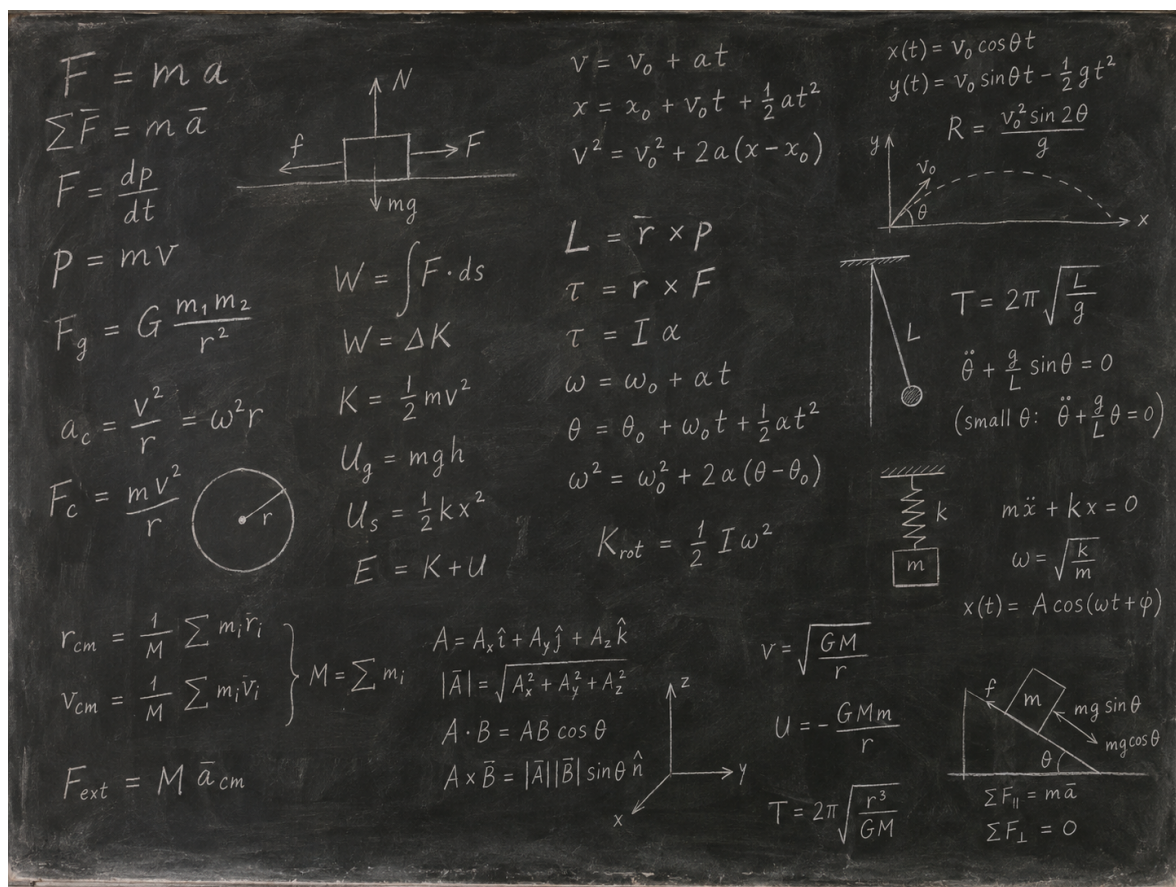


XVI Scuola Estiva di Fisica

Università del Salento

Problemi di Meccanica



Antonio Quintavalle

Liceo Scientifico "G. Banzi Bazoli" – Lecce

Nota introduttiva

Il presente documento raccoglie una selezione di problemi di Meccanica proposti agli studenti partecipanti alla **XVI Scuola Estiva di Fisica**, organizzata dal Dipartimento di Matematica e Fisica dell'Università del Salento in collaborazione con l'AIF (Associazione per l'Insegnamento della Fisica). I problemi selezionati provengono da:

- quesiti e problemi delle gare di secondo livello dei **Campionati Italiani di Fisica**, i cui testi e le relative soluzioni ufficiali sono disponibili all'indirizzo <https://www.olifis.it/index.php/problemi-olifis/problemi-di-secondo-livello>;
- problemi delle **Gare a Squadre di Fisica**, tratti dagli allenamenti ufficiali, dalle gare di qualificazione nazionale e dalle finali nazionali; i testi e le relative soluzioni ufficiali sono disponibili all'indirizzo <https://gas.olifis.it/eventi/>;
- problemi dei **pre-test di ammissione allo Stage di Fisica della Scuola Normale Superiore di Pisa**, i cui testi e le relative soluzioni ufficiali sono disponibili all'indirizzo <https://stagefisica.sns.it/problemi-ammissione/>.

Le soluzioni presentate riprendono quelle sviluppate durante le lezioni della Scuola Estiva e sono state successivamente integrate con approfondimenti, osservazioni e richiami teorici, con l'obiettivo di mettere in evidenza non soltanto gli aspetti computazionali, ma anche la struttura fisica e concettuale dei problemi affrontati.

In queste note, per indicare le derivate si utilizzeranno, a seconda delle esigenze tipografiche e anche all'interno della stessa equazione o formula, sia la notazione di Leibniz sia quella di Newton. Quest'ultima sarà impiegata esclusivamente per derivate rispetto al tempo. Pertanto,

$$\frac{df}{dt} = \dot{f}, \quad \frac{d^2f}{dt^2} = \ddot{f}.$$

Nonostante le attente revisioni, questo documento potrà contenere errori o imprecisioni di diversa natura e gravità. Ringrazio fin d'ora chiunque, dopo averne individuato qualcuno, vorrà gentilmente segnalarmelo scrivendo all'indirizzo di posta elettronica antonio.quintavalle@liceobanzi.edu.it.

Infine, si consiglia di aprire il documento con Adobe Acrobat Reader per poter visualizzare correttamente le animazioni.

Indice

Problemi	3
P1 – Moto rettilineo con accelerazione costante a tratti	3
P2 – Forza crescente linearmente nel tempo	5
P3 – Pendolo rotante	7
P4 – Molla in rotazione	9
P5 – Oscillazioni di molecole	13
P6 – Curve con attrito	16
P7 – Se il recipiente ruota	19
P8 – Discesa con attrito infinito	21
 Oscillatori accoppiati	 25
Equazioni del moto	25
Coordinate normali	26
Soluzione delle equazioni del moto	26
Modi normali di oscillazione	27
Energia	28
Battimenti	29
Trasferimenti energetici durante i battimenti	31

Problemi

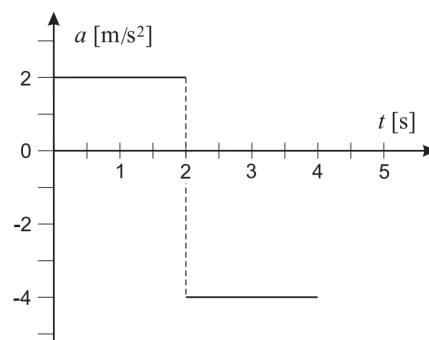
P₁ Moto rettilineo con accelerazione costante a tratti

Gara individuale di 2 livello 2020

Q !

Un oggetto parte da fermo e viene accelerato come mostrato nel grafico, percorrendo una traiettoria rettilinea. Si supponga che la variazione di accelerazione avvenga in un intervallo di tempo trascurabile.

- Determinare la massima distanza dal punto di partenza raggiunta dall'oggetto.



Indichiamo con t_0 l'istante in cui cambia l'accelerazione e con t_1 l'estremo dell'intervallo considerato. Dal grafico si ricava

$$a(t) = \begin{cases} a_1, & 0 \leq t \leq t_0, \\ a_2, & t_0 < t \leq t_1, \end{cases}$$

con $a_1 > 0$ e $a_2 < 0$.

Poiché l'oggetto parte da fermo, $v(0) = 0$. Imponendo inoltre la continuità della velocità nell'istante t_0 , si ottiene

$$v(t) = \begin{cases} a_1 t, & 0 \leq t \leq t_0, \\ a_1 t_0 + a_2(t - t_0), & t_0 < t \leq t_1. \end{cases} \quad (1)$$

Ponendo $x(0) = 0$ e scegliendo come verso positivo quello del moto iniziale, la continuità della posizione nell'istante t_0 fornisce la legge oraria

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} a_1 t^2, & 0 \leq t \leq t_0, \\ \frac{1}{2} a_1 t_0^2 + a_1 t_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_2(t - t_0)^2, & t_0 < t \leq t_1. \end{cases} \quad (2)$$

La distanza dal punto di partenza è

$$d(t) = |x(t)|.$$

Per determinarne il valore massimo è quindi necessario esaminare l'andamento della posizione nell'intero intervallo $[0, t_1]$.

Nel primo sottointervallo, $[0, t_0]$, la velocità cresce linearmente mantenendosi positiva per $t > 0$, mentre nel secondo sottointervallo, $[t_0, t_1]$, essendo $a_2 < 0$, la velocità decresce linearmente e il moto potrebbe subire un'inversione in corrispondenza di un istante t_{inv} in cui la velocità si annullerebbe. Per individuare l'eventuale t_{inv} , si utilizza la seconda equazione del sistema (1),

$$a_1 t_0 + a_2(t_{inv} - t_0) = 0,$$

da cui

$$t_{\text{inv}} = t_0 - \frac{a_1}{a_2} t_0 = t_0 \left(1 + \frac{a_1}{|a_2|} \right).$$

Inserendo i valori del grafico,

$$t_{\text{inv}} = 3 \text{ s}.$$

Poiché

$$2 \text{ s} < 3 \text{ s} < 4 \text{ s},$$

si può concludere che l'istante di inversione appartiene effettivamente all'intervallo in cui $a = a_2$.

Fino a t_{inv} il moto avviene nel verso positivo e $x(t)$ cresce; la massima distanza raggiunta sulla semiretta percorsa inizialmente è quindi

$$d(t_{\text{inv}}) = |x(t_{\text{inv}})| = x(t_{\text{inv}}).$$

Dopo l'inversione il moto avviene definitivamente nel verso opposto e $x(t)$ decresce fino all'istante t_1 . In questo moto di ritorno, il corpo potrebbe quindi oltrepassare il punto di partenza e all'interno dell'intervallo $[t_{\text{inv}}, t_1]$, raggiungere, sulla semiretta opposta, una distanza da esso maggiore di quella raggiunta al punto di inversione. Tuttavia, inserendo il valore $t_1 = 4 \text{ s}$ nella seconda equazione del sistema (2), si trova

$$x(t_1) = 4 \text{ m} > 0.$$

Ciò significa che il corpo non oltrepassa il punto di partenza e quindi non può allontanarsene nel verso opposto a quello del moto iniziale. Di conseguenza

$$d(t_{\text{inv}}) = |x(t_{\text{inv}})| = x(t_{\text{inv}})$$

è la distanza massima dal punto di partenza che viene raggiunta nell'istante di inversione.

Poiché $t_{\text{inv}} > t_0$, il valore di $x(t_{\text{inv}})$ si ricava dal secondo ramo della legge oraria (2). Dalla relazione

$$t_{\text{inv}} - t_0 = -\frac{a_1}{a_2} t_0 \tag{3}$$

e sostituendo la (3) nella (2), si ottiene

$$x_{\text{max}} = \frac{1}{2} \frac{a_1}{|a_2|} (a_1 + |a_2|) t_0^2.$$

Inserendo infine i valori numerici,

$$x_{\text{max}} = 6 \text{ m}.$$

P₂ Forza crescente linearmente nel tempo

Gara individuale di 2 livello 2015



4

L'intensità della forza risultante F che agisce su un corpo aumenta da 0 a $F_1 = 100\text{ N}$ al ritmo costante di 10 N s^{-1} . In questo tempo il corpo, partendo da fermo, raggiunge la velocità

$$v = 50\text{ m s}^{-1}.$$

- Calcolare la massa del corpo.

Indichiamo con

$$b = \frac{\Delta F}{\Delta t}$$

il ritmo costante con cui aumenta la forza. Poiché la forza passa da 0 a $F_1 = 100\text{ N}$,

$$t_f = \frac{F_1}{b}$$

Per determinare la massa possiamo procedere per analogia con il moto rettilineo uniformemente accelerato. Nel MRUA la velocità varia linearmente nel tempo e il suo valore medio in un intervallo è la media aritmetica dei valori iniziale e finale:

$$v_m = \frac{v_0 + v_f}{2}.$$

Nel nostro caso non è la velocità, ma la forza a variare linearmente nel tempo. Poiché

$$a = \frac{F}{m},$$

anche l'accelerazione varia linearmente, passando da

$$a_0 = 0$$

a

$$a_f = \frac{F_1}{m}.$$

Per la stessa proprietà utilizzata nel MRUA, il valore medio dell'accelerazione nell'intervallo $[0, t_f]$ è quindi

$$a_m = \frac{a_0 + a_f}{2} = \frac{F_1}{2m}.$$

La variazione di velocità prodotta nell'intervallo t_f può allora essere scritta come

$$v_f - v_0 = a_m t_f.$$

Poiché il corpo parte da fermo,

$$v_f = \frac{F_1}{2m} t_f = \frac{F_1^2}{2mb},$$

da cui

$$m = \frac{F_1^2}{2bv_f}.$$

Numericamente,

$$m = 10\text{ kg}.$$

Soluzione alternativa mediante integrazione delle equazioni del moto. Poiché la forza cresce linearmente nel tempo,

$$F(t) = bt.$$

Dalla seconda legge della dinamica segue

$$a(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{b}{m}t.$$

Poiché $a = dv/dt$, integrando una prima volta e imponendo $v(0) = 0$ si ottiene

$$v(t) = \int_0^t \frac{b}{m}t' dt' = \frac{b}{2m}t^2.$$

Integrando una seconda volta e ponendo $x(0) = 0$,

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt' = \int_0^t \frac{b}{2m}t'^2 dt' = \frac{b}{6m}t^3.$$

La legge della velocità è sufficiente per determinare la massa. All'istante t_f ,

$$v_f = \frac{b}{2m}t_f^2,$$

da cui

$$m = \frac{bt_f^2}{2v_f}.$$

Essendo

$$t_f = \frac{F_1}{b},$$

si può anche scrivere

$$m = \frac{F_1^2}{2bv_f}.$$

La seconda integrazione fornisce inoltre lo spazio percorso:

$$x_f = \frac{b}{6m}t_f^3.$$

Soluzione alternativa mediante l'impulso. L'impulso della forza risultante nell'intervallo $[0, t_f]$ è

$$J = \int_0^{t_f} F(t) dt.$$

Poiché la forza cresce linearmente da 0 a F_1 , il grafico di F in funzione del tempo individua un triangolo di base t_f e altezza F_1 . L'impulso è pertanto

$$J = \frac{1}{2}F_1t_f.$$

Per il teorema dell'impulso,

$$J = \Delta p.$$

Poiché il corpo parte da fermo,

$$\Delta p = mv_f,$$

e quindi

$$mv_f = \frac{1}{2}F_1t_f.$$

Ne segue

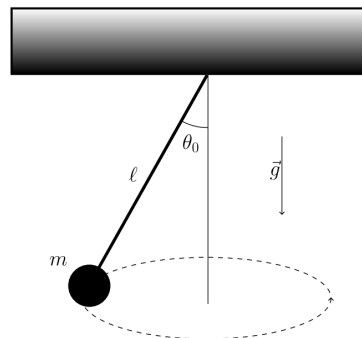
$$m = \frac{F_1^2}{2bv_f}.$$

P₃ Pendolo rotante

Finale nazionale gara a squadre 2023

P₇ Pendolo rotante

Un oggetto puntiforme di massa 200 g è appeso ad un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza 40 cm. Il sistema è immerso nel campo gravitazionale terrestre. L'oggetto si muove di moto circolare uniforme con periodo T e l'angolo che il filo forma con la verticale, come in figura, è $\theta_0 = 13^\circ$. Se l'oggetto venisse messo in moto circolare uniforme con periodo $T/2$, quanto varrebbe il nuovo valore di θ_0 ?



Unità di misura: $^\circ$. Precisione richiesta: 0.5%.

Indichiamo con τ la tensione del filo, con ω la velocità angolare del moto circolare uniforme e con θ_0 l'angolo formato dal filo con la verticale. Il raggio della traiettoria è

$$r = \ell \sin \theta_0.$$

Le equazioni del moto lungo la direzione orizzontale, diretta verso l'asse di rotazione, e lungo la verticale sono

$$\begin{cases} \tau \sin \theta_0 = m\omega^2 \ell \sin \theta_0, \\ \tau \cos \theta_0 - mg = 0. \end{cases}$$

Per un moto circolare uniforme con raggio non nullo si ha $\sin \theta_0 \neq 0$, e quindi, semplificando la prima equazione,

$$\tau = m\omega^2 \ell.$$

Sostituendo nella seconda equazione,

$$m\omega^2 \ell \cos \theta_0 = mg,$$

da cui

$$\cos \theta_0 = \frac{g}{\omega^2 \ell}. \quad (4)$$

Poiché

$$\frac{g}{\omega^2 \ell} > 0,$$

dalla relazione (4) segue

$$\cos \theta_0 > 0.$$

Essendo θ_0 l'angolo geometrico formato dal filo con la verticale, per un moto circolare uniforme con raggio non nullo si ha

$$0 < \theta_0 < \pi.$$

La condizione $\cos \theta_0 > 0$ impone pertanto

$$0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2},$$

e quindi

$$0 < \cos \theta_0 < 1.$$

Non è dunque possibile un moto conico capovolto, corrispondente a

$$\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi,$$

poiché in tale intervallo si avrebbe $\cos \theta_0 < 0$, in contrasto con la relazione (4).

Dalla stessa relazione, essendo $\cos \theta_0 < 1$, segue

$$\frac{g}{\omega^2 \ell} < 1,$$

ossia

$$\omega^2 > \frac{g}{\ell}.$$

Introducendo la pulsazione delle oscillazioni libere del pendolo nel regime delle piccole oscillazioni

$$\omega_p = \sqrt{\frac{g}{\ell}},$$

il vincolo può essere scritto

$$\omega > \omega_p.$$

La pulsazione delle oscillazioni libere del pendolo costituisce quindi il valore di soglia al di sotto del quale non è possibile avere un moto circolare uniforme su un piano orizzontale (pendolo conico).

Nel caso considerato, essendo

$$\theta_0 = 13^\circ,$$

si ha $\cos \theta_0 < 1$ e quindi, dalla relazione (4),

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell \cos \theta_0} > \frac{g}{\ell},$$

per cui i dati del problema sono compatibili con un moto circolare uniforme.

Dalla relazione (4) e da

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

si ricava

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell \cos \theta_0}{g}}. \quad (5)$$

Indichiamo con θ_1 il nuovo angolo quando il periodo viene dimezzato. Applicando la relazione (5) ai due moti, si ha

$$2\pi \sqrt{\frac{\ell \cos \theta_1}{g}} = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{\ell \cos \theta_0}{g}}.$$

Pertanto

$$\sqrt{\cos \theta_1} = \frac{1}{2} \sqrt{\cos \theta_0},$$

e quindi

$$\cos \theta_1 = \frac{1}{4} \cos \theta_0.$$

Segue

$$\theta_1 = \arccos \left(\frac{1}{4} \cos \theta_0 \right).$$

Con

$$\theta_0 = 13^\circ,$$

si ottiene

$$\theta_1 = \arccos \left(\frac{1}{4} \cos 13^\circ \right) \simeq 75.9^\circ.$$

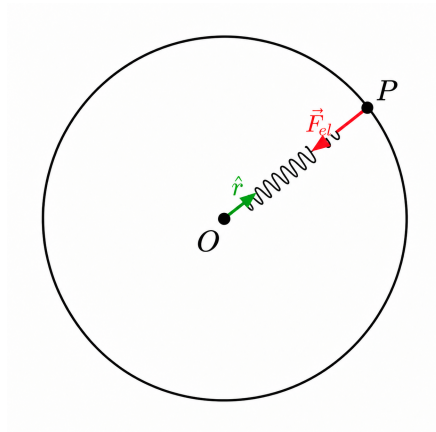
P₄ Molla in rotazione

Gara individuale di 2 livello 2005



Ad un estremo di una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo ℓ_0 viene collegata una massa m rispetto alla quale la massa della molla è trascurabile.

- Se il sistema massa-molla viene fatto ruotare uniformemente a velocità angolare ω , su un piano orizzontale intorno all'altro estremo della molla, mantenuto fisso, quanto vale la lunghezza della molla?



Sia $\hat{r}$ il versore radiale diretto dal punto fisso O verso la massa. Se la lunghezza della molla durante il moto è ℓ , la forza elastica agente sulla massa è

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0) \hat{r}.$$

Poiché la massa descrive un moto circolare uniforme di raggio ℓ e velocità angolare ω , la sua accelerazione è puramente centripeta

$$\vec{a} = -\omega^2 \ell \hat{r}.$$

Dalla seconda legge della dinamica,

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

si ha quindi

$$-k(\ell - \ell_0) = -m\omega^2 \ell.$$

Pertanto

$$k\ell - k\ell_0 = m\omega^2 \ell,$$

da cui

$$(k - m\omega^2)\ell = k\ell_0. \quad (6)$$

Se introduciamo la pulsazione delle oscillazioni libere dell'oscillatore armonico

$$\boxed{\omega_p^2 = \frac{k}{m}}$$

si può scrivere

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right) \ell = \ell_0.$$

Se $\ell_0 > 0$, la lunghezza della molla è dunque

$$\boxed{\ell = \frac{\ell_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}}. \quad (7)$$

Affinché la soluzione abbia significato fisico deve essere $\ell > 0$. Poiché $\ell_0 > 0$, ciò richiede

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2} > 0,$$

ossia

$$\boxed{\omega < \omega_p}.$$

Per $\omega > \omega_p$ la relazione (7) fornirebbe infatti

$$\ell < 0,$$

che non rappresenta una possibile lunghezza della molla. Inoltre,

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_p^-} \ell = +\infty.$$

Per $\omega = \omega_p$ l'equazione (6) diventa

$$0 = k\ell_0,$$

che, per $\ell_0 > 0$, è impossibile. Pertanto non esiste alcun moto circolare uniforme con lunghezza finita per $\omega \geq \omega_p$. Si può quindi affermare che ω_p costituisce un valore critico della velocità angolare per l'esistenza del moto circolare uniforme.

Analisi nel riferimento rotante

Alla stessa conclusione si può arrivare nel riferimento che ruota con velocità angolare ω . Per una massa in quiete rispetto a tale riferimento, lungo la direzione radiale agiscono la forza elastica e la forza centrifuga. La componente radiale della risultante è quindi

$$F_{\text{eff}}(\ell) = -k(\ell - \ell_0) + m\omega^2\ell.$$

Raccogliendo il coefficiente di ℓ ,

$$F_{\text{eff}}(\ell) = -k \left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right) \ell + k\ell_0.$$

Per $\omega \neq \omega_p$, con

$$\omega_p = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

la forza efficace può essere riscritta nella forma

$$F_{\text{eff}}(\ell) = -k \left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right) \left(\ell - \frac{\ell_0}{1 - \frac{m\omega^2}{k}}\right).$$

Essa ha quindi la stessa struttura di una forza elastica, con costante elastica efficace

$$k_{\text{eff}} = k \left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right) = k - m\omega^2.$$

che tuttavia può essere anche negativa e con lunghezza di riposo

$$\ell_{\text{eq}} = \frac{\ell_0}{1 - \frac{m\omega^2}{k}} = \frac{\ell_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2},$$

A meno di una costante additiva, l'energia potenziale efficace associata è pertanto

$$U_{\text{eff}}(\ell) = \frac{1}{2}k \left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right) \left(\ell - \frac{\ell_0}{1 - \frac{m\omega^2}{k}}\right)^2.$$

Equivalentemente,

$$U_{\text{eff}}(\ell) = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right) \left(\ell - \frac{\ell_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}}\right)^2$$

Per $\ell_0 > 0$:

- $\omega < \omega_p$. In questo caso

$$k_{\text{eff}} = k - m\omega^2 > 0.$$

L'energia potenziale efficace è quindi una parabola con concavità rivolta verso l'alto. Il suo vertice si trova in

$$\ell_{\text{eq}} = \frac{\ell_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2} > 0.$$

Poiché il vertice è un minimo del potenziale efficace, esso individua una configurazione di equilibrio radiale stabile nel riferimento rotante.¹ che corrisponde ad un moto circolare nel riferimento inerziale di partenza.

¹Per una forza conservativa unidimensionale vale

$$F dx = -dU.$$

Sia x_{eq} una posizione di equilibrio, cioè una posizione in cui $F = 0$. Per stabilirne la natura consideriamo un piccolo spostamento dx che allontani il sistema dalla posizione di equilibrio. Se l'equilibrio è stabile, la forza è diretta in verso opposto allo spostamento e tende quindi a riportare il sistema verso x_{eq} . In tal caso F e dx hanno segno opposto, per cui

$$F dx < 0$$

e quindi

$$dU > 0.$$

Allontanandosi dalla posizione di equilibrio l'energia potenziale aumenta, qualunque sia il verso dello spostamento: x_{eq} corrisponde pertanto a un minimo locale del potenziale. Se invece l'equilibrio è instabile, la forza ha lo stesso verso dello spostamento e tende ad allontanare ulteriormente il sistema dalla posizione di equilibrio. Si ha allora

$$F dx > 0,$$

da cui

$$dU < 0.$$

Allontanandosi dalla posizione di equilibrio l'energia potenziale diminuisce in entrambi i versi: x_{eq} corrisponde quindi a un massimo locale del potenziale. Infine, se nelle vicinanze della posizione considerata la forza rimane nulla,

$$F = 0,$$

allora

$$dU = 0,$$

e l'energia potenziale resta costante: tutte le posizioni vicine sono di equilibrio e si parla di equilibrio indifferente.

- $\omega = \omega_p$. In questo caso,

$$k_{\text{eff}} = k - m\omega^2 = 0.$$

per cui

$$F_{\text{eff}}(\ell) = k\ell_0.$$

Per $\ell_0 > 0$ la forza efficace è quindi costante e non si annulla per alcun valore di ℓ . L'energia potenziale efficace è, a meno di una costante additiva,

$$U_{\text{eff}}(\ell) = -k\ell_0\ell + \text{costante},$$

e non possiede punti stazionari. Non esistono pertanto configurazioni di equilibrio radiale nel riferimento rotante.

- $\omega > \omega_p$. In questo caso

$$k_{\text{eff}} = k - m\omega^2 < 0.$$

L'energia potenziale efficace è quindi una parabola con concavità rivolta verso il basso. Il suo vertice si trova in

$$\ell_{\text{eq}} = \frac{\ell_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2} < 0.$$

Il punto stazionario corrisponde dunque a un valore negativo della lunghezza della molla e non appartiene al dominio fisico $\ell \geq 0$. Non esistono pertanto configurazioni di equilibrio radiale fisicamente ammissibili nel riferimento rotante.

Per $\ell_0 = 0$ la forza efficace diventa

$$F_{\text{eff}}(\ell) = -k \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right) \ell,$$

e l'energia potenziale efficace è

$$U_{\text{eff}}(\ell) = \frac{k}{2} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_p^2}\right) \ell^2.$$

Pertanto, limitatamente alla stabilità radiale nel riferimento rotante con ω assegnata,

$$\omega < \omega_p \implies \ell = 0 \text{ è un equilibrio stabile,}$$

$$\omega = \omega_p \implies U_{\text{eff}} = \text{costante: equilibrio indifferente,}$$

$$\omega > \omega_p \implies \ell = 0 \text{ è un equilibrio instabile.}$$

Finale nazionale gara a squadre 2025

P₉ Oscillazioni di molecole

Una molecola composta da due atomi di idrogeno può vibrare in modo che la distanza tra i due nuclei oscilli con frequenza di 1.32×10^{14} Hz. Quanto vale tale frequenza di oscillazione per una molecola composta da un atomo di idrogeno e da uno di deuterio?

Nota: il nucleo dell'idrogeno è composto da un solo protone, mentre quello del deuterio è composto da un protone e un neutrone.

Unità di misura: Hz. Precisione richiesta: 0.5%.

Modellizziamo l'interazione tra i due nuclei, di masse m_1 e m_2 , con un'interazione elastica² mediata da una molla di costante k .

In via preliminare, è necessario esplicitare un'assunzione implicita nel testo, ovvero che la direzione della congiungente i due nuclei rimanga costante nel tempo, e quindi che il moto relativo non presenti una componente rotazionale³. Per questo motivo conviene introdurre sulla retta congiungente i due nuclei un sistema di ascisse, in modo che le leggi di forza che esprimono le interazioni possano essere scritte, in termini delle loro componenti cartesiane, come

$$\begin{aligned}F_{1 \rightarrow 2} &= -k[(x_2 - x_1) - x_0], \\F_{2 \rightarrow 1} &= +k[(x_2 - x_1) - x_0].\end{aligned}$$

Introduciamo la coordinata relativa

$$x = x_2 - x_1,$$

da cui

$$v = v_2 - v_1,$$

e quindi

$$a = a_2 - a_1,$$

La posizione del centro di massa è

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2},$$

per cui

$$v_G = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

e

$$a_G = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2}.$$

²Questa modellizzazione descrive efficacemente le piccole oscillazioni della distanza internucleare attorno al suo valore di equilibrio x_0 .

³Tale condizione equivale ad assumere nullo il momento angolare (che si conserva) del sistema rispetto al centro di massa. La necessità di questa assunzione emerge osservando che, in presenza di rotazione relativa, la dinamica della distanza tra i due nuclei risente anche di un contributo centrifugo, diretto verso l'esterno, che modifica in generale la frequenza delle oscillazioni. L'espressione della frequenza vibrazionale va intesa in relazione al caso di moto puramente vibrazionale, con momento angolare relativo nullo, oppure come approssimazione accettabile nella misura in cui gli effetti dell'accoppiamento tra rotazione e vibrazione possono essere trascurati, cosa che avviene quando la rotazione relativa risulta molto più lenta della vibrazione radiale.

In generale per due corpi che costituiscano un sistema isolato, le equazioni del moto dei due nuclei si possono scrivere come

$$\begin{cases} m_1 a_1 = F_{2 \rightarrow 1}, \\ m_2 a_2 = F_{1 \rightarrow 2}. \end{cases} \quad (8)$$

Sommando e sottraendo membro a membro le equazioni (8),

$$\begin{cases} m_1 a_1 + m_2 a_2 = F_{2 \rightarrow 1} + F_{1 \rightarrow 2}, \\ a_2 - a_1 = \frac{F_{1 \rightarrow 2}}{m_2} - \frac{F_{2 \rightarrow 1}}{m_1}. \end{cases}$$

Poiché, per il principio di azione e reazione,

$$F_{2 \rightarrow 1} = -F_{1 \rightarrow 2}, \quad (9)$$

usando la relazione (9) si ottiene

$$\begin{cases} m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0, \\ a_2 - a_1 = F_{1 \rightarrow 2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right). \end{cases}$$

Definiamo la massa ridotta μ attraverso la relazione

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \quad (10)$$

Usando la definizione (10), pertanto

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) a_G = 0, \\ a = \frac{F_{1 \rightarrow 2}}{\mu}. \end{cases}$$

Se le forze d'interazione dipendono solo dalla posizione relativa.

$$\begin{cases} a_G = 0, \\ F_{1 \rightarrow 2}(x) = \mu a. \end{cases} \quad (11)$$

Di conseguenza il passaggio dalle coordinate x_1, x_2 alle coordinate x, x_G , disaccoppia le equazioni del moto.

La prima equazione del sistema (11) esprime il fatto che il centro di massa di un sistema isolato possiede una velocità costante rispetto ad un qualsiasi sistema inerziale in accordo con la legge di conservazione della quantità di moto totale di un sistema isolato.

La seconda equazione dello stesso sistema è formalmente identica a quella di una particella la cui posizione è individuata dalla coordinata x , avente massa μ e soggetta alla forza $F_{1 \rightarrow 2}$.

Nel caso considerato le equazioni (11) si possono scrivere come

$$\begin{cases} a_G = 0, \\ -k(x - x_0) = \mu a \end{cases}$$

Si tratta di una oscillazione armonica con

$$\omega^2 = \frac{k}{\mu},$$

quindi

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

e

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}}.$$

- Per la molecola di idrogeno H_2 ,

$$\frac{1}{\mu_H} = \frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_p} = \frac{2}{m_p},$$

da cui

$$\mu_H = \frac{m_p}{2}.$$

Quindi

$$\nu_H = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k_{pp}}{m_p}}.$$

- Per la molecola idrogeno-deuterio HD ,

$$\frac{1}{\mu_D} = \frac{1}{m_p} + \frac{1}{2m_p} = \frac{3}{2m_p},$$

da cui

$$\mu_D = \frac{2}{3}m_p.$$

Quindi

$$\nu_D = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3k_{pd}}{2m_p}}.$$

Va osservato, tuttavia, che nei due casi considerati l'interazione che determina il legame molecolare è di natura elettromagnetica e dipende dalle distribuzioni di carica, non direttamente dalle masse dei nuclei. Poiché sia il protone sia il deutone hanno carica $+e$, la sostituzione isotopica non modifica, almeno in prima approssimazione, l'energia potenziale di interazione tra i nuclei. Ne consegue che, nell'approssimazione armonica, la costante elastica k può essere assunta uguale per la molecola di idrogeno H_2 e per la molecola HD , cioè

$$k_{pp} = k_{pd} = k$$

Il rapporto tra le due frequenze è quindi

$$\frac{\nu_D}{\nu_H} = \sqrt{\frac{3k}{2}} \sqrt{\frac{1}{2k}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

e pertanto

$$\boxed{\nu_D = \frac{\sqrt{3}}{2} \nu_H}.$$

Inserendo il valore

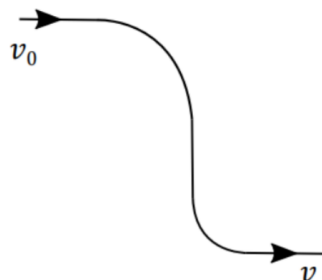
$$\nu_H = 1.32 \times 10^{14} \text{ Hz},$$

si ottiene

$$\nu_D = \frac{\sqrt{3}}{2} \nu_H = \frac{\sqrt{3}}{2} 1.32 \times 10^{14} \text{ Hz} \simeq 1.14 \times 10^{14} \text{ Hz}.$$

Pre-test di ammissione allo stage di Fisica della SNS 2025

PROB. 10 — **CURVE CON ATTRITO** —————



Una perlina di massa m è vincolata a muoversi lungo un filo ricurvo ruvido, in assenza di gravità. Il coefficiente di attrito dinamico tra la perlina e il filo è $\mu = 0.25$. Il filo è piegato in modo tale da formare due archi di circonferenza, rispettivamente di raggi $r_1 = 20$ cm e $r_2 = 15$ cm, i quali sottendono due angoli di 90° come mostrato in figura. Se la velocità con cui la perlina entra nel primo arco è v_0 e quella con cui esce dal secondo arco è v_1 , quando vale il rapporto $\frac{v_1}{v_0}$?

Unità di misura: adimensionale. *Precisione richiesta:* 0.5%.

Sia R il raggio di uno dei due archi e sia $\hat{n}$ il versore diretto verso il centro di curvatura. In assenza di gravità, la componente normale dell'equazione del moto è

$$N = m \frac{v^2}{R}.$$

La forza di attrito dinamico, diretta in verso opposto al moto, ha quindi modulo

$$F_a = \mu N = \mu m \frac{v^2}{R}.$$

Proiettando l'equazione del moto lungo la direzione tangente si ottiene

$$m \frac{dv}{dt} = -F_a = -\mu m \frac{v^2}{R},$$

ossia

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\mu}{R} v^2. \tag{12}$$

Poiché

$$\frac{ds}{dt} = v,$$

si ha

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{dv}{ds},$$

e quindi

$$v \frac{dv}{ds} = -\frac{\mu}{R} v^2.$$

Essendo $v > 0$ durante il moto,

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{\mu}{R} v. \tag{13}$$

Osserviamo che una funzione che soddisfa la relazione (13) è⁴

$$v(s) = Ae^{-\mu s/R}.$$

dove,

$$A = v(0) = v_{\text{in}},$$

cioè la velocità con cui la perlina entra nell'arco. Si ottiene, quindi

$$v(s) = v_{\text{in}} e^{-\mu s/R}.$$

Ricordando che per ciascuno degli archi la posizione angolare rispetto al centro è data da

$$\theta = \frac{s}{R}.$$

si può scrivere

$$v(\theta) = v_{\text{in}} e^{-\mu \theta}.$$

Poiché ciascuno dei due archi sottende un angolo di $\pi/2$, si ha

$$\frac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}} = e^{-\mu \pi/2}.$$

Indicando con v' la velocità nel punto di raccordo tra i due archi,

$$\frac{v'}{v_0} = e^{-\mu \pi/2}, \quad \frac{v_1}{v'} = e^{-\mu \pi/2}.$$

Moltiplicando membro a membro,

$$\frac{v_1}{v_0} = e^{-\mu \pi}.$$

Con $\mu = 0.25$,

$$\frac{v_1}{v_0} = e^{-\pi/4} \simeq 0.456.$$

Si osservi che il risultato è indipendente dai raggi dei due archi: infatti, aumentando il raggio diminuisce la forza normale e quindi l'attrito, ma aumenta nella stessa proporzione la lunghezza dell'arco.

Legge oraria del moto su un singolo arco

Dall'equazione (12) si ottiene

$$\frac{1}{v} = \frac{\mu}{R}t + \frac{1}{v_{\text{in}}},$$

e quindi, si ritrova

$$v(t) = \frac{v_{\text{in}}}{1 + \frac{\mu v_{\text{in}}}{R}t}.$$

La legge oraria lungo l'arco è

$$s(t) = \int_0^t \frac{v_{\text{in}}}{1 + \frac{\mu v_{\text{in}}}{R}t'} dt',$$

⁴Separando le variabili,

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{R} ds \Rightarrow \int_{v_{\text{in}}}^{v_{\text{out}}} \frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{R} \int_0^{\frac{R\pi}{2}} ds \Rightarrow \ln \frac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}} = -\frac{\mu}{R} \frac{R\pi}{2} = -\frac{\mu\pi}{2} \Rightarrow \frac{v_{\text{out}}}{v_{\text{in}}} = e^{-\frac{\mu\pi}{2}},$$

da cui

$$s(t) = \frac{R}{\mu} \ln \left(1 + \frac{\mu v_{\text{in}}}{R} t \right).$$

Poiché

$$1 + \frac{\mu v_{\text{in}}}{R} t = \frac{v_{\text{in}}}{v},$$

si ritrova

$$s = -\frac{R}{\mu} \ln \frac{v}{v_{\text{in}}},$$

e quindi

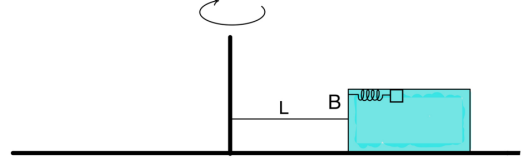
$$\frac{v}{v_{\text{in}}} = e^{-\mu s/R}.$$

P₇ Se il recipiente ruota

Terzo allenamento nazionale - Gara a squadre 2025

P₅ Se il recipiente ruota

In figura è mostrato un recipiente cilindrico chiuso, completamente pieno d'acqua, al cui interno si trova un cubetto di 20 cm^3 di volume, la cui densità media è molto minore di quella dell'acqua. Il cubetto è collegato alla base B del recipiente tramite una molla di costante elastica 5.0 N/m e lunghezza a riposo 15 cm . Il recipiente sta ruotando, da molto tempo, con velocità angolare 0.5 rad/s intorno a un'asta verticale, a cui è collegato tramite una fune lunga 2 m , attaccata alla base B . Quanto vale la lunghezza della molla?



Unità di misura: cm. Precisione richiesta: 0.5%.

Sia ρ_f la densità dell'acqua e ρ_c la densità media del cubetto. Indichiamo con a il lato del cubetto; essendo il suo volume V ,

$$a = V^{1/3}.$$

Poiché il recipiente ruota da molto tempo con velocità angolare costante ω , nel riferimento solidale con il recipiente il fluido e il cubetto sono in quiete. In tale riferimento⁵ è presente la forza centrifuga. Indicando con $\hat{x}$ il versore radiale diretto dall'asse di rotazione verso il recipiente e con $\hat{y}$ il versore verticale diretto verso l'alto, possiamo introdurre il campo di accelerazione efficace

$$\vec{g}_{\text{eff}} = -g\hat{y} + \omega^2 x \hat{x}.$$

Definiamo quindi *peso efficace* di un corpo di massa m la risultante della forza peso e della forza centrifuga:

$$\vec{P}_{\text{eff}} = m\vec{g}_{\text{eff}}.$$

Nella configurazione considerata la posizione del cubetto rispetto all'asse è fissa; di conseguenza, l'accelerazione centrifuga del suo centro di massa è costante nel tempo. La risultante della forza centrifuga sul cubetto è quindi proporzionale alla sua massa, analogamente alla forza peso. La legge di Archimede può pertanto essere estesa al peso efficace: la risultante delle forze di pressione esercitate dal fluido su un corpo immerso è opposta al peso efficace della massa di fluido spostata. Indicando con x_C la distanza del centro del cubetto dall'asse, il peso efficace della massa di fluido spostata è

$$\vec{P}_{\text{eff},f} = \rho_f V (-g\hat{y} + \omega^2 x_C \hat{x}).$$

La spinta di Archimede generalizzata è quindi

$$\vec{S} = -\vec{P}_{\text{eff},f} = \rho_f V g \hat{y} - \rho_f V \omega^2 x_C \hat{x}.$$

La sua componente radiale, dovuta alla rotazione, è pertanto

$$\vec{S}_c = -\rho_f V \omega^2 x_C \hat{x}.$$

Poiché la fune ha lunghezza L , la molla ha lunghezza ℓ e il centro del cubetto dista $a/2$ dalla faccia alla quale è collegata la molla,

$$x_C = L + \ell + \frac{a}{2}.$$

⁵Non agiscono né la forza di Coriolis, essendo il corpo in quiete rispetto al sistema rotante, né la forza inerziale dovuta all'accelerazione angolare del sistema rotante rispetto ad un qualsiasi sistema inerziale, essendo ω costante.

Il peso efficace del cubetto è

$$\vec{P}_{\text{eff},c} = \rho_c V \left(-g \hat{y} + \omega^2 x_C \hat{x} \right),$$

la cui componente radiale è

$$\vec{P}_{\text{eff},c}^{(\text{rad})} = \rho_c V \omega^2 x_C \hat{x}.$$

La forza elastica esercitata dalla molla è

$$\vec{F}_e = -k(\ell - \ell_0) \hat{x}.$$

Proiettando la condizione di equilibrio lungo la direzione radiale si ottiene

$$-k(\ell - \ell_0) + \rho_c V \omega^2 x_C - \rho_f V \omega^2 x_C = 0.$$

Esplicitando la coordinata del centro del cubetto

$$-k(\ell - \ell_0) - (\rho_f - \rho_c) V \omega^2 \left(L + \ell + \frac{a}{2} \right) = 0.$$

Poiché, come indicato nel testo, la densità del cubetto è molto minore di quella dell'acqua,

$$\rho_c \ll \rho_f,$$

possiamo porre

$$\rho_f - \rho_c \simeq \rho_f.$$

Si ottiene pertanto

$$-k(\ell - \ell_0) - \rho_f V \omega^2 \left(L + \ell + \frac{a}{2} \right) = 0.$$

da cui

$$\left(k + \rho_f V \omega^2 \right) \ell = k \ell_0 - \rho_f V \omega^2 \left(L + \frac{a}{2} \right). \quad (14)$$

Si noti come, essendo il primo membro dell'equazione (14) positivo, il moto descritto nel testo sia possibile solo se

$$k \ell_0 > \rho_f V \omega^2 \left(L + \frac{a}{2} \right),$$

o, equivalentemente

$$\omega < \sqrt{\frac{k \ell_0}{\rho_f V \left(L + \frac{a}{2} \right)}} = \omega_{\text{max}}. \quad (15)$$

La relazione (15) individua quindi il massimo valore della velocità angolare compatibile con la configurazione considerata. Con i dati del problema,

$$\omega_{\text{max}} \simeq 4.32 \text{ rad s}^{-1},$$

e pertanto il valore assegnato,

$$\omega = 0.50 \text{ rad s}^{-1},$$

è compatibile con tale configurazione. Nel caso siano soddisfatte tali condizioni, in generale si ha

$$\ell = \frac{k \ell_0 - \rho_f V \omega^2 \left(L + \frac{a}{2} \right)}{k + \rho_f V \omega^2}.$$

Inserendo i dati nella precedente si trova

$$\ell \simeq 14.78 \text{ cm}.$$

La molla risulta quindi leggermente compressa rispetto alla sua lunghezza a riposo, coerentemente con il fatto che la componente radiale della spinta di Archimede efficace è diretta verso l'asse di rotazione.

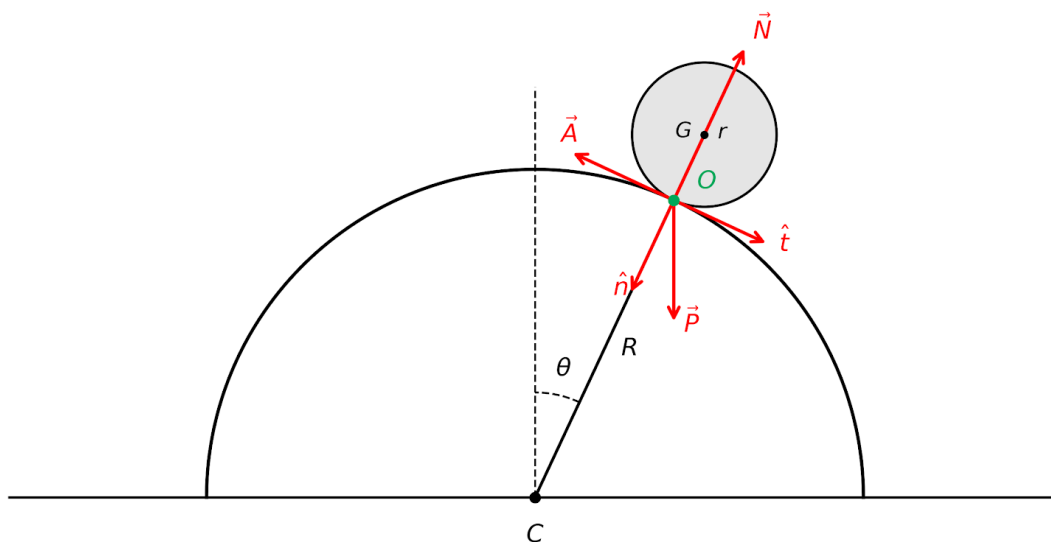
P₈ Discesa con attrito infinito

Secondo allenamento nazionale - Gara a squadre 2025

P₁₀ Discesa con attrito infinito

Nel libro *Come Ti Rovino La Fisica*, gli scienziati del pianeta NANA-SANT inventano uno spray che, se spruzzato su superfici solide, riesce a renderne infinito il coefficiente d'attrito. Una sferetta omogenea di massa 50 g viene rilasciata da ferma dal punto più alto di una ciotola semisferica capovolta, precedentemente spruzzata con lo spray e fissata al pavimento. La sferetta inizia a muoversi sin da subito di moto puramente rotatorio, mantenuto fino a quando si distacca dalla ciotola. Supponendo che l'accelerazione gravitazionale sulla superficie del pianeta sia pari a quella terrestre, quanto vale la forza di attrito agente sulla sferetta immediatamente prima che avvenga il distacco?

Unità di misura: N. Precisione richiesta: 0.5%.



Indichiamo con C il centro della semisfera e con G il centro di massa della sferetta. Introduciamo una terna di assi tale che

- $\hat{\mathbf{t}}$ orientato in senso orario;
- $\hat{\mathbf{n}}$ verso il centro di curvatura;

Inizialmente consideriamo μ finito. Finché il corpo è soggetto ad un moto di puro rotolamento,

Equazione del moto del centro di massa (I equazione cardinale) proiettata lungo $\hat{\mathbf{t}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$

$$\begin{cases} -N + mg \cos \theta = m\omega^2(R + r), \\ -A + mg \sin \theta = m\alpha(R + r). \end{cases} \quad (16)$$

Dove ω e α sono rispettivamente velocità angolare e accelerazione angolare del moto del centro di massa che prima del distacco è circolare.

Conservazione dell'energia

L'unica forza che compie lavoro è la forza peso, che è conservativa; infatti, la reazione normale è perpendicolare alla direzione del moto, mentre l'attrito statico è applicato ad un punto istantaneamente in quiete della sfera.

$$\begin{aligned} mg(R+r) &= mg(R+r) \cos \theta + \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega'^2 \\ \iff mg(R+r)(1 - \cos \theta) &= \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega'^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Dove ω' è la velocità angolare di rotazione della sfera.

Vincolo cinematico sulle velocità angolari

$$\begin{cases} v_G = \omega(R+r), \\ v_G = \omega'r, \end{cases} \implies \omega(R+r) = \omega'r. \quad (18)$$

La prima equazione del sistema (18) fornisce la velocità del centro di massa in quanto soggetta ad un moto circolare (non uniforme) di centro nel centro della semisfera e raggio $R+r$, mentre la seconda esprime la condizione di rotolamento tra i moduli di v_G e ω' .

Forza centripeta in funzione dell'angolo

Utilizzando il vincolo cinematico (18) nell'equazione dell'energia (17), si ha

$$mg(R+r)(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}m\omega^2(R+r)^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2 \left(\frac{R+r}{r}\right)^2 \omega^2 = \frac{7}{10}m\omega^2(R+r)^2,$$

da cui

$$\boxed{m\omega^2(R+r) = \frac{10}{7}mg(1 - \cos \theta)}. \quad (19)$$

N in funzione di θ

Sostituendo la relazione (19) nella prima equazione del sistema (16), si ottiene

$$N = mg \cos \theta - \frac{10}{7}mg + \frac{10}{7}mg \cos \theta = \frac{mg}{7}(-10 + 17 \cos \theta).$$

$$\boxed{N = \frac{mg}{7}(-10 + 17 \cos \theta)}. \quad (20)$$

A in funzione di θ

$$\vec{M}_G = \frac{d\vec{L}_G}{dt} + \vec{v}_G \times m\vec{v}_G = \frac{d\vec{L}_G}{dt}.$$

Scegliendo come polo il centro di massa della sferetta G , invece che il punto di contatto.

$$Ar = I_G\alpha' = \frac{2}{5}mr^2\frac{R+r}{r}\alpha \Rightarrow A = \frac{2}{5}m(R+r)\alpha = \frac{2}{5}(-A + mg \sin \theta) \Rightarrow \frac{7}{5}A = \frac{2}{5}mg \sin \theta,$$

da cui

$$\boxed{A = \frac{2}{7}mg \sin \theta}. \quad (21)$$

A in funzione di θ (derivazione alternativa)

Per $\theta > 0$, derivando rispetto al tempo la relazione (19) per la forza centripeta,

$$m\omega^2(R+r) = \frac{10}{7}mg(1-\cos\theta) \Rightarrow m2\omega\alpha(R+r) = \frac{10}{7}mg\sin\theta \Leftrightarrow \omega m\alpha(R+r) = \frac{5}{7}mg\sin\theta.$$

quindi

$$A = mg\sin\theta - m\alpha(R+r) = mg\sin\theta - \frac{5}{7}mg\sin\theta = \frac{2}{7}mg\sin\theta.$$

Massimo angolo compatibile con il puro rotolamento

Sostituendo le espressioni (21) e (20) nella condizione di puro rotolamento $A \leq \mu N$, si ottiene

$$2\sin\theta \leq \mu(-10 + 17\cos\theta).$$

usando le formule parametriche

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad t = \tan\frac{\theta}{2},$$

da cui

$$17\mu(1-t^2) - 10\mu(1+t^2) - 4t \geq 0 \Leftrightarrow 17\mu - 17\mu t^2 - 10\mu - 10\mu t^2 - 4t \geq 0 \Leftrightarrow -27\mu t^2 - 4t + 7\mu \geq 0,$$

ossia

$$27\mu t^2 + 4t - 7\mu \leq 0.$$

Essendo

$$\Delta = 16 + 4 \cdot 7 \cdot 27\mu^2,$$

si ha

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 7 \cdot 27\mu^2}}{27\mu}.$$

da cui

$$0 \leq t \leq \frac{\sqrt{4 + 7 \cdot 27\mu^2} - 2}{27\mu} = t_{\text{fr}},$$

e quindi

$$0 \leq \theta \leq 2 \arctan\left(\frac{\sqrt{4 + 7 \cdot 27\mu^2} - 2}{27\mu}\right) = \theta_{\text{fr}}.$$

Dove θ_{fr} è il massimo angolo compatibile con il puro rotolamento.

Angolo di distacco θ_d nell'ipotesi che il rotolamento duri fino al distacco

$$N = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_d = \frac{10}{17} \quad \Rightarrow \quad \sin\theta_d = \frac{3\sqrt{21}}{17}.$$

Attrito al distacco A_d nell'ipotesi che il rotolamento duri fino al distacco

$$A_d = \frac{2}{7}mg\sin\theta_d \quad \Rightarrow \quad A_d = \frac{6\sqrt{21}}{119}mg,$$

da cui

$$A(\theta_d) > 0 = \mu N(\theta_d) \quad \Rightarrow \quad \theta_{\text{fr}} < \theta_d.$$

Per ogni μ finito, il puro rotolamento cessa prima che venga raggiunto l'angolo di distacco previsto dalla soluzione di puro rotolamento.

Limite per $\mu \rightarrow \infty$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \theta_{\text{fr}} = 2 \arctan \sqrt{\frac{7}{27}} = \arccos \frac{10}{17} = \theta_d,$$

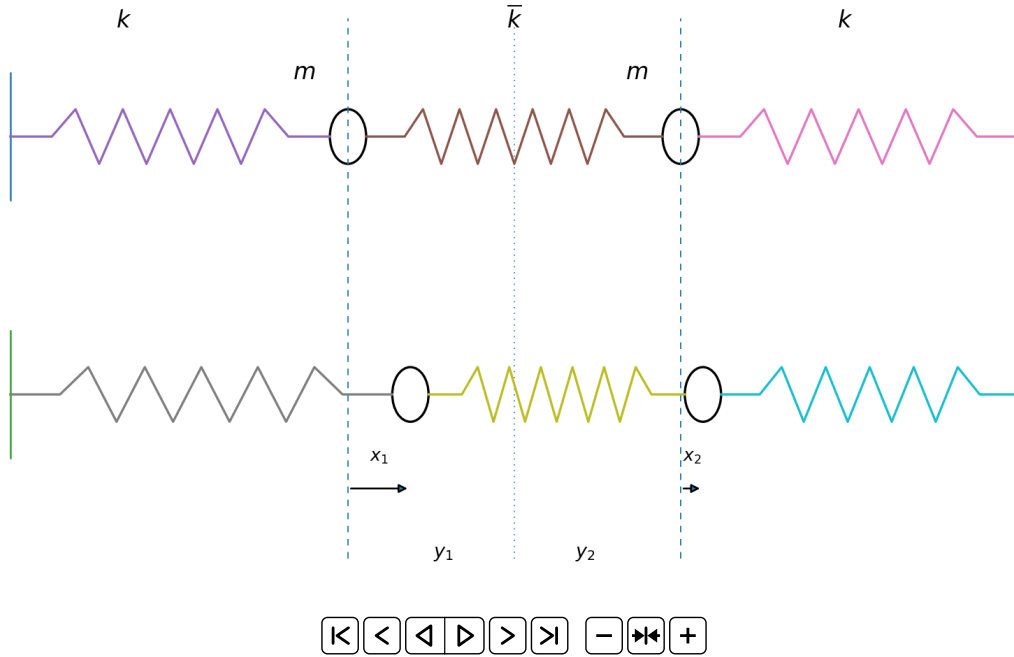
e quindi

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \theta_{\text{fr}} = \theta_d.$$

Pertanto, nel limite $\mu \rightarrow \infty$, il massimo angolo compatibile con il puro rotolamento tende all'angolo di distacco θ_d . Nel modello ideale di coefficiente d'attrito infinito, la soluzione di puro rotolamento è quindi ammissibile per ogni $\theta < \theta_d$. La forza d'attrito immediatamente prima del distacco è pertanto

$$A_d = \lim_{\theta \rightarrow \theta_d^-} A(\theta) = \frac{6\sqrt{21}}{119} mg = 0,1133 \text{ N}.$$

Oscillatori accoppiati



Consideriamo due masse uguali m collegate a due molle esterne di costante elastica k e a una molla di accoppiamento di costante elastica $\bar{k}$, in modo che il moto delle particelle avvenga su di una retta [1, 2, 3, 4]. Su tale retta introduciamo un sistema di ascisse y e indichiamo con y_1, y_2 le posizioni delle due particelle. Siano, inoltre y_{1e}, y_{2e} le posizioni di equilibrio delle due particelle. Definiamo gli spostamenti rispetto alle posizioni di equilibrio

$$x_1 = y_1 - y_{1e}, \quad x_2 = y_2 - y_{2e},$$

cosicch 

$$x_1 - x_2 = y_1 - y_2 - (y_{1e} - y_{2e}).$$

Equazioni del moto

Le forze agenti sulle due masse sono

$$F_1 = -kx_1 - \bar{k}(x_1 - x_2),$$

$$F_2 = -kx_2 - \bar{k}(x_2 - x_1).$$

Pertanto

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(k + \bar{k})x_1 + \bar{k}x_2, \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \bar{k}x_1 - (k + \bar{k})x_2. \end{cases} \quad (22)$$

Si noti come in ciascuna equazione compaiano variabili cinematiche di entrambe le particelle. Detto altrimenti le equazioni sono accoppiate. Sommando e sottraendo le due equazioni del sistema (22) si ottiene

$$\begin{cases} m \frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) = -k(x_1 + x_2), \\ m \frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) = -(k + 2\bar{k})(x_1 - x_2). \end{cases} \quad (23)$$

Le due equazioni del sistema (23) possono essere interpretate, rispettivamente, come l'equazione dello scostamento del centro di massa dalla sua posizione di equilibrio e come l'equazione dello scostamento della coordinata relativa dal suo valore di equilibrio.

Coordinate normali

Introduciamo le coordinate normali

$$\eta_1 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}, \quad \eta_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}. \quad (24)$$

Le trasformazioni inverse sono

$$x_1 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\sqrt{2}}. \quad (25)$$

Si noti come la prima coordinata normale sia proporzionale all'ascissa dello scostamento del centro di massa rispetto alla sua posizione di equilibrio, mentre la seconda sia proporzionale allo scostamento della coordinata relativa rispetto al suo valore di equilibrio. Sostituendo le coordinate normali (24) nelle equazioni (23), le equazioni del moto diventano

$$\begin{cases} \frac{d^2\eta_1}{dt^2} = -\frac{k}{m}\eta_1, \\ \frac{d^2\eta_2}{dt^2} = -\frac{k + 2\bar{k}}{m}\eta_2. \end{cases} \quad (26)$$

Si può quindi affermare che le coordinate normali disaccoppiano le equazioni del moto, che risultano formalmente identiche a quelle di due oscillatori armonici non interagenti, aventi pulsazioni

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \bar{\omega} = \sqrt{\frac{k + 2\bar{k}}{m}}, \quad (27)$$

le soluzioni delle equazioni (26), con le pulsazioni definite dalla (27), sono, come ben noto,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \\ \eta_2 &= A_2 \cos(\bar{\omega} t + \varphi_2). \end{aligned}$$

Soluzione delle equazioni del moto

Applicando le trasformazioni inverse (25), si può scrivere

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\bar{\omega} t + \varphi_2)], \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} [A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) - A_2 \cos(\bar{\omega} t + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Di conseguenza, un qualsiasi moto del sistema può essere pensato come la combinazione lineare di due moti armonici fondamentali, detti modi normali [2],[3], le cui pulsazioni, ω e $\bar{\omega}$, definite dalla (27), sono dette pulsazioni proprie del sistema. Le ampiezze A_1 e A_2 , che dipendono dalle condizioni iniziali, esprimono il “peso” con cui ciascuno dei due modi normali contribuisce al moto del sistema⁶.

⁶La decomposizione del moto nei modi normali costituisce, per un sistema con un numero finito di gradi di libertà, l'analogo della decomposizione di Fourier di un moto in componenti armoniche.

Modi normali di oscillazione

Si definisce modo normale un moto collettivo del sistema nel quale è eccitata una sola coordinata normale, mentre l'altra resta costantemente nulla. Per individuare i due modi normali e stabilire come possano essere realizzati, osserviamo che ciascun modo si ottiene annullando identicamente l'altra coordinata normale.

- Il primo modo normale si realizza ponendo

$$\eta_2(t) \equiv 0.$$

Poiché

$$\eta_2 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}},$$

questa condizione equivale a

$$x_1(t) = x_2(t).$$

Essendo

$$\eta_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

dalle trasformazioni inverse

$$x_1 = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\sqrt{2}},$$

si ottiene

$$x_1(t) = x_2(t) = \frac{A_1}{\sqrt{2}} \cos(\omega t + \varphi_1).$$

Le due masse oscillano quindi in fase con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

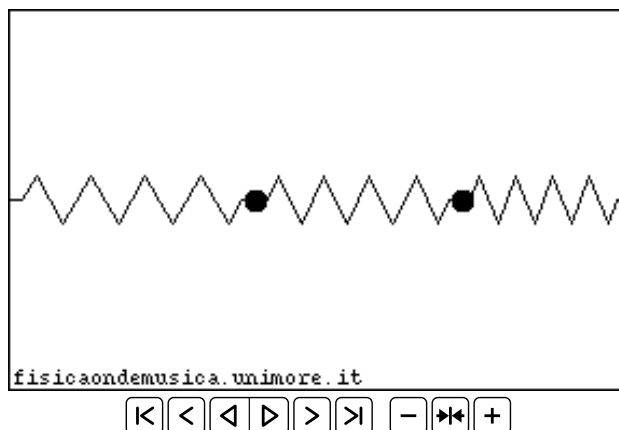
La molla di accoppiamento non viene deformata e non esercita quindi alcuna forza di richiamo. Il centro di massa oscilla con pulsazione ω , mentre il moto relativo è assente. Per realizzare questo modo è necessario scegliere condizioni iniziali tali che

$$\eta_{2,0} = 0, \quad \dot{\eta}_{2,0} = 0,$$

ossia

$$x_{1,0} = x_{2,0}, \quad \dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0}.$$

In questo modo la coordinata η_2 resta identicamente nulla durante tutto il moto e viene eccitato soltanto il primo modo normale.



- Il secondo modo normale si realizza ponendo

$$\eta_1(t) \equiv 0.$$

Poiché

$$\eta_1 = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}},$$

questa condizione equivale a

$$x_1(t) = -x_2(t).$$

Essendo

$$\eta_2(t) = A_2 \cos(\bar{\omega}t + \varphi_2),$$

dalle trasformazioni inverse si ottiene

$$x_1(t) = \frac{A_2}{\sqrt{2}} \cos(\bar{\omega}t + \varphi_2),$$

$$x_2(t) = -\frac{A_2}{\sqrt{2}} \cos(\bar{\omega}t + \varphi_2).$$

Le due masse oscillano quindi in opposizione di fase con pulsazione

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{k + 2\bar{k}}{m}}.$$

La molla di accoppiamento viene deformata e contribuisce alla forza di richiamo. Il centro di massa resta in quiete, mentre è presente un moto relativo oscillatorio con pulsazione $\bar{\omega}$.

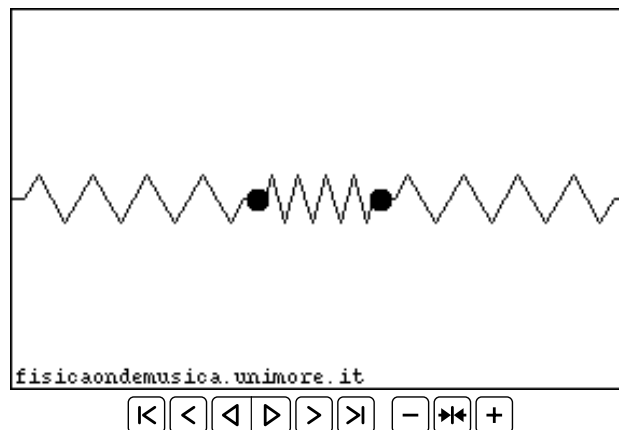
Per realizzare questo modo è necessario scegliere condizioni iniziali tali che

$$\eta_{1,0} = 0, \quad \dot{\eta}_{1,0} = 0,$$

ossia

$$x_{1,0} = -x_{2,0}, \quad \dot{x}_{1,0} = -\dot{x}_{2,0}.$$

In questo modo la coordinata η_1 resta identicamente nulla durante tutto il moto e viene eccitato soltanto il secondo modo normale.



Energia

L'energia meccanica totale è

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}\bar{k}(x_1 - x_2)^2. \quad (28)$$

L'ultimo termine nell'espressione dell'energia (28) è detto energia di interazione ed esprime a livello energetico l'accoppiamento degli oscillatori. Sostituendo le trasformazioni inverse (25) nell'equazione (28), si ottiene

$$E = \frac{1}{2}m \left(\frac{\dot{\eta}_1 + \dot{\eta}_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2}m \left(\frac{\dot{\eta}_1 - \dot{\eta}_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2}k \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2}k \left(\frac{\eta_1 - \eta_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{1}{2}\bar{k} 2\eta_2^2.$$

Da cui

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}k\eta_1^2 + \frac{1}{2}k\eta_2^2 + \bar{k}\eta_2^2,$$

ossia

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\eta}_1^2 + \frac{1}{2}k\eta_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\eta}_2^2 + \frac{1}{2}(k + 2\bar{k})\eta_2^2. \quad (29)$$

Dalla (29), usando le pulsazioni (27), si può scrivere equivalentemente

$$E = \frac{1}{2}m \left(\dot{\eta}_1^2 + \omega^2 \eta_1^2 \right) + \frac{1}{2}m \left(\dot{\eta}_2^2 + \bar{\omega}^2 \eta_2^2 \right).$$

L'energia totale risulta quindi somma delle energie dei due modi normali indipendenti:

$$E = E_{modo1} + E_{modo2},$$

con

$$E_{modo1} = \frac{1}{2}m \left(\dot{\eta}_1^2 + \omega^2 \eta_1^2 \right) = \frac{1}{2}m\omega^2 A_1^2,$$

$$E_{modo2} = \frac{1}{2}m \left(\dot{\eta}_2^2 + \bar{\omega}^2 \eta_2^2 \right) = \frac{1}{2}m\bar{\omega}^2 A_2^2.$$

In altre parole, mentre i due oscillatori accoppiati, interagendo reciprocamente, possono scambiarsi energia, ciò non accade per i modi normali: nel sistema lineare ciascun modo evolve indipendentemente e conserva separatamente la propria energia.

Battimenti

Supponiamo che la costante elastica della molla che fa interagire i due oscillatori sia molto piccola rispetto a quella delle molle esterne, cioè che l'accoppiamento tra gli oscillatori sia debole

$$\bar{k} \ll k.$$

Allora

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{k + 2\bar{k}}{m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 + \frac{2\bar{k}}{k}} = \omega \sqrt{1 + \frac{2\bar{k}}{k}}.$$

Approssimando al primo ordine,

$$\bar{\omega} \simeq \omega \left(1 + \frac{\bar{k}}{k} \right).$$

Pertanto

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\bar{\omega} - \omega}{\omega} \simeq \frac{\bar{k}}{k} \ll 1.$$

Supponiamo ora $a > 0$ e scegliamo le condizioni iniziali per cui entrambi gli oscillatori sono in quiete ed uno di essi spostato di a dalla sua posizione di equilibrio

$$x_{2,0} = 0, \quad \dot{x}_{2,0} = 0,$$

$$x_{1,0} = a, \quad \dot{x}_{1,0} = 0.$$

Usando le definizioni delle coordinate normali (24), si ottiene

$$\eta_1(0) = \eta_2(0) = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad \dot{\eta}_1(0) = \dot{\eta}_2(0) = 0.$$

Con queste condizioni iniziali, le dipendenze dal tempo delle due coordinate normali sono,

$$\eta_1(t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(\omega t), \quad \eta_2(t) = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos(\bar{\omega} t).$$

Usando le trasformazioni inverse (25), si trova

$$x_1(t) = \frac{a}{2} (\cos \omega t + \cos \bar{\omega} t),$$

$$x_2(t) = \frac{a}{2} (\cos \omega t - \cos \bar{\omega} t).$$

Utilizzando le formule di prostaferesi,

$$x_1 = a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega + \bar{\omega}}{2}t\right) = B_1(t) \cos(\Omega t). \quad (30)$$

$$x_2 = a \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega + \bar{\omega}}{2}t\right) = B_2(t) \sin(\Omega t). \quad (31)$$

dove

$$B_1(t) = a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right), \quad B_2(t) = a \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right), \quad \Omega = \frac{\omega + \bar{\omega}}{2}, \quad (32)$$

e con⁷

$$\frac{\Delta\omega}{2} \ll \Omega \quad (33)$$

Le equazioni (30) e (31) mostrano che la legge oraria di ciascuno degli oscillatori è data dal prodotto di due fattori armonici: in virtù della (33), il primo, B_i , di pulsazione $\Delta\omega/2$, varia molto lentamente rispetto al secondo, di pulsazione Ω . Di conseguenza, durante un ciclo dell'oscillazione rapida B_i può essere considerato approssimativamente costante. Si può quindi affermare, con una piccola forzatura terminologica, che ciascun oscillatore è soggetto a un moto armonico di ampiezza periodica $|B_i|$ lentamente variabile. Quando si realizzano le condizioni appena descritte ha luogo il cosiddetto fenomeno dei battimenti [4].

Il periodo dei battimenti, inteso come periodo con cui si ripete l'andamento delle ampiezze $|B_1|$ e $|B_2|$, è

$$T_{\text{batt}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}.$$

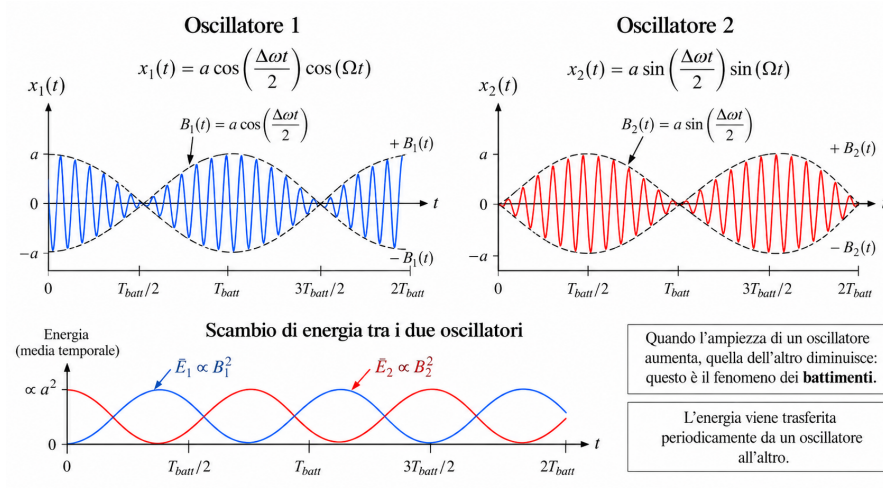
In particolare, dopo un intervallo pari a metà del periodo dei battimenti,

$$\frac{T_{\text{batt}}}{2} = \frac{\pi}{\Delta\omega},$$

l'oscillatore inizialmente fermo raggiunge l'ampiezza massima, mentre quello inizialmente eccitato, nell'approssimazione di accoppiamento debole, si arresta istantaneamente.

7

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \ll 1 \Rightarrow \frac{2\Delta\omega}{\omega + \bar{\omega}} \ll 1 \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{2} < \Delta\omega \ll \frac{\omega + \bar{\omega}}{2} = \Omega.$$



Trasferimenti energetici durante i battimenti

Nell'approssimazione di accoppiamento debole e in presenza di battimenti, la somma delle energie mediata sul periodo delle oscillazioni rapide è costante, ragion per cui si ha un trasferimento periodico di energia tra i due oscillatori [1, p. 40].

Per giustificare una simile affermazione, si consideri il primo oscillatore, la cui legge oraria è data dalla (30), cioè

$$x_1 = B_1 \cos(\Omega t),$$

la sua velocità è, quindi,

$$\dot{x}_1 = -\Omega B_1 \sin(\Omega t) + \dot{B}_1 \cos(\Omega t)$$

Il termine contenente $\dot{B}_1$ può essere trascurato, poiché la sua ampiezza è dell'ordine di $a\Delta\omega/2$, molto minore della scala $a\Omega$ associata al primo termine, essendo $\Delta\omega \ll \Omega$.⁸

$$\dot{x}_1 = -\Omega B_1 \sin(\Omega t) + \dot{B}_1 \cos(\Omega t) \simeq -\Omega B_1 \sin(\Omega t),$$

Di conseguenza, nell'approssimazione di accoppiamento debole, l'energia associata all'accoppiamento può essere trascurata rispetto alle energie dei singoli oscillatori, per cui l'energia meccanica dell'oscillatore 1 è

$$E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}m\Omega^2 B_1^2 \sin^2(\Omega t) + \frac{1}{2}kB_1^2 \cos^2(\Omega t)$$

⁸Infatti,

$$\dot{B}_1(t) = -a \frac{\Delta\omega}{2} \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \Rightarrow |\dot{B}_1(t)| \leq a \frac{\Delta\omega}{2} \ll a\Omega.,$$

Calcolando la media temporale⁹ dell'energia sul periodo dell'oscillazione veloce, si ottiene

$$\begin{aligned}\bar{E}_1 &= \frac{1}{2}m\overline{v_1^2} + \frac{1}{2}k\overline{x_1^2} = \frac{1}{2}m\Omega^2 B_1^2 \overline{\sin^2(\Omega t)} + \frac{1}{2}kB_1^2 \overline{\cos^2(\Omega t)} \\ &= \frac{1}{2}m\Omega^2 B_1^2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2}kB_1^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(m\Omega^2 + k) B_1^2\end{aligned}$$

Si ottiene quindi che

$$\bar{E}_1 \simeq \frac{1}{4}(m\Omega^2 + k) B_1^2. \quad (34)$$

In modo analogo si trova che

$$\bar{E}_2 \simeq \frac{1}{4}(m\Omega^2 + k) B_2^2. \quad (35)$$

Sostituendo le ampiezze (32) nelle energie medie (34) e (35), si ottiene

$$\bar{E}_1 \simeq \frac{1}{4}(m\Omega^2 + k) a^2 \cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right),$$

e

$$\bar{E}_2 \simeq \frac{1}{4}(m\Omega^2 + k) a^2 \sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right).$$

La somma delle energie medie dei due oscillatori è quindi

$$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 \simeq \frac{1}{4}(m\Omega^2 + k) a^2 \left[\cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) + \sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right],$$

ossia

$$\bar{E}_1 + \bar{E}_2 \simeq \frac{1}{4}(m\Omega^2 + k) a^2 = E. \quad (36)$$

La differenza tra le energie è invece

$$\bar{E}_1 - \bar{E}_2 \simeq E \left[\cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) - \sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \right].$$

Utilizzando l'identità

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos(2\theta),$$

si ottiene

$$\bar{E}_1 - \bar{E}_2 \simeq E \cos(\Delta\omega t). \quad (37)$$

Combinando le relazioni (36) e (37),

$$\bar{E}_1 \simeq \frac{E}{2} [1 + \cos(\Delta\omega t)],$$

e

$$\bar{E}_2 \simeq \frac{E}{2} [1 - \cos(\Delta\omega t)].$$

⁹Per media temporale di una funzione f su un intervallo $[t, t+T]$ si intende

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t') dt'.$$

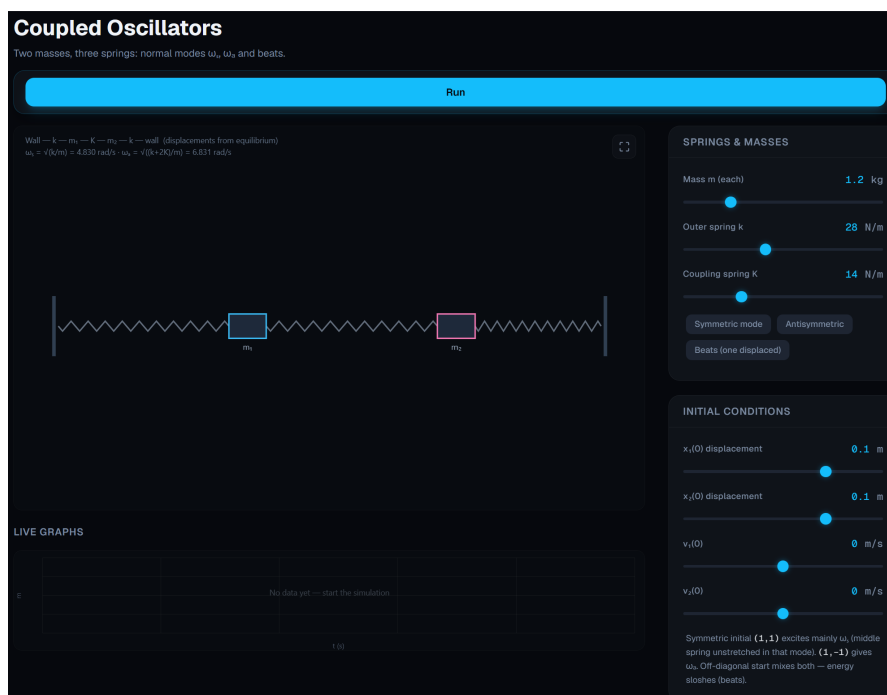
In particolare, la media temporale di una funzione armonica su un periodo è nulla, poiché a ogni valore assunto in un certo istante corrisponde, dopo mezzo periodo, un valore opposto.

$$\overline{\cos(\omega t)} = \overline{\sin(\omega t)} = 0$$

Inoltre, mediando sempre su un periodo,

$$\overline{\cos^2(\omega t)} = \overline{\sin^2(\omega t)} = 1/2$$

Le energie dei due oscillatori variano quindi periodicamente e in opposizione di fase: quando l'energia del primo oscillatore diminuisce, quella del secondo aumenta, e viceversa, mentre la loro somma rimane costante. L'energia viene pertanto trasferita periodicamente da un oscillatore all'altro con pulsazione $\Delta\omega$, cioè con la pulsazione di battimento.



Simulazione interattiva degli oscillatori accoppiati: Physandbox.

Bibliografia

- [1] Frank S. Jr. Crawford. *Onde e oscillazioni*. Vol. 3. La fisica di Berkeley. Bologna: Zanichelli, 1972.

Sitografia

- [2] Fisica, onde Musica. *Oscillatori accoppiati*. Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia. URL: https://fisicaondemusica.unimore.it/Oscillatori_accoppiati.html (visitato il giorno 12/09/2026).
- [3] Egidio Longo. *Oscillatori accoppiati. Appunti per il corso di Meccanica*. Sapienza Università di Roma. 2018–2019. URL: https://elearning.uniroma1.it/pluginfile.php/761484/mod_resource/content/3/OscillatoriAccoppiati.pdf (visitato il giorno 12/09/2026).
- [4] Tom Weideman. *Coupled Oscillators and Normal Modes*. Physics LibreTexts. URL: https://phys.libretexts.org/Courses/University_of_California_Davis/UCD%3A_Physics_9HA__Classical_Mechanics/8%3A_Small_Oscillations/8.4%3A_Coupled_Oscillators_and_Normal_Modes (visitato il giorno 12/09/2026).