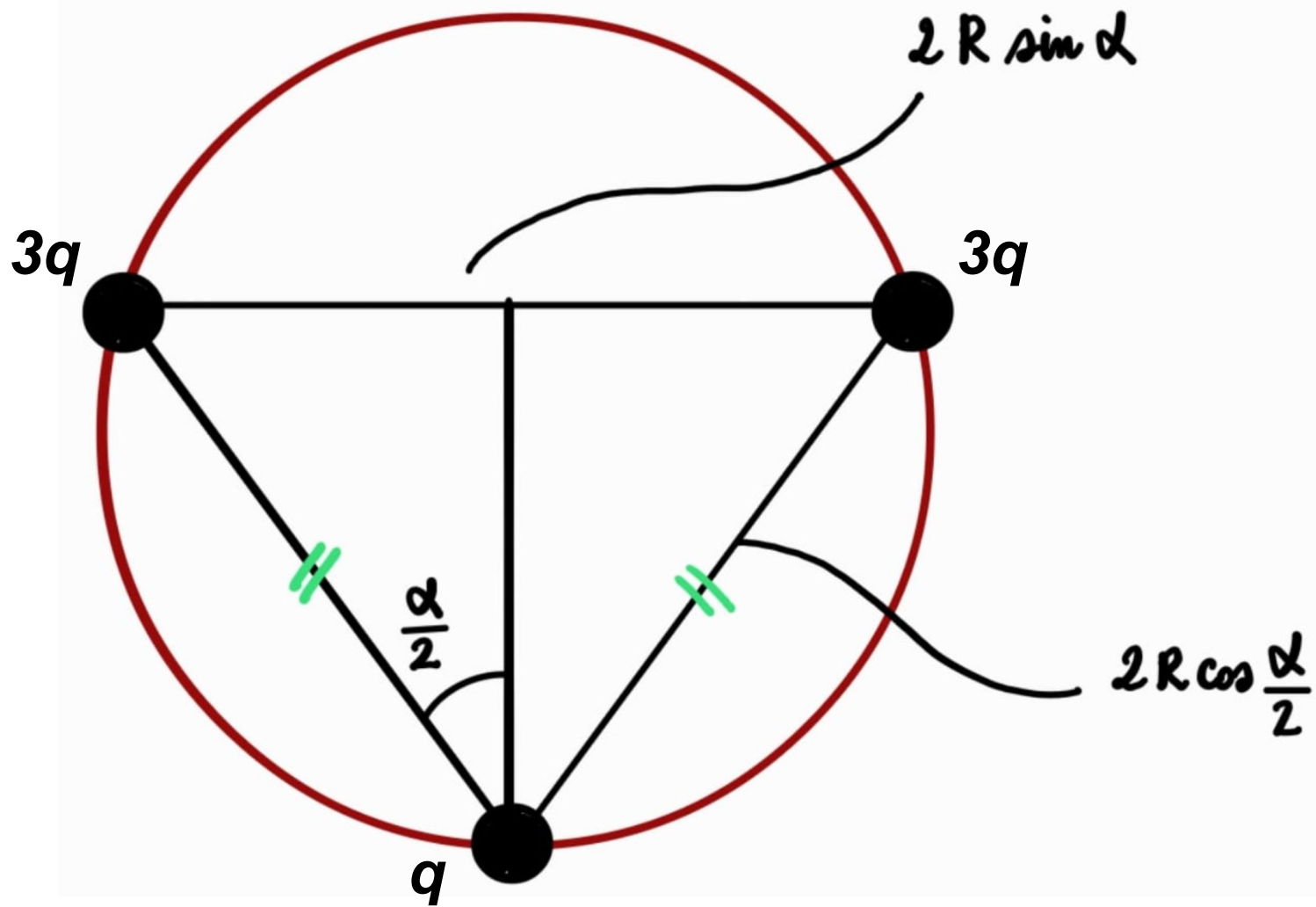
Tre punti materiali, di carica elettrica q , $3q$ e $3q$, sono vincolati a muoversi su una guida circolare. Nella configurazione di equilibrio, quanto vale l'angolo al centro sotteso dai due punti di carica $3q$?

Unità di misura: rad. Precisione richiesta: 0.5%.

Sfrutta la **SIMMETRIA della configurazione e il fatto che l'energia potenziale elettrica di un sistema di due cariche puntiforme è:**

$$U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

sol: 2.5636 rad



$$U(\alpha) = \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0[2R\cos(\alpha/2)]} + \frac{3q^2}{4\pi\epsilon_0[(2R\cos(\alpha/2))]} + \frac{9q^2}{4\pi\epsilon_0(2R\sin\alpha)}$$

$$U(\alpha) = \frac{3q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \left[\frac{2}{\cos(\alpha/2)} + \frac{3}{\sin\alpha} \right]$$

$$\text{con } 0 < \alpha < \pi$$

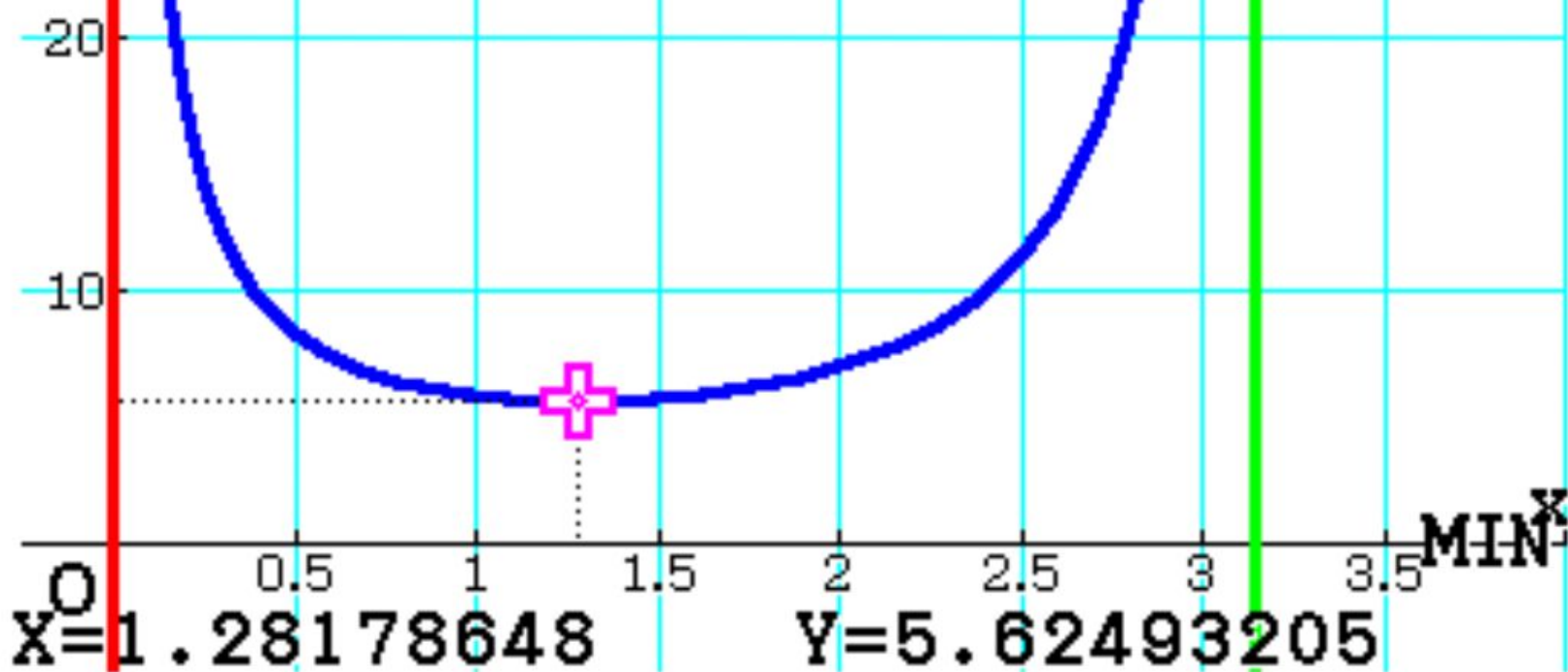
La funzione da graficare con la CASIO, dopo le semplificazioni è:

$$y = \frac{2}{\cos(x/2)} + \frac{3}{\sin(x)}, \quad \text{con } 0 < x < \pi$$



[EXE]:mostra coordinate

$$Y1 = (2 \sqrt{\cos(x)^2}) + (3 \sqrt{\sin(x)})$$



1. Studio di funzioni e ricerca di equilibri

2. Calcolo di integrali definiti

3. Risoluzione numerica di equazioni

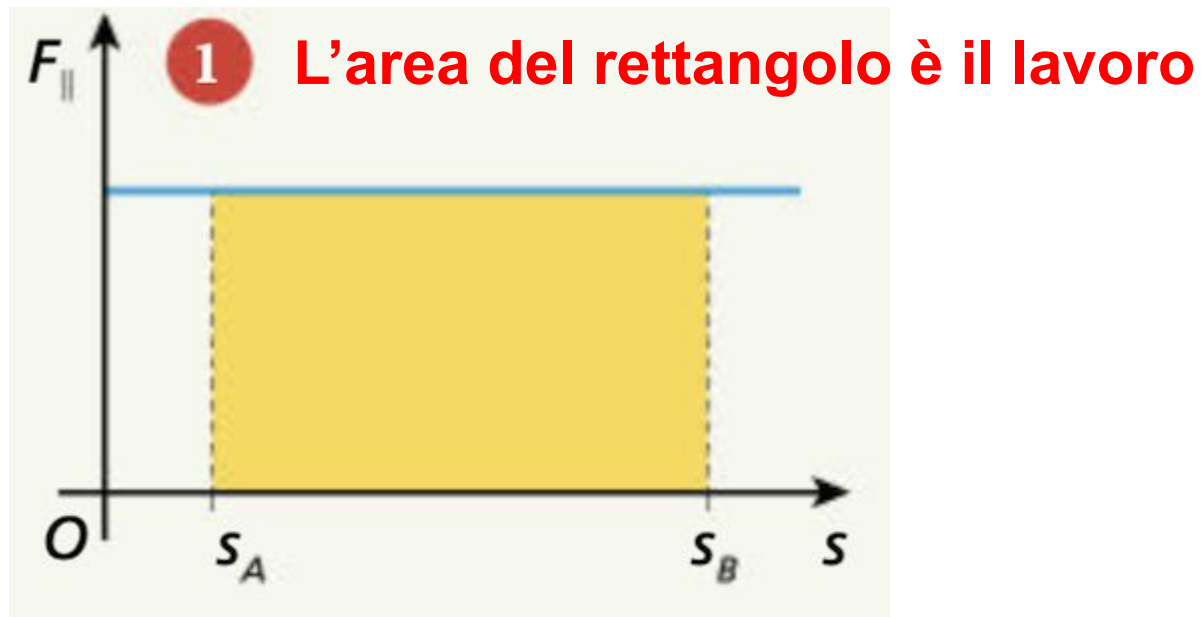
4. Inserimento delle costanti di uso maggiore

5. Analisi di dati sperimentali

Il lavoro compiuto da una forza costante è:

$$W = F_{\parallel} \Delta s,$$

basta una moltiplicazione, e anche l'interpretazione geometrica è semplice.



Se la forza non è costante lungo lo spostamento, ma dipende dalla posizione:

$$F_{\parallel} = F_{\parallel}(s).$$

Non possiamo più utilizzare la formula precedente perché durante il moto la forza assume valori diversi.

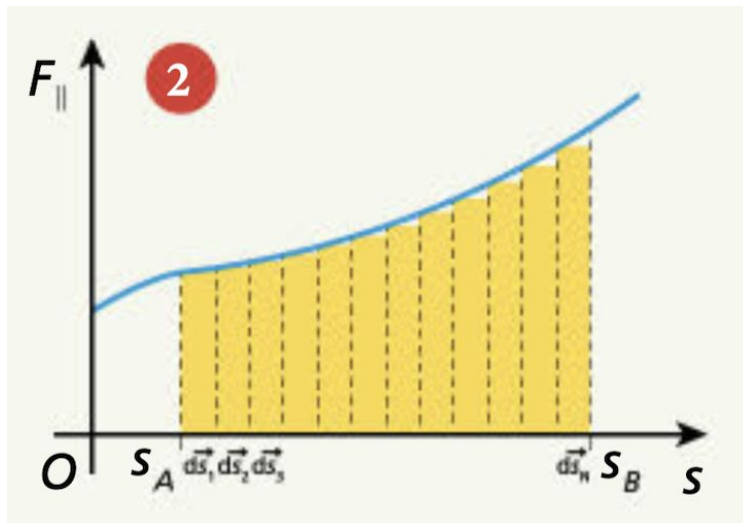
IDEA: dividere lo spostamento in intervalli molto piccoli di lunghezza ds .

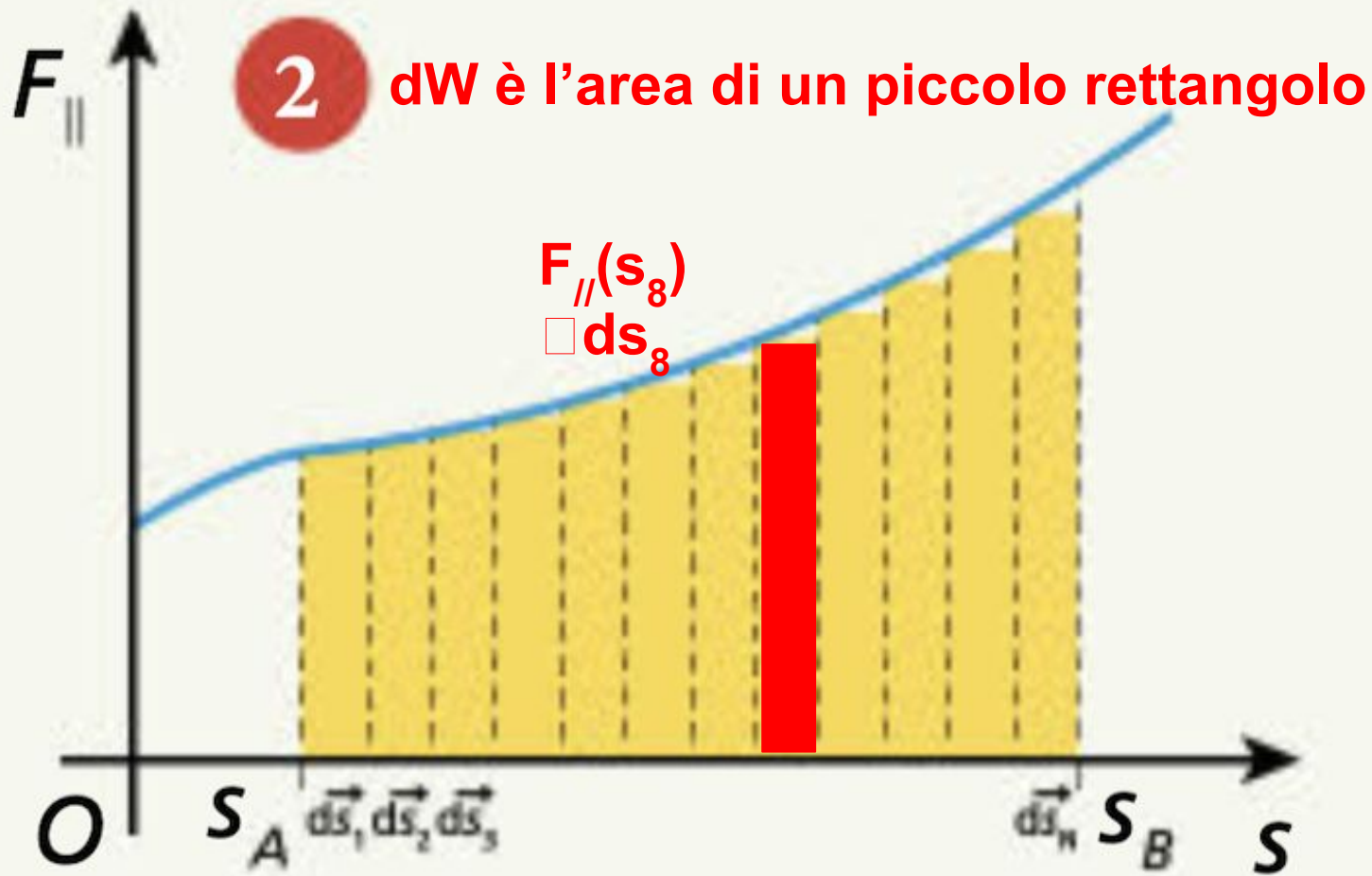
Su ciascun intervallo la forza varia pochissimo e può essere considerata costante.
Il lavoro compiuto sul tratto infinitesimo è:

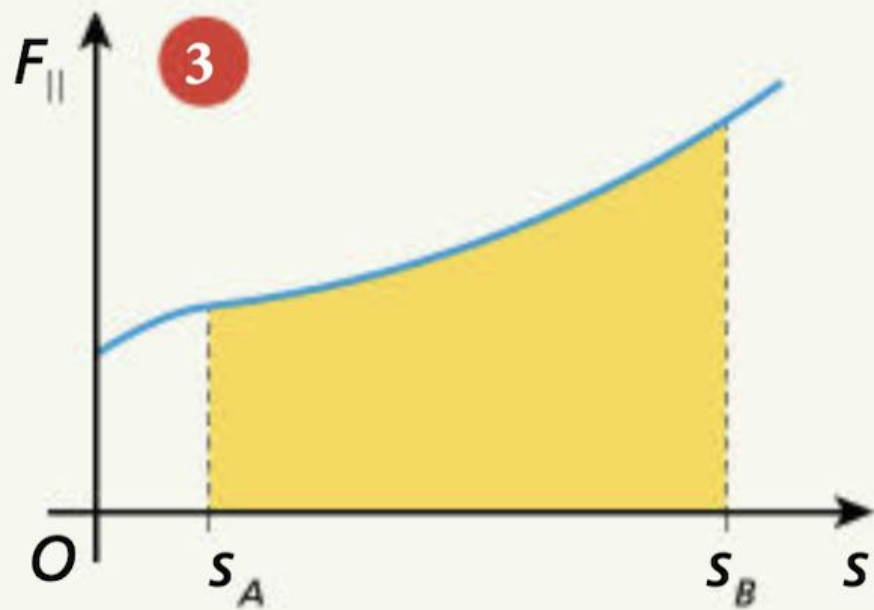
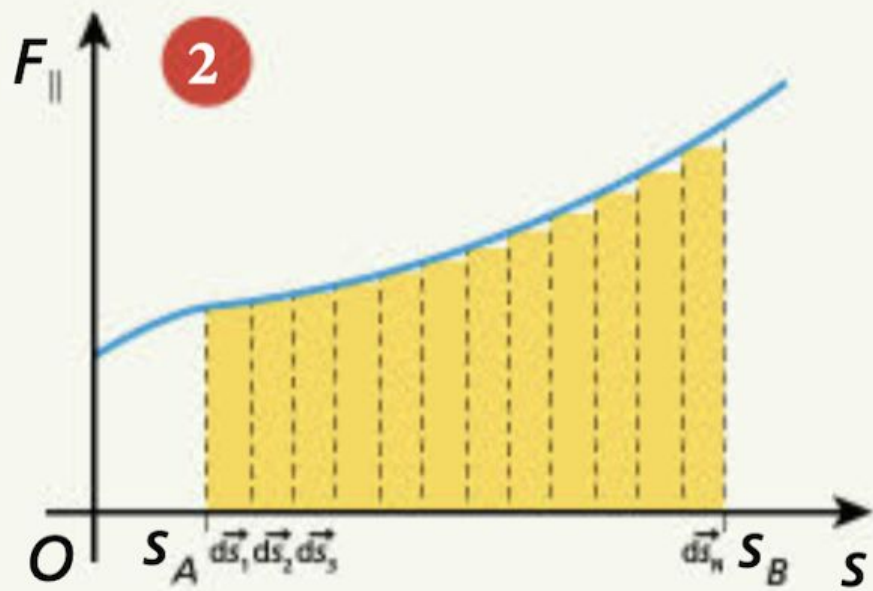
$$dW = F_{\parallel}(s) ds. \longleftrightarrow \text{lavoro infinitesimale.}$$

Il lavoro totale è la somma di tutti i contributi infinitesimi:

$$W = \int_{s_a}^{s_b} F_{\parallel}(s) ds.$$







$$W = \int_{s_a}^{s_b} F_{||}(s) ds$$

Integrale DEFINITO della funzione $f(x)$ tra gli estremi a e b .

$$\int_a^b f(x) dx$$

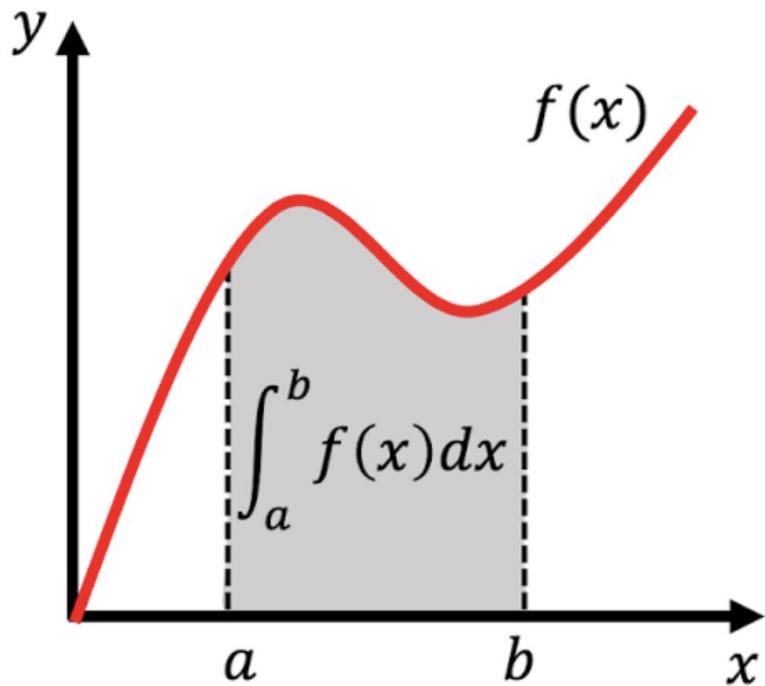
Dal punto di vista geometrico,

$$\int_a^b f(x) dx$$

rappresenta l'area compresa tra:

- il grafico della funzione $y = f(x)$;
- l'asse x ;
- le rette verticali $x = a$ e $x = b$.

$$\int_a^b f(x) dx$$



Spostamento da velocità variabile

$$\Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Variazione di velocità da accelerazione variabile

$$\Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$$

Carica che attraversa un circuito

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$$

Impulso di una forza

$$\Delta p = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$$

Un piccolo razzo di massa costante $m = 5.0 \text{ kg}$ si muove lungo una traiettoria rettilinea nello spazio. Il motore eroga una potenza costante $P = 2.0 \times 10^3 \text{ W}$. La regione attraversata contiene una tenue nube di particelle che esercita sul razzo una forza resistente, che nell'intervallo di velocità considerate, varia come:

$$R(v) = \alpha v^2 \sqrt{1 + \frac{v}{v_0}},$$

dove

$$\alpha = 2.0 \times 10^{-2} \text{ kg/m}, \quad v_0 = 20 \text{ m/s}.$$

All'istante iniziale la velocità del razzo è 10 m/s . Determinare la distanza percorsa dal razzo prima di raggiungere la velocità $v_f = 25 \text{ m/s}$.

Poiché il motore eroga una potenza costante,

$$P = F_{\text{mot}} v \longrightarrow F_{\text{mot}} = \frac{P}{v}.$$

La seconda legge di Newton si scrive:

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{P}{v} - \alpha v^2 \sqrt{1 + \frac{v}{v_0}}.$$

Poiché si vuole determinare una distanza, conviene usare

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dx} \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx} \longrightarrow m v \frac{dv}{dx} = \frac{P}{v} - \alpha v^2 \sqrt{1 + \frac{v}{v_0}},$$

dove abbiamo fatto un uso disinvolto dei differenziali.

Separando le variabili, arriviamo a:

$$dx = m \frac{v^2 dv}{P - \alpha v^3 \sqrt{1 + \frac{v}{v_0}}}.$$

Integrando otteniamo la distanza cercata:

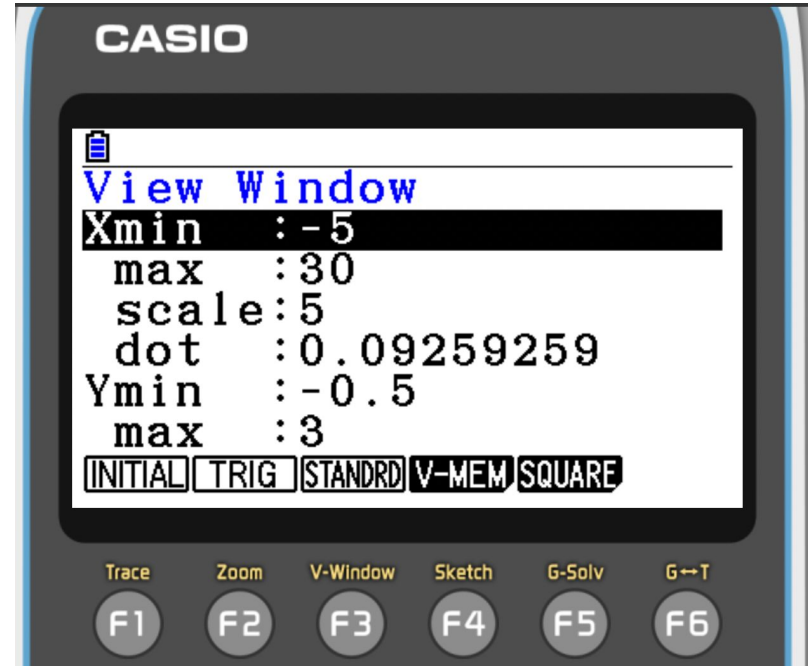
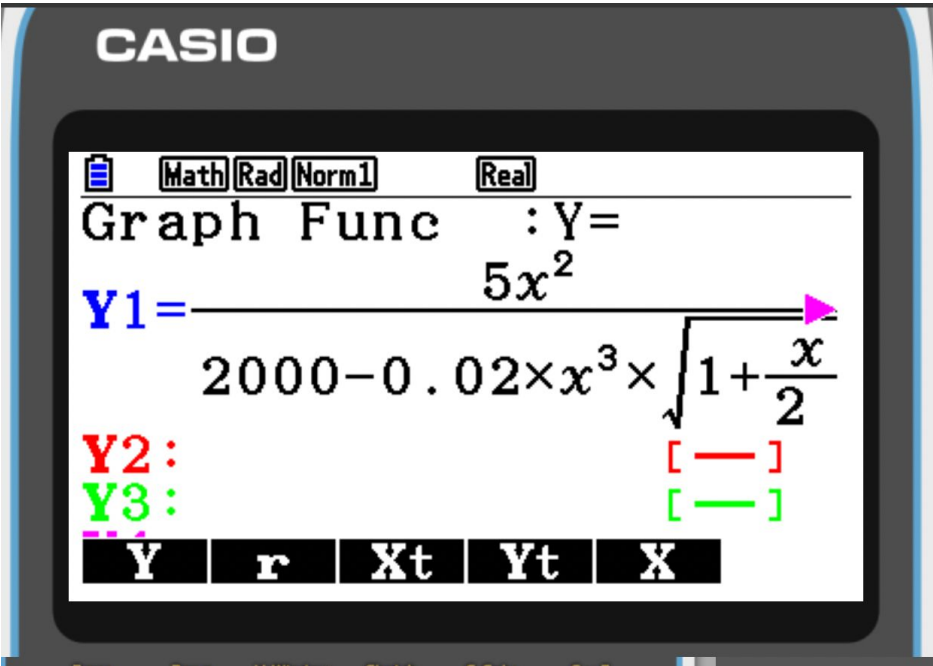
$$\int_{x_i}^{x_f} dx = \Delta x = m \int_{v_i}^{v_f} \frac{v^2 dv}{P - \alpha v^3 \sqrt{1 + \frac{v}{v_0}}}.$$

$$\Delta x = 5 \int_{10}^{25} \frac{v^2 dv}{2000 - 0.02 v^3 \sqrt{1 + \frac{v}{20}}}.$$

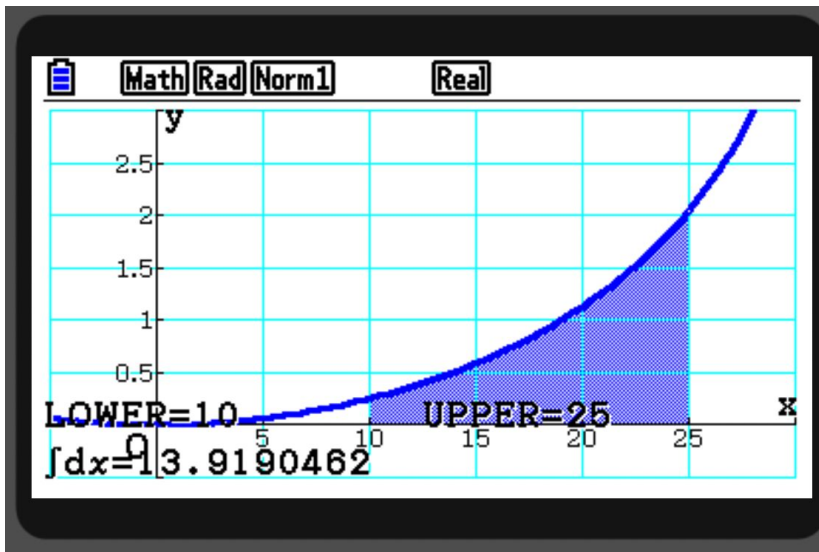
la funzione da integrare è: $f(x) = \frac{5x^2}{2000 - 0.02 x^3 \sqrt{1 + \frac{x}{20}}}$

MENU

GRAPH



F3 V-Window



sol: 13.919 m

- Premi **F5** → **G-Solv**
- Premi **F6** → $\int dx$ (integrale)
- Inserisci l'estremo sinistro:
 - scrivi **10**
 - premi **EXE**
- Inserisci l'estremo destro:
 - scrivi **25**
 - premi **EXE**

La calcolatrice evidenzia l'area sotto il grafico

tra $x=10$ e $x=25$ e mostra il valore dell'integrale.

1. Studio di funzioni e ricerca di equilibri

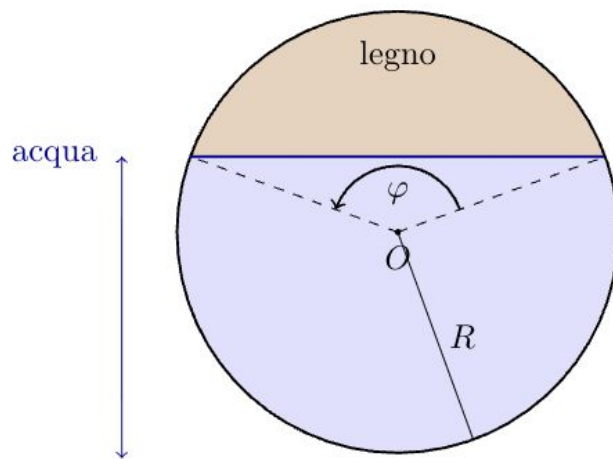
2. Calcolo di integrali definiti

3. Risoluzione numerica di equazioni

4. Inserimento delle costanti di uso maggiore

5. Analisi di dati sperimentali

Un tronco cilindrico di legno, di densità $\rho_{\text{legno}} = 600 \text{ kg/m}^3$, galleggia in equilibrio con l'asse orizzontale in acqua ($\rho_{\text{acqua}} = 1000 \text{ kg/m}^3$), come nella sezione circolare mostrata in figura. Indichiamo con φ (in radianti) l'angolo al centro che sottende, sulla sezione circolare del tronco, la parte di legno *emersa* sopra il pelo dell'acqua.



(Figura schematica, non in scala.)

Determina l'angolo φ (in radianti, con tre cifre decimali).

- per la legge di Archimede, all'equilibrio la frazione di area immersa è uguale al rapporto tra le densità, $\rho_{\text{legno}}/\rho_{\text{acqua}} = 0.6$; di conseguenza la frazione di area *emersa* è il suo complemento a 1:

$$\frac{A_{\text{emerso}}}{\pi R^2} = 1 - \frac{\rho_{\text{legno}}}{\rho_{\text{acqua}}} = 0.4;$$

- l'area del segmento circolare individuato da un angolo al centro φ (minore di un angolo piatto) su un cerchio di raggio R — qui, la parte emersa — vale

$$A_{\text{emerso}} = \frac{R^2}{2}(\varphi - \sin \varphi) .$$

Combinando le relazioni precedenti si ottiene l'equazione

$$\varphi - \sin \varphi = 2\pi(1 - 0.6) = 0.8\pi .$$

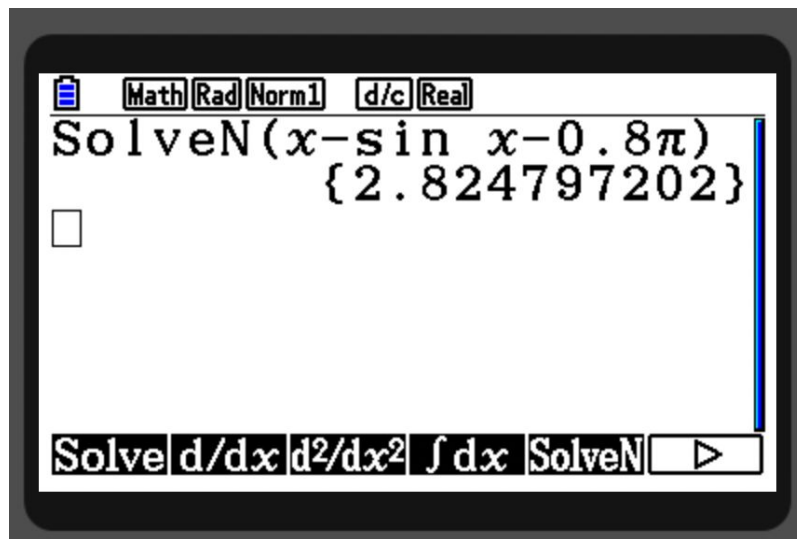
SolveN permette di trovare numericamente tutte le soluzioni di un'equazione.

Vai in **RUN-MATRIX**

CALC (F4)

SolveN (F5)

inserisci l'equazione **chiudi la parentesi** e premi **EXE**



1. Studio di funzioni e ricerca di equilibri

2. Calcolo di integrali definiti

3. Risoluzione numerica di equazioni

4. Inserimento delle costanti di uso maggiore

5. Analisi di dati sperimentali

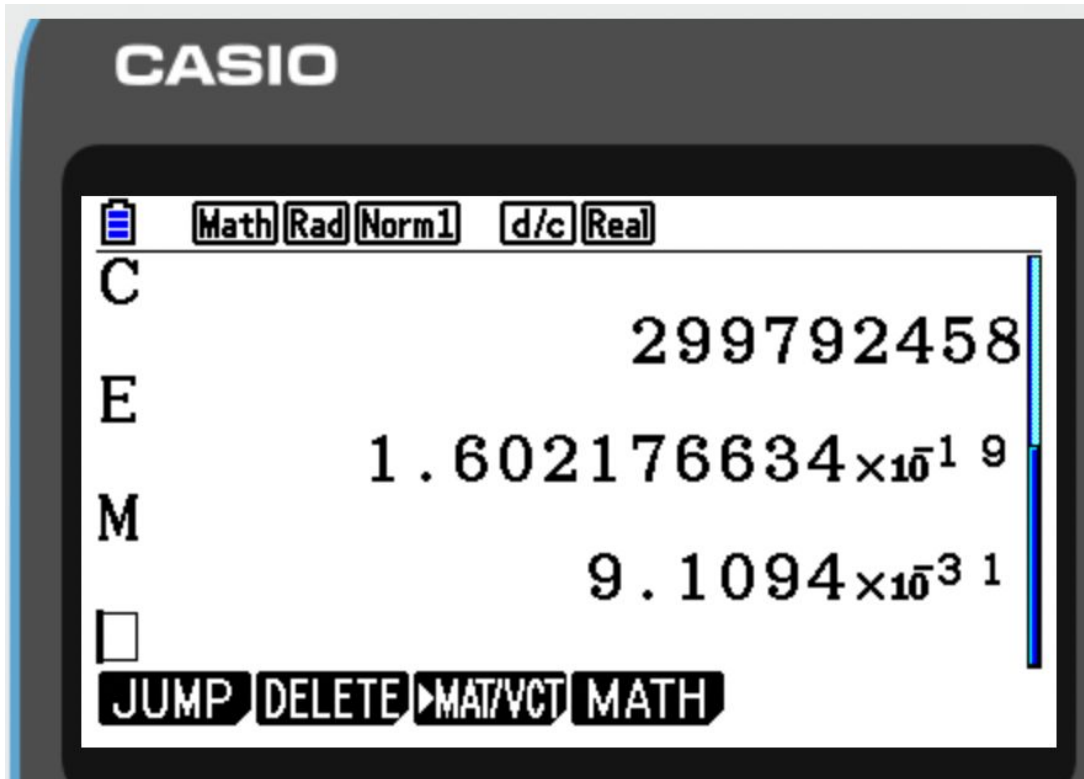
Variabile	Costante	Valore (delle GAS!!)
C	Velocità della luce	2.99792458×10^8 m/s
E	Carica elementare	$1.602176634 \times 10^{-19}$ C
M	Massa elettrone	9.1094×10^{-31} kg

Vai in **RUN-MATRIX** e inserisci i seguenti comandi:

2.99792458 **x10^x** 8 **→** **ALPHA** C **EXE**

VERIFICA

ALPHA C **EXE** la calcolatrice ti restituisce il valore



2.99792458 $\times 10$ 8 $\rightarrow$ ALPHA C EXE

1. Studio di funzioni e ricerca di equilibri

2. Calcolo di integrali definiti

3. Risoluzione numerica di equazioni

4. Inserimento delle costanti di uso maggiore

5. Analisi di dati sperimentali

$\mathcal{P}_{16}$ Misure di caduta

Pierino si trova su un pianeta alieno, di cui vuole misurare l'accelerazione di gravità g . Per farlo lancia piccoli sassi con una fionda, da un'altezza nulla rispetto al suolo. Egli tende l'elastico sempre allo stesso modo, cosicché i sassi abbiano sempre una velocità iniziale di 30 m/s , e ripete l'esperimento cambiando di volta in volta l'angolo di lancio θ rispetto all'orizzontale. Usando un cronometro, Pierino misura il tempo impiegato da ciascun sasso ad arrivare al suolo, riportando i dati in tabella. Quanto vale g sul pianeta alieno?

Unità di misura: m/s^2 . *Precisione richiesta:* 1.0% .

θ [°]	Tempo [s]
10.0	0.683
20.0	1.36
30.0	1.91
40.0	2.53
50.0	2.83
60.0	3.31
70.0	3.70
80.0	3.92
90.0	3.68

$$t = \frac{2v_0}{g} \sin \theta.$$

Per ottenere la miglior stima di g , possiamo eseguire un semplice fit. In questo caso la relazione fra θ e t è non lineare e normalmente non inclusa sulle calcolatrici tascabili, per cui è opportuno linearizzare la relazione precedente. Se definiamo le due variabili $X = \sin \theta$ e $Y = t$, la relazione precedente diventa una relazione lineare

$$Y = \frac{2v_0}{g} X,$$

in cui il coefficiente angolare della retta include dati noti e il valore incognito di g .

VEDIAMO COME FARE CON LA CASIO fx-CG50

Shift + SET UP scegli Deg

Spreadsheet inserisci i valori



Deg

Norm1

d/c

Real

SHEET

SHE	A	B	C	D
1	10	0.683		
2	20	1.36		
3	30	1.91		
4	40	2.53		
5	50	2.83		

B1 : B999

EDIT

DELETE

INSERT

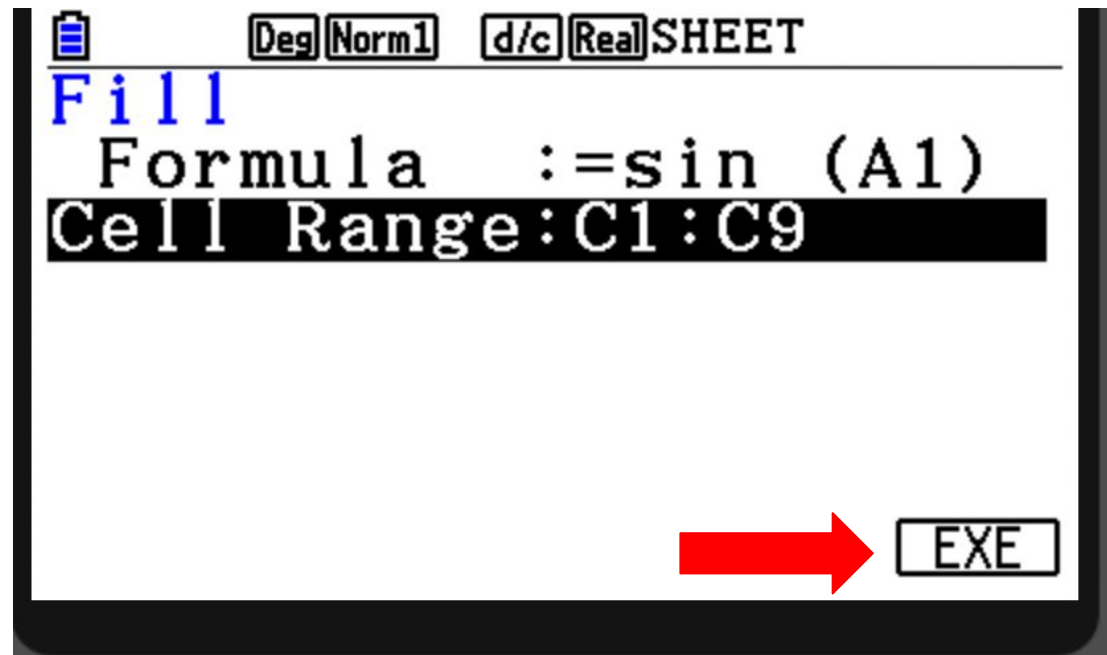
CLEAR



EDIT(F2) +  F6 + **FILL** (F1)

in **Formula** inserisci **=sin(A1)**

in **Cell Range**: **C1:C9**





[Deg] [Norm1] [d/c] [Real] SHEET

SHE	A	B	C	D
1	10	0.683	0.1736	
2	20	1.36	0.342	
3	30	1.91	0.5	
4	40	2.53	0.6427	
5	50	2.83	0.766	

=sin (A1)

FILL

SORTASC

SORTDES



Graph + SET

 Deg Norm1 d/c Real SHEET

Graph Type: Scatter 

XCellRange: C1:C9

YCellRange: B1:B9

Frequency : 1

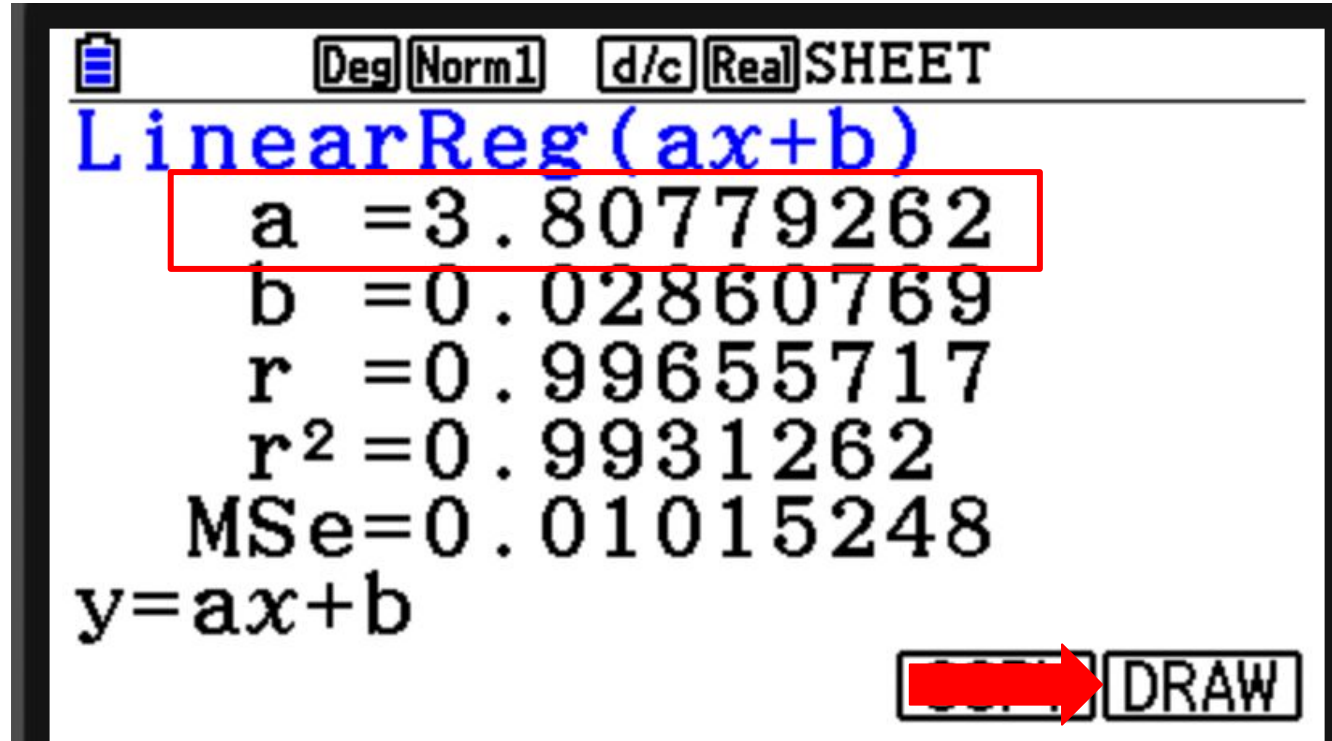
Mark Type : $\times$

Color Link: Off

Grph Color: Blue

CELL

$$\text{Graph1} + \text{CALC} + \text{X} + \text{ax} + \text{b}$$



$$m = 3.80779262 \text{ s} \longrightarrow g = 1.5757 \times 10^1 \text{ m/s}^2$$



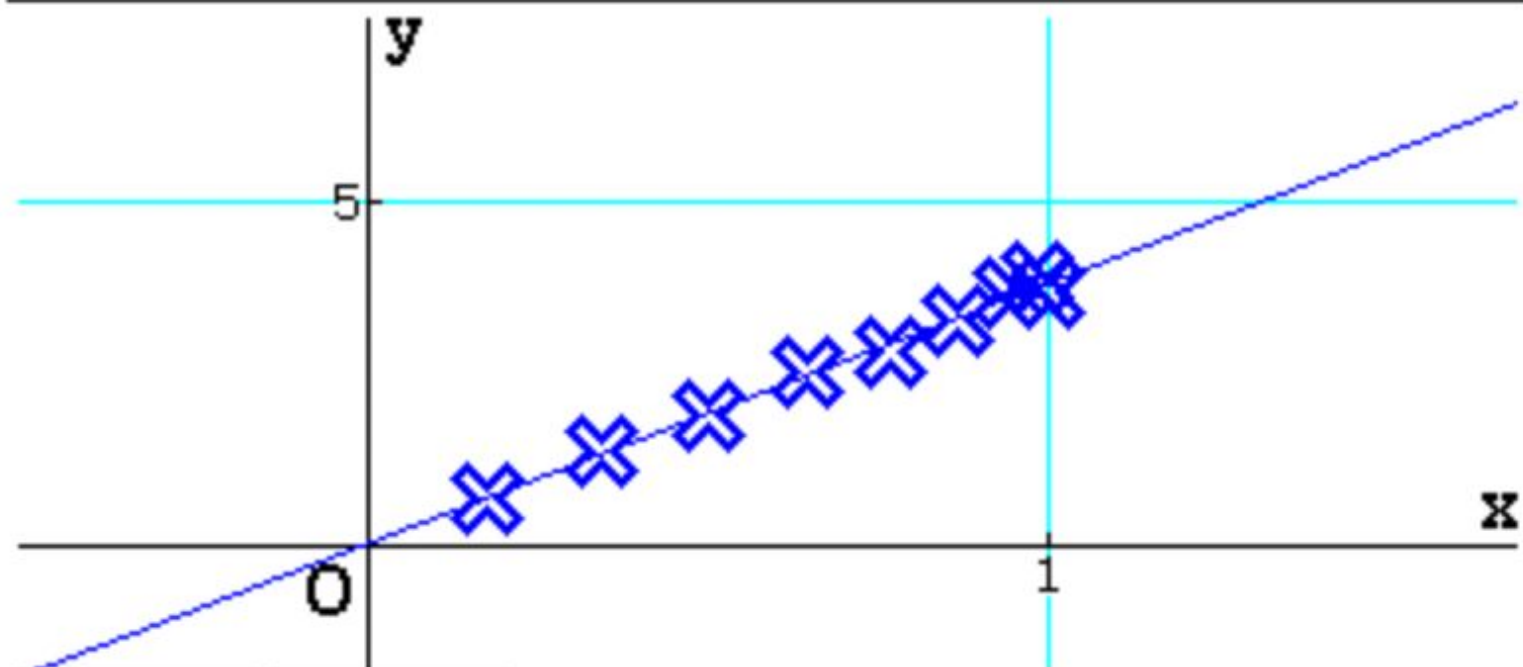
Deg

Norm1

d/c

Real

SHEET



$ax+b$

$a+bx$