

UNIVERSITÀ DEL SALENTO

Corso di Laurea in Matematica

APPUNTI DI GEOMETRIA II

GIOVANNI CALVARUSO

DISCLAIMER: Queste note sono realizzate ad esclusivo uso interno per il corso di Geometria II del Corso di Laurea in Matematica dell'Università del Salento. Come tali, non hanno alcuna pretesa di completezza, e sono da intendersi come un puro supporto al corso stesso, **che non può in alcun modo sostituirsi all'apprendimento fornito dalle lezioni.**

L'Autore ringrazia Alessandro Montinaro e Stefano Pascali per avergli messo a disposizione il proprio materiale didattico relativo rispettivamente ai Capitoli 1)-4) e 6).

PROGRAMMA DEL CORSO:

ALGEBRA LINEARE:

- 1) Forme bilineari simmetriche
- 2) Spazi euclidei
- 3) Endomorfismi simmetrici
- 4) isometrie, trasformazioni ortogonali, movimenti

GEOMETRIA ANALITICA:

- 5) Coniche
- 6) Curve algebriche piane

BIBLIOGRAFIA ED APPROFONDIMENTI:

- G. CALVARUSO, sezione “Materiale Didattico” del sito web:
<http://www.dmf.unisalento.it/~calvaruso/Homepage/>
- A. SANINI, Lezioni di Geometria, ed. Levrotto e Bella, Torino.
- A. SANINI, Esercizi di Geometria, ed. Levrotto e Bella, Torino.
- G. DE CECCO e R. VITOLO, Note di Geometria e Algebra (disp. in Biblioteca).
- G. CALVARUSO e R. VITOLO, Esercizi di Geometria ed Algebra Lineare (disp. in Biblioteca).
- R. MARINOSCI, Complementi di Geometria e Algebra (Coniche e quadriche) (disp. online).
- A. MONTINARO, Appunti del corso di Geometria II (disp. online).
- S. PASCALI, Note di Geometria III (disp. online su “Fiorini Notes”).

Indice

1	Forme bilineari simmetriche	6
1.1	Forme Bilineari	6
1.2	Forme Bilineari Simmetriche e Forme Quadratiche	12
1.3	Duale di uno spazio vettoriale. Il Teorema di Rappresentazione di Riesz	16
1.4	Diagonalizzazione delle forme quadratiche	22
2	Spazi Vettoriali Euclidei	30
2.1	Definizione e relative proprietà	30
2.2	Norma di uno spazio euclideo	31
2.3	Basi ortonormali	33
3	Endomorfismi Simmetrici	39
3.1	Applicazione aggiunta	39
3.2	Endomorfismi simmetrici o autoaggiunti	41
3.3	Autovalori di un endomorfismo simmetrico	42
4	Isometrie	47
4.1	Isometrie. Spazi euclidei isometrici.	47
4.2	Trasformazioni ortogonali	50
4.2.1	Trasformazioni ortogonali di ordine 2	58
4.2.2	Trasformazioni ortogonali di ordine 3	61
4.3	Movimenti	64
5	Coniche	68
5.1	Il piano euclideo ampliato e complessificato	68
5.1.1	Complessificazione del piano euclideo ampliato.	71
5.1.2	Trasformazioni affini, metriche e proiettive	73
5.2	Definizione e classificazione proiettiva	75
5.3	Posizioni di una retta rispetto ad una conica	77
5.4	Polarità definita da una conica	79
5.5	Centro e diametri di una conica	82

5.6	Assi di una conica	84
5.7	Equazioni canoniche	86
	5.7.1 Il cambiamento di coordinate	87
	5.7.2 Il metodo degli invarianti	88
5.8	Fuochi ed eccentricità di una conica	93
5.9	Studio di una conica	96
6	Curve Algebriche Piane	97
6.1	Definizione.	97
6.2	Riducibilità di una \mathcal{C}^n	99
	6.2.1 Coefficienti essenziali dell'equazione di una \mathcal{C}^n	102
6.3	Significato geometrico dell'ordine di una \mathcal{C}^n	103
6.4	Punti semplici e punti multipli di una \mathcal{C}^n	105
	6.4.1 Uso di coordinate omogenee	109
	6.4.2 Classificazione dei punti semplici	111
	6.4.3 Punti multipli	114
6.5	Studio di una \mathcal{C}^n in O, X_∞, Y_∞	115
6.6	Parabole osculatrici	117
6.7	Studio di un punto cuspidale	120
6.8	Genere di una \mathcal{C}^n e curve razionali	122
6.9	Studio di una curva algebrica	124

Capitolo 1

Forme bilineari simmetriche

In questo capitolo vengono analizzate le proprietà fondamentali delle forme bilineari su spazi vettoriali, con particolare riguardo a quelle simmetriche.

1.1 Forme Bilineari

Definizione 1.1.1 Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} ¹. Un'applicazione

$$\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K}$$

si dice **forma bilineare** su \mathbf{V} se gode delle seguenti proprietà:

1. $\varphi(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = \varphi(\vec{x}_1, \vec{y}) + \varphi(\vec{x}_2, \vec{y})$ per ogni $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in \mathbf{V}$,
2. $\varphi(\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \varphi(\vec{x}, \vec{y}_1) + \varphi(\vec{x}, \vec{y}_2)$ per ogni $\vec{x}, \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathbf{V}$,
3. $\varphi(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$.

La forma bilineare φ si dice

- **simmetrica** se $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\vec{y}, \vec{x})$ per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$,
- **antisimmetrica** se $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = -\varphi(\vec{y}, \vec{x})$ per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$.

Proposizione 1.1.2 φ è antisimmetrica se e solo se $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ per ogni $\vec{x} \in \mathbf{V}$.

DIM. Se φ è antisimmetrica, per $\vec{y} = \vec{x}$, si ha $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = -\varphi(\vec{x}, \vec{x})$ e quindi (essendo il campo \mathbb{K} di caratteristica $\neq 2$) $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 0$. Viceversa, per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$ risulta

$$0 = \varphi(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}, \vec{x}) + \varphi(\vec{x}, \vec{y}) + \varphi(\vec{y}, \vec{x}) + \varphi(\vec{y}, \vec{y}) = \varphi(\vec{x}, \vec{y}) + \varphi(\vec{y}, \vec{x})$$

da cui segue $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = -\varphi(\vec{y}, \vec{x})$. \square

¹In tutte queste note, quando si considera uno spazio vettoriale V su di un campo \mathbb{K} , si sottintende sempre che il campo stesso non sia di caratteristica 2, ossia, non isomorfo a $\{0, 1\}$, per il quale diversi risultati (come la Prop. 1.2 o l'identità di polarizzazione) non valgono.

Esempio 1.1.3 L'applicazione $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$ è banalmente una forma bilineare, detta **forma bilineare nulla**. Essa è l'unica ad essere sia simmetrica che antisimmetrica.

Esempio 1.1.4 Siano $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\longmapsto X^t A Y = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j, \end{aligned}$$

dove X e Y sono i vettori colonna delle componenti di \vec{x} e \vec{y} rispetto alla base canonica di \mathbb{K}^n . Allora φ è una forma bilineare. Infatti, siano $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{y} \in \mathbf{V}$. Allora,

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) &= (X_1 + X_2)^t A Y = (X_1^t + X_2^t) A Y = X_1^t A Y + X_2^t A Y \\ &= \varphi(\vec{x}_1, \vec{y}) + \varphi(\vec{x}_2, \vec{y}). \end{aligned}$$

In modo analogo si prova che $\varphi(\vec{x}, \vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \varphi(\vec{x}, \vec{y}_1) + \varphi(\vec{x}, \vec{y}_2)$. Infine, siano $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, allora

$$\varphi(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = (\lambda X)^t A Y = \lambda X^t A Y = \lambda \varphi(\vec{x}, \vec{y})$$

e analogamente $\varphi(\vec{x}, \lambda \vec{y}) = \lambda \varphi(\vec{x}, \vec{y})$.

Si noti che se $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ è la base canonica di \mathbb{K}^n , posto $\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = a_{ij}$ per ogni $i = 1, \dots, n$, è facile vedere che

$$\varphi \text{ è simmetrica} \iff A \text{ è simmetrica}$$

$$\varphi \text{ è antisimmetrica} \iff A \text{ è antisimmetrica}$$

Infine, se $A = I_n$ è la matrice unità di ordine n , si ottiene

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}_1 \vec{y}_1 + \vec{x}_2 \vec{y}_2 + \dots + \vec{x}_n \vec{y}_n,$$

detta **forma bilineare standard** su \mathbb{K}^n .

Esempio 1.1.5 La forma bilineare

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = X^t J_k Y = x_1 y_{k+1} + \dots + x_k y_n - x_{k+1} y_1 - \dots - x_n y_k,$$

dove

$$J_k = \begin{pmatrix} 0_k & I_k \\ -I_k & 0_k \end{pmatrix},$$

è detta **forma alternante standard**.

Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} . Poniamo

1. $\mathcal{B}(\mathbf{V}) = \{\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K} \mid \varphi \text{ è una forma bilineare}\}$;
2. $\mathcal{B}_s(\mathbf{V}) = \{\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K} \mid \varphi \text{ è una forma bilineare simmetrica}\}$;
3. $\mathcal{B}_a(\mathbf{V}) = \{\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{K} \mid \varphi \text{ è una forma bilineare antisimmetrica}\}$.

Proposizione 1.1.6 *Valgono i seguenti fatti:*

i. $\mathcal{B}(\mathbf{V})$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} rispetto alle seguenti operazioni:

$$(a) (\varphi_1 + \varphi_2)(\vec{x}, \vec{y}) := \varphi_1(\vec{x}, \vec{y}) + \varphi_2(\vec{x}, \vec{y}) \text{ per ogni } \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{B}(\mathbf{V});$$

$$(b) (\lambda\varphi)(\vec{x}, \vec{y}) := \lambda\varphi(\vec{x}, \vec{y}) \text{ per ogni } \lambda \in \mathbb{K} \text{ e } \varphi \in \mathcal{B}(\mathbf{V});$$

ii. $\mathcal{B}_s(\mathbf{V})$ e $\mathcal{B}_a(\mathbf{V})$ sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{B}(\mathbf{V})$;

iii. La somma di $\mathcal{B}_s(\mathbf{V})$ e $\mathcal{B}_a(\mathbf{V})$ è una somma diretta.

DIM. I punti (i) e (ii) sono semplici verifiche. Per il punto (iii), sia $\varphi \in \mathcal{B}_a(\mathbf{V}) \cap \mathcal{B}_s(\mathbf{V})$. Allora, $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\vec{y}, \vec{x}) = -\varphi(\vec{y}, \vec{x})$, e quindi $\varphi = 0$. \square

Osservazione 1.1.7 *Siano $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbf{V}_n)$ e $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ una base di \mathbf{V}_n . Se $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$ e $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + \dots + y_n\vec{e}_n$, dalla bilinearità di φ segue che*

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j).$$

Quindi, φ è univocamente determinata dai valori che essa assume su tutte le coppie di vettori della base B .

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice di ordine n a coefficienti in \mathbb{K} , dove abbiamo posto $a_{ij} = \varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$. Allora,

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j = X^t A Y$$

dove X e Y sono i vettori delle componenti di \vec{x} e \vec{y} rispetto alla base B . Quindi φ è univocamente determinata dalla matrice A .

Definizione 1.1.8 *La matrice A è detta **matrice associata** a φ rispetto alla base B e la si denota con $M_B(\varphi)$.*

Lemma 1.1.9 *Siano \mathbf{V}_n uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} , $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ una base e $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbf{V}_n)$. Allora,*

1. $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$ se e solo se $M_B(\varphi)$ è simmetrica;

2. $\varphi \in \mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n)$ se e solo se $M_B(\varphi)$ è antisimmetrica.

DIM. $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$ se e solo se

$$a_{ij} = \varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \varphi(\vec{e}_j, \vec{e}_i) = a_{ji}$$

per ogni $i, j = 1, \dots, n$, quindi se e solo se A è una matrice simmetrica.

$\varphi \in \mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n)$ se e solo se

$$a_{ij} = \varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = -\varphi(\vec{e}_j, \vec{e}_i) = -a_{ji}$$

per ogni $i, j = 1, \dots, n$, quindi la matrice A è antisimmetrica. \square

Esercizio 1.1.10 Verificare se le seguenti applicazioni sono forme bilineari. In tal caso, determinarne la matrice associata rispetto alla base canonica del corrispondente spazio vettoriale.

$$(1) \rho : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad ((x, y), (x', y')) \mapsto xx' - 2(x' + y')y;$$

$$(2) \rho : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad ((x, y), (x', y')) \mapsto X^t Y Y^t X;$$

$$(3) \rho : \mathbb{R}^{2,2} \times \mathbb{R}^{2,2} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \left(\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{pmatrix} \right) \mapsto xx' + zy' - tt';$$

$$(4) \rho : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad ((x, y), (x', y')) \mapsto x^2 x' + y(y')^2.$$

Siano $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{n,n}$ lo spazio vettoriale delle matrici di ordine n a coefficienti nel campo \mathbb{K} , $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ il sottospazio di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ delle matrici simmetriche di ordine n e $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ il sottospazio di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ delle matrici antisimmetriche di ordine n .

Teorema 1.1.11 Siano \mathbf{V}_n uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} e $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ una base, allora:

$$\begin{aligned} \Psi & : \mathcal{B}(\mathbf{V}_n) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), & \varphi & \longmapsto M_B(\varphi) \\ \Psi|_{\mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)} & : \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n) \longrightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{K}), & \varphi & \longmapsto M_B(\varphi) \\ \Psi|_{\mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n)} & : \mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n) \longrightarrow \mathcal{A}_n(\mathbb{K}), & \varphi & \longmapsto M_B(\varphi) \end{aligned}$$

sono isomorfismi di spazi vettoriali.

DIM. Segue dalla definizione della matrice $M_B(\varphi)$ che Ψ è un'applicazione iniettiva.

Siano ora $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$ e $\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + \dots + y_n \vec{e}_n$. Sia $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i y_j = X^t A Y$, dove X e Y rappresentano i vettori colonna delle componenti di \vec{x} e \vec{y} rispetto alla base B . Allora $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbf{V}_n)$ è l'unica forma bilineare tale che $\Psi(\varphi) = M_B(\varphi) = A$ per l'Osservazione 1.1.7. Pertanto Ψ è

bigettiva.

Infine, siano $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{B}(\mathbf{V}_n)$, $A_1 = M_B(\varphi_1)$ e $A_2 = M_B(\varphi_2)$. Allora

$$\begin{aligned} (\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2)(\vec{x}, \vec{y}) &= \lambda\varphi_1(\vec{x}, \vec{y}) + \mu\varphi_2(\vec{x}, \vec{y}) = \lambda X^t A_1 Y + \mu X^t A_2 Y \\ &= X^t (\lambda A_1) Y + X^t (\mu A_2) Y = X^t (\lambda A_1 + \mu A_2) Y \end{aligned}$$

e quindi $M_B(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = \lambda M_B(\varphi_1) + \mu M_B(\varphi_2)$, ossia,

$$\Psi(\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2) = \lambda\Psi(\varphi_1) + \mu\Psi(\varphi_2).$$

Pertanto, Ψ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Infine, $\Psi|_{\mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)}$ e $\Psi|_{\mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n)}$ sono isomorfismi di spazi vettoriali poiché Ψ è un isomorfismo e vale il Lemma 1.1.9. \square

Teorema 1.1.12

1. $\dim \mathcal{B}(\mathbf{V}_n) = n^2$, $\dim \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n) = \frac{n(n+1)}{2}$ e $\dim \mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n) = \frac{n(n-1)}{2}$;
2. $\mathcal{B}(\mathbf{V}_n) = \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n) \oplus \mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n)$.

DIM. L'asserto 1. segue dal Teorema 1.1.11, in quanto $\mathcal{B}(\mathbf{V}_n) \cong \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n) \cong \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ e $\mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n) \cong \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

L'asserto 2. segue dal fatto che

$$\dim \mathcal{B}(\mathbf{V}_n) = n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \dim \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n) + \dim \mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n)$$

e che la somma di $\mathcal{B}_s(\mathbf{V})$ e $\mathcal{B}_a(\mathbf{V})$ è diretta per la Proposizione 1.1.6. \square

Come conseguenza del punto 2. del precedente Teorema, ogni forma bilineare φ su \mathbf{V}_n è somma di un'unica forma bilineare simmetrica φ_s e di un'unica forma bilineare antisimmetrica φ_a , il che motiva la particolare attenzione che viene dedicata a tali speciali forme bilineari. Inoltre, si osservi che se B è una fissata base di \mathbf{V}_n , allora

$$\begin{cases} M_B(\varphi_s) = \frac{1}{2} (M_B(\varphi) + M_B(\varphi)^t), \\ M_B(\varphi_a) = \frac{1}{2} (M_B(\varphi) - M_B(\varphi)^t). \end{cases}$$

Definizione 1.1.13 *Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Allora A e B si dicono **congruenti** se e solo se esiste $P \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che $B = P^t A P$.*

Si osservi che:

1. Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sono congruenti, allora $rg(A) = rg(B)$ (segue, per esempio, dal Teorema del rango per applicazioni lineari tra spazi vettoriali).

2. La congruenza è una relazione di equivalenza su $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposizione 1.1.14 *Sia $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbf{V}_n)$ e siano B_1, B_2 due basi di \mathbf{V}_n . Allora $M_{B_1}(\varphi)$ e $M_{B_2}(\varphi)$ sono congruenti.*

DIM. Siano $B_1 = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, $B_2 = \{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\}$ due basi di \mathbf{V}_n e $P = (p_{ij}) \in GL(n, \mathbb{K})$ la matrice di passaggio dalla base B_2 alla base B_1 ($\vec{e}_j = \sum_{h=1}^n p_{hj} \vec{e}'_h$).

Se $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$, allora $X' = PX$ e $Y' = PY$, dove X e X' sono i vettori colonna delle componenti di \vec{x} rispetto alle basi B_1 e B_2 , Y e Y' sono i vettori colonna delle componenti di \vec{y} rispetto alle basi B_1 e B_2 . Se $A = M_{B_1}(\varphi)$ e $A' = M_{B_2}(\varphi)$, allora

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = (X')^t A' Y' = (PX)^t A' (PY) = X^t (P^t A' P) Y$$

e quindi $A = P^t A' P$. Pertanto $M_{B_1}(\varphi)$ e $M_{B_2}(\varphi)$ sono congruenti. \square

Esempio 1.1.15 *La forma bilineare simmetrica su \mathbb{R}^3 definita da*

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + x_1 y_3 + x_3 y_1$$

ha associata rispetto alla base canonica $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia ora $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ un'altra base di \mathbb{R}^3 con $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 1)$, $\vec{v}_3 = (0, 1, 1)$. La matrice simmetrica associata a φ rispetto tale base è:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le matrici A e B sono congruenti. infatti, $B = P^t A P$, dove

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

è la matrice che rappresenta il cambiamento di base.

Definizione 1.1.16 *Data $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbf{V}_n)$, si definisce **rango di** φ il numero $rg(\varphi) = rg(M_B(\varphi))$, dove B è una qualsiasi base di \mathbf{V}_n .*

Si osservi che la definizione è ben posta, poiché se B_1 e B_2 sono due basi distinte di \mathbf{V}_n , allora $M_{B_1}(\varphi)$ e $M_{B_2}(\varphi)$ sono congruenti per la Proposizione 1.1.14 e quindi hanno lo stesso rango.

1.2 Forme Bilineari Simmetriche e Forme Quadratiche

Definizione 1.2.1 Siano $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V})$ e $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$. I vettori \vec{x} e \vec{y} sono **ortogonali** (rispetto a φ) se e solo se $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 0$. In tal caso scriveremo $\vec{x} \perp \vec{y}$. Un vettore $\vec{x} \in \mathbf{V}$ si dice **isotropo** se e solo se $\vec{x} \perp \vec{x}$.

Esempio 1.2.2 Il vettore $\vec{x} = (0, 0, 1)$ è isotropo per la forma bilineare simmetrica dell'Esempio 1.1.15.

Definizione 1.2.3 Siano $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$ e $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$. Si definisce **ortogonale di S** l'insieme

$$\mathbf{S}^\perp = \{\vec{y} \in \mathbf{V} : \vec{x} \perp \vec{y} \text{ per ogni } \vec{x} \in \mathbf{S}\}.$$

Proposizione 1.2.4 \mathbf{S}^\perp è un sottospazio vettoriale di \mathbf{V} .

DIM. Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e $\vec{u}, \vec{w} \in \mathbf{S}^\perp$. Allora, per ogni $\vec{x} \in \mathbf{S}$, risulta:

$$\varphi(\vec{x}, \lambda\vec{u} + \mu\vec{w}) = \varphi(\vec{x}, \lambda\vec{u}) + \varphi(\vec{x}, \mu\vec{w}) = \lambda\varphi(\vec{x}, \vec{u}) + \mu\varphi(\vec{x}, \vec{w}) = 0.$$

Pertanto, $\lambda\vec{u} + \mu\vec{w} \in \mathbf{S}^\perp$. \square

Definizione 1.2.5 Il sottospazio \mathbf{V}^\perp è detto **nucleo** di φ , e si denota con $\ker(\varphi)$. Indicheremo con

$$\mathcal{I}_\varphi = \{\vec{x} \in \mathbf{V} : \varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 0\}$$

l'insieme dei vettori isotropi di φ (detto anche **cono di luce**.)

La seguente proposizione è di immediata verifica.

Proposizione 1.2.6 Per ogni $\varphi \in \mathcal{B}(\mathbf{V})$,

$$\ker(\varphi) \subset \mathcal{I}_\varphi.$$

Inoltre, \mathcal{I}_φ non è in generale un sottospazio vettoriale (non essendo chiuso rispetto alla somma). Tuttavia, \mathcal{I}_φ è un **cono**, in quanto

$$\text{se } \vec{x} \in \mathcal{I}_\varphi \text{ e } \lambda \in \mathbb{K}, \text{ allora } \lambda\vec{x} \in \mathcal{I}_\varphi.$$

Definizione 1.2.7 Un sottospazio \mathbf{U} di \mathbf{V} si dice

- **singolare** se $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^\perp \neq \{\mathbf{0}\}$;
- **totalmente singolare** se $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{U}^\perp$.

Due sottospazi \mathbf{U} e \mathbf{W} si dicono **ortogonali** se $\mathbf{U} \subset \mathbf{W}^\perp$. Dalla simmetria di φ segue che:

$$\mathbf{U} \subset \mathbf{W}^\perp \iff \mathbf{W} \subset \mathbf{U}^\perp$$

Se \mathbf{U} e \mathbf{W} sono ortogonali e uno è supplementare dell'altro, allora scriveremo

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} \perp \mathbf{W}.$$

Lemma 1.2.8 *Siano $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V})$, \mathbf{U} e \mathbf{W} sottospazi di \mathbf{V} . Se \mathbf{W} è finitamente generato, allora \mathbf{U} è ortogonale a \mathbf{W} se e solo se \mathbf{U} è ortogonale ai vettori di una base (o di un sistema di generatori) $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ di \mathbf{W} .*

DIM. Sia $\vec{u} \in \mathbf{U}$.

Ovviamente, se \mathbf{U} è ortogonale a \mathbf{W} , allora $\varphi(\vec{u}, \vec{e}_i) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, k$.

Viceversa, sia $\vec{w} \in \mathbf{W}$ un arbitrario vettore. Essendo $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ una base (o un sistema di generatori) di \mathbf{W} , si ha $\vec{w} = \sum_{i=1}^k w_i \vec{e}_i$, per cui

$$\varphi(\vec{u}, \vec{w}) = \varphi\left(\vec{u}, \sum_{i=1}^k w_i \vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^k w_i \varphi(\vec{u}, \vec{e}_i).$$

Pertanto, se $\varphi(\vec{u}, \vec{e}_i) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, k$, allora $\varphi(\vec{u}, \vec{w}) = 0$ quale che sia \vec{w} , e quindi $\vec{u} \in \mathbf{W}^\perp$. \square

Teorema 1.2.9 *Se $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$, allora $\mathbf{V}_n = \ker(\varphi) \perp \mathbf{S}$, dove \mathbf{S} è un sottospazio non singolare di \mathbf{V}_n .*

DIM. Sia \mathbf{S} un qualsiasi sottospazio supplementare di $\ker(\varphi)$ in \mathbf{V}_n . Allora $\mathbf{V}_n = \ker(\varphi) \oplus \mathbf{S}$. Poiché tutti i vettori di $\ker(\varphi)$ sono ortogonali a tutti i vettori di \mathbf{V}_n , vale che $\mathbf{V}_n = \ker(\varphi) \perp \mathbf{S}$.

Ora proviamo che \mathbf{S} è non singolare. Sia $\vec{x} \in \mathbf{S} \cap \mathbf{S}^\perp$, sicché $\vec{x} \perp \vec{y}$ per ogni $\vec{y} \in \mathbf{S}$. Per ogni $\vec{w} \in \mathbf{V}_n = \ker(\varphi) \oplus \mathbf{S}$ esistono $\vec{k} \in \ker(\varphi)$ e $\vec{s} \in \mathbf{S}$, per cui $\vec{w} = \vec{k} + \vec{s}$. Ma allora

$$\varphi(\vec{x}, \vec{w}) = \varphi(\vec{x}, \vec{k}) + \varphi(\vec{x}, \vec{s}) = 0.$$

Pertanto, $\vec{x} \in \ker(\varphi) \cap \mathbf{S}$ e quindi $\vec{x} = \vec{0}$, essendo \mathbf{S} un supplementare di $\ker(\varphi)$. \square

Teorema 1.2.10 *Per ogni $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$: $rg(\varphi) = n - \dim \ker(\varphi)$.*

DIM. Siano $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ una fissata base di \mathbf{V}_n e $A = M_B(\varphi)$. Sia $f \in \text{End}(\mathbf{V})$ tale che $A = M_B(f)$. Proviamo che $\ker(\varphi) = \ker(f)$. Per ogni vettore \vec{x} denotiamo con X il vettore colonna delle componenti di \vec{x} rispetto a B . In particolare, E_i denoterà il vettore colonna delle componenti di \vec{e}_i rispetto alla

base B (quindi, E_i ha componenti tutte nulle tranne la i -esima, che è uguale a 1). Allora, per il Lemma 1.2.8 avremo:

$$\begin{aligned} \vec{y} \in \ker(f) &\iff AY = 0 \iff I_n AY = 0 \\ &\iff E_i^t AY = 0 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n \iff X^t AY = 0 \text{ per ogni } X \\ &\iff \varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \text{ per ogni } \vec{x} \iff \vec{y} \in \ker(\varphi). \end{aligned}$$

e quindi $\ker(f) = \ker(\varphi)$. Applicando il Teorema del rango, concludiamo che $rg(\varphi) = rg(A) = rg(f) = \dim \mathbf{V}_n - \dim \mathbf{V}_n^\perp$. \square

Definizione 1.2.11 $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V})$ si dice **non degenere** se

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \text{ per ogni } \vec{y} \in \mathbf{V} \implies \vec{x} = \vec{0}.$$

La seguente caratterizzazione è immediata conseguenza del Teorema precedente.

Corollario 1.2.12 $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$ è degenere se e solo se $\ker(\varphi) \neq \{\vec{0}\}$ (equivalentemente, se $rg(\varphi) \neq n$).

Esempio 1.2.13 Consideriamo la forma bilineare simmetrica su \mathbb{R}^3 definita da:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = -x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + 2x_3y_2 + 2x_2y_3 + x_3y_3.$$

Tale forma bilineare è degenere. Infatti, sia

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice associata a φ rispetto alla base canonica B . Risulta che $rg(A) = 2$. Inoltre, sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ tale che $A = M_B(f)$. Determiniamo $\ker(\varphi) = \ker(f)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui troviamo $\ker(\varphi) = \ker(f) = L(1, 1, -2)$. Infatti, il vettore $\vec{x} = \lambda(1, 1, -2)$ appartiene a $\ker(f)$, e quindi

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^3,$$

cioè $\vec{x} \in \ker(\varphi)$. D'altra parte, $rg(\varphi) = 2$ e quindi $\ker(\varphi) = \ker(f) = L(1, 1, -2)$ (si veda la dimostrazione del Teorema 1.2.10).

Definizione 1.2.14 Sia $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V})$. Si chiama **forma quadratica associata** a φ , l'applicazione

$$\begin{aligned} Q : V &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \vec{x} &\longmapsto \varphi(\vec{x}, \vec{x}). \end{aligned}$$

Proposizione 1.2.15 Se Q è la forma quadratica associata a φ , allora, per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$:

1. $Q(\lambda\vec{x}) = \lambda^2\vec{x}$;
2. $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2} \{Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x}) - Q(\vec{y})\}$.

DIM. L'asserto 1. è banalmente vero per la bilinearità di φ . Ora, essendo φ bilineare e simmetrica, si ha

$$Q(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}) = Q(\vec{x}) + Q(\vec{y}) + 2\varphi(\vec{x}, \vec{y}),$$

da cui l'asserto 2. segue banalmente (tenendo conto del fatto che \mathbb{K} ha caratteristica diversa da 2). \square

La formula 2. della Proposizione 1.2.15 è detta **formula di polarizzazione**, e φ è detta **forma polare** di Q . Dalla precedente proposizione si evince la seguente

Proposizione 1.2.16 C'è una corrispondenza biunivoca tra le forme bilineari simmetriche e le forme quadratiche di uno spazio vettoriale qualsiasi. Infatti, ogni forma bilineare definisce la corrispondente forma quadratica. Viceversa, ogni forma quadratica è la forma polare di un'unica forma bilineare simmetrica.

Sia $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ una base di \mathbf{V}_n e sia $A = M_B(\varphi)$ con $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$. Siano Q la forma quadratica associata a φ e $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n$ il generico vettore di \mathbf{V}_n . Allora:

$$Q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = X^t A X.$$

Quindi, anche Q viene individuata in modo univoco da A (fissando la base B). Pertanto, chiameremo **matrice associata alla forma quadratica** (rispetto a B), la matrice

$$M_B(Q) = A = M_B(\varphi),$$

e rango di Q il numero $rg(Q) = rg(\varphi) = rgA$. Il seguente risultato si ottiene immediatamente dai precedenti Teorema 1.1.11 e Proposizione 1.2.16.

Proposizione 1.2.17 Le matrici simmetriche di ordine n sono in corrispondenza biunivoca con le forme quadratiche di \mathbf{V}_n (poiché lo sono con le sue forme bilineari simmetriche).

Si noti che ogni forma quadratica individua un polinomio omogeneo di grado 2 nelle variabili x_1, \dots, x_n . Viceversa, il generico polinomio omogeneo $P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n q_{ij}x_i x_j$, individua la forma quadratica

$$Q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n q_{ij}x_i x_j,$$

dove \vec{x} è il vettore di componenti x_1, \dots, x_n rispetto ad una fissata base B di \mathbb{K}^n . La forma quadratica Q , rispetto alla base B , ha associata la matrice $A = (a_{ij})$, dove $a_{ii} = q_{ii}$ e $a_{ij} = a_{ji} = q_{ij}/2$ per $i < j$.

Chiaramente, se $P_1(x_1, \dots, x_n), P_2(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ individuano la stessa forma quadratica, le matrici associate a tali polinomi sono congruenti. Infine, è facile vedere che se $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V})$ è la forma polare di Q , fissato un generico sottospazio \mathbf{W} di \mathbf{V}_n , la forma indotta da φ su \mathbf{W} è esattamente la forma polare della restrizione di Q a \mathbf{W} .

1.3 Duale di uno spazio vettoriale. Il Teorema di Rappresentazione di Riesz

Definizione 1.3.1 *Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} . Una 1-forma su \mathbf{V} è una qualsiasi applicazione lineare $\theta : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{K}$.*

Lo spazio vettoriale $\mathbf{V}^ = \text{Lin}(\mathbf{V}, \mathbb{K})$ formato da tutte le 1-forme su \mathbf{V} , si chiama (spazio vettoriale) duale di \mathbf{V} .*

Sappiamo che due spazi vettoriali di dimensione finita sullo stesso campo \mathbb{K} sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione, e di conseguenza, $\mathbf{V}_n^* = \text{Lin}(\mathbf{V}_n, \mathbb{K})$ è isomorfo a \mathbf{V}_n . Un isomorfismo esplicito tra \mathbf{V}_n ed il suo duale è descritto nel seguente risultato, di facile verifica.

Teorema 1.3.2 *Siano \mathbf{V}_n uno spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{K} e $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ una sua fissata base. Per ogni fissato indice $j \in \{1, \dots, n\}$, l'applicazione*

$$\begin{aligned} \theta^j : \mathbf{V}_n &\rightarrow \mathbb{K} \\ \vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i &\mapsto x_j \end{aligned}$$

definisce una 1-forma su \mathbf{V} . L'insieme

$$\mathcal{B}^* = \{\theta^1, \dots, \theta^n\}$$

forma una base di \mathbf{V}_n^ (detta base duale di \mathcal{B}), e l'applicazione lineare $F : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_n^*$, completamente determinata da $F(\vec{e}_i) = \theta^i$ per ogni $i = 1, \dots, n$, è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

DIM. Basta provare che $\theta^1, \dots, \theta^n$ sono linearmente indipendenti ed anche un sistema di generatori di \mathbf{V}_n^* . Per il primo punto, basta considerarne una combinazione lineare nulla $\lambda_1\theta^1 + \dots + \lambda_n\theta^n = o$, ed osservare che

$$0 = o(\vec{e}_j) = (\lambda_1\theta^1 + \dots + \lambda_n\theta^n)(\vec{e}_j) = \lambda_j \quad \text{per ogni indice } j.$$

Per il secondo punto, basta osservare che, per ogni $\omega \in \mathbf{V}_n^*$, risulta

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega(\vec{e}_i)\theta^i,$$

che si dimostra facilmente calcolando $\omega(\vec{x})$ per un arbitrario vettore $\vec{x} = \sum_i x_i\vec{e}_i \in \mathbf{V}_n$, e ricordando che $x_j = \theta^j(\vec{x})$ per ogni indice j . \square

Si noti che l'isomorfismo tra \mathbf{V}_n ed il suo duale, descritto nel precedente Teorema, *non è canonico*, in quanto dipende dalla particolare base scelta. Diversa è la situazione per quanto riguarda lo spazio biduale di \mathbf{V}_n .

Definizione 1.3.3 *Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} . Lo spazio vettoriale $\mathbf{V}^{**} = (\mathbf{V}^*)^*$ si chiama (**spazio vettoriale**) **biduale** di \mathbf{V} .*

Teorema 1.3.4 *Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale su \mathbb{K} . Per ogni vettore $\vec{x} \in \mathbf{V}$, l'applicazione*

$$\begin{aligned} x^{**} : \mathbf{V}^* &\rightarrow \mathbb{K} \\ \theta &\mapsto x^{**}(\theta) := \theta(\vec{x}) \end{aligned}$$

definisce una 1-forma su \mathbf{V}^ , canonicamente associata a \vec{x} . Se \mathbf{V}_n ha dimensione finita, allora*

$$\begin{aligned} F : \mathbf{V}_n &\rightarrow \mathbf{V}_n^{**} \\ \vec{x} &\mapsto x^{**} \end{aligned}$$

è un isomorfismo canonico di spazi vettoriali.

In generale, se \mathbf{V} ha dimensione infinita, allora il suo biduale \mathbf{V}^{**} contiene propriamente un sottospazio vettoriale isomorfo a \mathbf{V} .

Passiamo ora al Teorema di Rappresentazione di Riesz, il quale mette in corrispondenza biunivoca gli elementi \mathbf{V}_n e quelli del suo duale, rispetto ad una fissata forma bilineare simmetrica non degenera di \mathbf{V}_n , ed ha importanti applicazioni in diversi settori della Matematica.

Teorema 1.3.5 (di rappresentazione di Riesz) Sia φ una forma bilineare simmetrica non degenera su \mathbf{V}_n . Allora,

$$\begin{aligned}\Phi: \mathbf{V}_n &\rightarrow \mathbf{V}_n^* \\ \vec{x} &\mapsto \phi_{\vec{x}},\end{aligned}$$

dove $\phi_{\vec{x}} \in \mathbf{V}^*$ è la 1-forma completamente determinata da

$$\phi_{\vec{x}}(\vec{y}) = \varphi(\vec{y}, \vec{x}),$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. In particolare, per ogni $\theta \in \mathbf{V}_n^*$ esiste uno ed un solo $\vec{x} \in \mathbf{V}_n$ che **rappresenta** θ , ossia, tale che $\theta = \phi_{\vec{x}}$.

DIM. Proviamo che Φ è lineare.

Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbf{V}_n$, allora $\Phi(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \phi_{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}$. Per ogni $\vec{w} \in \vec{v}_n$ si ha

$$\phi_{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}(\vec{w}) = \varphi(\vec{w}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \varphi(\vec{w}, \vec{v}_1) + \varphi(\vec{w}, \vec{v}_2) = \phi_{\vec{v}_1}(\vec{w}) + \phi_{\vec{v}_2}(\vec{w}),$$

per cui

$$\Phi(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \Phi(\vec{v}_1) + \Phi(\vec{v}_2).$$

Analogamente si prova che $\Phi(\lambda\vec{v}) = \phi_{\lambda\vec{v}}$ e, per ogni $\vec{w} \in \mathbf{V}_n$,

$$\phi_{\lambda\vec{v}}(\vec{w}) = \varphi(\vec{w}, \lambda\vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{w}, \vec{v}) = \lambda\phi_{\vec{v}}(\vec{w}),$$

quindi

$$\Phi(\lambda\vec{v}) = \lambda\Phi(\vec{v}).$$

Pertanto Φ è lineare.

Se $\vec{x} \in \ker \Phi$, allora $\phi_{\vec{x}}$ è la forma nulla, cioè $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ per ogni $\vec{y} \in \mathbf{V}_n$. Di conseguenza, $\vec{x} \in \ker(\varphi)$, da cui concludiamo che $\vec{x} = \vec{0}$, essendo per ipotesi φ non degenera. Quindi Φ è iniettiva, e pertanto bigettiva, in quanto $\dim \mathbf{V}_n = \dim \mathbf{V}_n^*$. \square

Corollario 1.3.6 Siano φ una forma bilineare simmetrica non degenera su \mathbf{V}_n e \mathbf{S} un sottospazio di \mathbf{V}_n . Allora, per ogni $\theta \in \mathbf{S}^*$ esiste $\vec{x} \in \mathbf{V}_n$ tale che $\theta(\vec{y}) = \varphi(\vec{x}, \vec{y})$ per ogni $\vec{y} \in \mathbf{S}$.

DIM. Siano $\theta \in \mathbf{S}^*$ e $\mathcal{B}_0 = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ una base di \mathbf{S} . Per il Teorema della base incompleta, \mathcal{B}_0 si può estendere ad una base di \mathbf{V}_n . Consideriamo $\tilde{\theta} \in \mathbf{V}_n^*$, determinata da

$$\tilde{\theta}(\vec{e}_i) = \theta(\vec{e}_i) \quad \text{per } i = 1, \dots, k,$$

$$\tilde{\theta}(\vec{e}_i) = 0 \quad \text{per } i = k + 1, \dots, n.$$

Per Teorema di rappresentazione di Riesz, esiste \vec{x} tale che $\tilde{\theta}(\vec{y}) = \varphi(\vec{x}, \vec{y})$ e quindi in particolare, $\theta(\vec{y}) = \varphi(\vec{x}, \vec{y})$ per ogni $\vec{y} \in \mathbf{S}$. \square

Osservazione 1.3.7 Nel Corollario 1.3.6, il vettore \vec{x} non è univocamente determinato, poiché $\theta \in \mathbf{S}^*$ si può estendere ad una forma di \mathbf{V}_n^* in diversi modi.

Teorema 1.3.8 Siano $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$ non degenera e \mathbf{S} un sottospazio di \mathbf{V}_n . Allora:

$$(1) \dim \mathbf{S} + \dim \mathbf{S}^\perp = \dim \mathbf{V}_n;$$

$$(2) \mathbf{S}^{\perp\perp} = \mathbf{S}.$$

DIM. (1): Consideriamo

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbf{V}_n &\rightarrow \mathbf{S}^* \\ \vec{x} &\mapsto \phi_{\vec{x}}, \end{aligned}$$

dove $\phi_{\vec{x}} \in \mathbf{S}^*$ è definita da $\phi_{\vec{x}}(\vec{y}) = \varphi(\vec{x}, \vec{y})$, per ogni $\vec{y} \in \mathbf{S}$. Chiaramente, Φ è ben posta. Inoltre, Φ è lineare poiché φ è bilineare.

Proviamo che Φ è suriettiva: sia $\theta \in \mathbf{S}^*$. Per il Corollario 1.3.6, esiste $\vec{x} \in \mathbf{V}_n$ tale che $\theta(\vec{y}) = \varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \phi_{\vec{x}}(\vec{y})$, per ogni $\vec{y} \in \mathbf{S}$, per cui $\theta = \phi_{\vec{x}} = \Phi(\vec{x})$.

Proviamo ora che $\ker \Phi = \mathbf{S}^\perp$. Infatti:

$$\begin{aligned} \vec{x} \in \ker \Phi &\iff \phi_{\vec{x}} \text{ è la forma nulla su } \mathbf{S} \\ &\iff \phi_{\vec{x}}(\vec{y}) = 0 \text{ per ogni } \vec{y} \in \mathbf{S} \\ &\iff \varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \text{ per ogni } \vec{y} \in \mathbf{S} \\ &\iff \vec{x} \in \mathbf{S}^\perp. \end{aligned}$$

Dal Teorema del rango, tenendo conto del fatto che $\dim \mathbf{S} = \dim \mathbf{S}^*$, segue che

$$\dim \mathbf{V}_n = \dim \operatorname{Im} \Phi + \dim \ker \Phi = \dim \mathbf{S}^* + \dim \mathbf{S}^\perp = \dim \mathbf{S} + \dim \mathbf{S}^\perp.$$

(2): $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}^{\perp\perp}$ per la definizione di ortogonale di un sottoinsieme. D'altra parte, quando \mathbf{S} è un sottospazio, dal punto (1) abbiamo

$$\dim \mathbf{S}^{\perp\perp} = \dim \mathbf{V}_n - \dim \mathbf{S}^\perp = \dim \mathbf{V}_n - (\dim \mathbf{V}_n - \dim \mathbf{S}) = \dim \mathbf{S},$$

e quindi $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\perp\perp}$. \square

Proposizione 1.3.9 Siano $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$ e \mathbf{W} un sottospazio di \mathbf{V}_n .

1. Se \mathbf{W} è totalmente singolare, allora $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{W}^\perp$. In particolare, $\dim \mathbf{W} \leq \frac{n}{2}$.
2. Se \mathbf{W} non è singolare, allora $\mathbf{V}_n = \mathbf{W} \perp \mathbf{W}^\perp$.

DIM. Se \mathbf{W} è totalmente singolare, allora $\dim \mathbf{W} \leq \dim \mathbf{W}^\perp$. D'altra parte, per il Teorema 1.3.8 (1) risulta

$$\dim \mathbf{V}_n = \dim \mathbf{W} + \dim \mathbf{W}^\perp \geq 2 \dim \mathbf{W},$$

pertanto $\dim \mathbf{W} \leq \frac{n}{2}$.

Se \mathbf{W} è non singolare, allora la somma di \mathbf{W} con \mathbf{W}^\perp è diretta, quindi

$$\mathbf{V} = \mathbf{W} \perp \mathbf{W}^\perp$$

per il Teorema 1.3.8,(1). \square

Proposizione 1.3.10 *Siano $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V})$ e \mathbf{X}, \mathbf{Y} due sottospazi di \mathbf{V} . Allora valgono i seguenti fatti:*

1. Se $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y}$, allora $\mathbf{Y}^\perp \subseteq \mathbf{X}^\perp$;
2. $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^\perp = \mathbf{X}^\perp \cap \mathbf{Y}^\perp$;
3. $\mathbf{X}^\perp + \mathbf{Y}^\perp \subseteq (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})^\perp$;
4. Se \mathbf{V} è finitamente generato, allora $\mathbf{X}^\perp + \mathbf{Y}^\perp = (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})^\perp$.

DIM. 1. Segue subito dalla definizione di ortogonale di un sottoinsieme (vale in effetti per gli ortogonali di sottoinsiemi arbitrari).

2. Poiché $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X} + \mathbf{Y}$, dall'asserto 1. abbiamo che $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^\perp \subseteq \mathbf{X}^\perp$ e $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^\perp \subseteq \mathbf{Y}^\perp$. Quindi, $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^\perp \subseteq \mathbf{X}^\perp \cap \mathbf{Y}^\perp$.

Viceversa, proviamo che $\mathbf{X}^\perp \cap \mathbf{Y}^\perp \subseteq (\mathbf{X} + \mathbf{Y})^\perp$. Sia $\vec{t} \in \mathbf{X}^\perp \cap \mathbf{Y}^\perp$. Per ogni $\vec{u} \in \mathbf{X} + \mathbf{Y}$ esistono $\vec{x} \in \mathbf{X}$ e $\vec{y} \in \mathbf{Y}$ tali che $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y}$. Allora:

$$\varphi(\vec{t}, \vec{u}) = \varphi(\vec{t}, \vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{t}, \vec{x}) + \varphi(\vec{t}, \vec{y}).$$

Ma $\vec{t} \in \mathbf{X}^\perp \cap \mathbf{Y}^\perp$, per cui $\varphi(\vec{t}, \vec{x}) = \varphi(\vec{t}, \vec{y}) = 0$, e quindi $\varphi(\vec{t}, \vec{u}) = 0$ per ogni $\vec{u} \in \mathbf{X} + \mathbf{Y}$, vale a dire che $\vec{t} \in (\mathbf{X} + \mathbf{Y})^\perp$.

3. Poiché $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}, \mathbf{Y}$, si ha che $\mathbf{X}^\perp, \mathbf{Y}^\perp \subseteq (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})^\perp$ e quindi

$$\mathbf{X}^\perp + \mathbf{Y}^\perp \subseteq (\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})^\perp.$$

4. Se \mathbf{V} è finitamente generato, allora

$$\begin{aligned} \dim(\mathbf{X}^\perp + \mathbf{Y}^\perp) &= \dim \mathbf{X}^\perp + \dim \mathbf{Y}^\perp - \dim(\mathbf{X}^\perp \cap \mathbf{Y}^\perp) \\ &= \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{X} + \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{Y} - \dim(\mathbf{X}^\perp \cap \mathbf{Y}^\perp) \\ &= \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{X} + \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{Y} - \dim(\mathbf{X} + \mathbf{Y})^\perp \\ &= 2 \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{X} - \dim \mathbf{Y} - (\dim \mathbf{V} - \dim(\mathbf{X} + \mathbf{Y})) \\ &= \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{X} - \dim \mathbf{Y} + \dim(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) \\ &= \dim \mathbf{V} - \dim(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) = \dim(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y})^\perp, \end{aligned}$$

e la conclusione segue dal punto 3. \square

Esercizi 1.3.11 1) Data la forma bilineare simmetrica

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\mapsto 3x_1y_1 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2(x_1y_3 + x_3y_1) + x_2y_3 + x_3y_2, \end{aligned}$$

(a) Determinare la matrice associata a φ rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 .

(b) Stabilire se φ è degenere.

(c) per $\vec{a} = (1, 3, -1)$ e $\vec{b} = (0, 1, -2)$, calcolare $\varphi(\vec{a}, \vec{b})$, $Q(\vec{a})$, $Q(\vec{b})$.

(d) Determinare $L(\vec{a})^\perp$ e $L(\vec{a}, \vec{b})^\perp$.

2) Data la forma quadratica

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) &\mapsto x_1^2 + 4x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_3 + x_2x_4 - 3x_3x_4, \end{aligned}$$

(a) Determinare la corrispondente forma bilineare simmetrica φ e la matrice associata rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^4 .

(b) Provare che φ è degenere e trovare $\ker(\varphi)$.

(c) Determinare H^\perp (rispetto a φ), dove $H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_4 = 0\}$.

3) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri la forma quadratica

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3) &\mapsto x_1^2 - 2x_2^2 + kx_3^2 + x_1x_3 + x_2x_3. \end{aligned}$$

(a) Determinare il valore di k per cui φ è degenere.

(b) Per tale valore di k , determinare $\ker(\varphi)$.

4) Sia φ la forma bilineare simmetrica di \mathbb{R}^3 , avente come matrice associata rispetto alla base canonica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

(a) Determinare il valore di k per cui φ è degenere. Per tale valore di k , determinare $\ker(\varphi)$.

(b) Determinare, per ogni valore di $k \in \mathbb{R}$, il sottospazio H^\perp , dove $H = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\}$.

5) Si consideri la forma quadratica

$$Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto 2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

(a) Verificare che φ è degenere e determinare $\ker(\varphi)$.

(b) Trovare $L((1, -1, 0))^\perp$.

1.4 Diagonalizzazione delle forme quadratiche

Definizione 1.4.1 Se $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$, una base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ di \mathbf{V}_n si dice **base ortogonale** (per φ) se $\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$ per ogni $i, j = 1, \dots, n, i \neq j$.

In questa sezione viene affrontato il problema dell'esistenza di basi ortogonali, la cui rilevanza consiste nel fatto che se $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ è una base ortogonale di \mathbf{V}_n per φ , allora $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ è una matrice diagonale, e quindi, posto $a_{ii} = \varphi(\vec{v}_i, \vec{v}_i)$ per ogni indice i , risulta, per ogni $\vec{x} = \sum_i x_i \vec{v}_i$,

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = a_{11}x_1y_1 + \dots + a_{nn}x_ny_n, \quad (1.4.1)$$

$$Q(\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2, \quad (1.4.2)$$

Definizione 1.4.2 L'equazione (1.4.2) (rispettivamente, (1.4.1)) si chiama **forma canonica** della forma quadratica Q (rispettivamente, della forma bilineare simmetrica φ).

Lemma 1.4.3 Se $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$ è non degenere allora esiste una base ortogonale di \mathbf{V}_n per φ .

DIM. Proviamo l'asserto per induzione su n .

($n = 1$): la tesi è banalmente vera (ogni base è banalmente ortogonale).

($n - 1 \Rightarrow n$): iniziamo osservando che, poiché φ è non degenere, esiste $\vec{e}_1 \in \mathbf{V}_n$ vettore non isotropo. Infatti, se $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ per ogni $\vec{x} \in \mathbf{V}_n$, allora, per la Proposizione 1.1.2, φ è anche antisimmetrica. Quindi, $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n) \cap \mathcal{B}_a(\mathbf{V}_n)$ e, per la Proposizione 1.1.6 (iii), $\varphi = 0$, che contraddice l'ipotesi che φ è non degenere.

Poniamo $\mathbf{V}_1 = L(\vec{e}_1)$. Allora, \mathbf{V}_1 è non singolare. Infatti, se \mathbf{V}_1 fosse singolare, avremmo $\mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}_1^\perp$ (e $\dim \mathbf{V}_1 = 1$), per cui \vec{e}_1 sarebbe isotropo, in contraddizione

con la scelta operata. Pertanto, $\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_1^\perp = \{\vec{0}\}$, ossia, la somma di \mathbf{V}_1 e \mathbf{V}_1^\perp è diretta. Allora, dal Teorema 1.3.8,(1) abbiamo

$$\dim(\mathbf{V}_1 \oplus \mathbf{V}_1^\perp) = \dim \mathbf{V}_1 + \dim \mathbf{V}_1^\perp = \dim \mathbf{V}_n,$$

per cui $\mathbf{V}_n = \mathbf{V}_1 \perp \mathbf{V}_1^\perp$. Sia φ_1 la forma indotta da φ su \mathbf{V}_1^\perp per restrizione. Proviamo che φ_1 è non degenere. Infatti, se $\vec{x}_0 \in \ker(\varphi_1)$, allora

$$\varphi_1(\vec{x}_0, \vec{y}) = \varphi(\vec{x}_0, \vec{y}) = 0 \quad (1.4.3)$$

per ogni $\vec{y} \in \mathbf{V}_1^\perp$. Dato $\vec{v} \in \mathbf{V}_n$, esistono $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\vec{u} \in \mathbf{V}_1^\perp$ tali che $\vec{v} = \lambda \vec{e}_1 + \vec{u}$, per cui

$$\varphi(\vec{x}_0, \vec{v}) = \varphi(\vec{x}_0, \lambda \vec{e}_1 + \vec{u}) = \lambda \varphi(\vec{x}_0, \vec{e}_1) + \varphi(\vec{x}_0, \vec{u}).$$

Ma $\varphi(\vec{x}_0, \vec{e}_1) = 0$ poiché $\vec{x}_0 \in \mathbf{V}_1^\perp$, e $\varphi(\vec{x}_0, \vec{u}) = 0$ in quanto $\vec{x}_0 \in \ker(\varphi_1)$. Quindi, $\vec{x}_0 \in \ker(\varphi)$ e concludiamo che $\vec{x}_0 = \vec{0}$, essendo φ non degenere. Pertanto, φ_1 è non degenere.

Siccome $\dim \mathbf{V}_1^\perp = n - 1$, per l'ipotesi induttiva esiste $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ base ortogonale di \mathbf{V}_1^\perp per φ_1 (e quindi tali vettori sono ortogonali rispetto a φ). Allora, $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1\} \cup \mathcal{B}_1$ è una base ortogonale di \mathbf{V}_n per φ . \square

Ora usiamo il Lemma precedente per dimostrare il risultato generale.

Teorema 1.4.4 *Per ogni $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$ esiste una base ortogonale di \mathbf{V}_n .*

DIM. Sappiamo dal Teorema 1.2.9 che, data $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$, si ha

$$\mathbf{V}_n = \ker(\varphi) \perp \mathbf{S},$$

con \mathbf{S} sottospazio vettoriale non singolare. Sia φ_1 la forma indotta da φ su \mathbf{S} . Poiché \mathbf{S} è non singolare, φ_1 è non degenere (in quanto $\ker(\varphi_1) \subseteq \mathbf{S} \cap \mathbf{S}^\perp = \{\vec{0}\}$). Allora, dal Lemma precedente, esiste una base ortogonale $\mathcal{B}_\mathbf{S}$ di \mathbf{S} per φ_1 . Se \mathcal{B}_0 è una qualsiasi base di $\ker(\varphi)$, allora $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_\mathbf{S}$ è una base ortogonale di \mathbf{V}_n per φ . \square

Osservazione 1.4.5 *Una procedura esplicita per determinare la forma canonica di una forma quadratica (o della corrispondente forma bilineare simmetrica) si ottiene come applicazione del Teorema Spettrale sugli endomorfismi simmetrici, ed è descritta nell'Osservazione 3.3.5.*

In termini di matrici, il precedente Teorema 1.4.4 si riformula nel modo seguente.

Corollario 1.4.6 *Ogni $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ è congruente ad una matrice diagonale.*

DIM. Sia $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbb{K}^n)$ definita da $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = X^t A Y$, dove $A = M_B(\varphi)$ e \mathcal{B} è la base canonica di \mathbb{K}^n . Per il Teorema precedente, esiste \mathcal{B}' base ortogonale di \mathbb{K}^n per φ . Se $D = M_{\mathcal{B}'}(\varphi)$, allora D è diagonale e, essendo congruente ad A , esiste $P \in GL(n, \mathbb{K})$ tale che $D = P^t A P$. \square

Andiamo ora a specializzare i risultati sulle basi ortogonali a casi particolarmente rilevanti, dapprima assumendo che \mathbb{K} sia un campo algebricamente chiuso (come \mathbb{C}), e poi che $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Teorema 1.4.7 *Siano \mathbf{V}_n uno spazio vettoriale definito su un campo \mathbb{K} algebricamente chiuso, e $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$. Allora esiste una base ortogonale B di \mathbf{V}_n tale che*

$$M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} I_r & O_1 \\ O_2 & O_3 \end{pmatrix}, \quad (1.4.4)$$

dove $r = \text{rg}(\varphi)$, I_r è la matrice identità di ordine r , $O_1 \in \mathbb{K}^{r, n-r}$, $O_2 \in \mathbb{K}^{n-r, r}$ e $O_3 \in \mathbb{K}^{n-r, n-r}$ sono matrici nulle.

DIM. Sia $\varphi \in \mathcal{B}_s(\mathbf{V}_n)$. Allora, dal Teorema 1.4.4 esiste una base ortogonale $B_0 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ di \mathbf{V}_n per φ , per cui,

$$M_{B_0}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sia $r = \text{rg}(\varphi) = \text{rg}(M_{B_0}(\varphi))$. Dopo aver eventualmente riordinato gli elementi di B_0 , avremo che $a_{ii} \neq 0$ per $i = 1, \dots, r$ e $a_{ii} = 0$ per $i = r+1, \dots, n$. Poiché \mathbb{K} è algebricamente chiuso, per ogni $i = 1, \dots, r$ esiste $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tale che $\alpha_i^2 = a_{ii}$. Costruiamo $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, ponendo

$$\vec{v}_i = \begin{cases} \alpha_i^{-1} \vec{e}_i & \text{per } i = 1, \dots, r, \\ \vec{e}_i & \text{per } i = r+1, \dots, n. \end{cases}$$

Allora, $\varphi(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0$ per $i \neq j$ o per $i = j > r$, mentre per $i = j < r$ risulta $\varphi(\vec{v}_i, \vec{v}_i) = \varphi(\alpha_i^{-1} \vec{e}_i, \alpha_i^{-1} \vec{e}_i) = \alpha_i^{-2} \varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_i) = 1$. Pertanto, B è una base ortogonale e $M_B(\varphi)$ è descritta come in (1.4.4). \square

Corollario 1.4.8 *Siano \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso e $A \in S_n(\mathbb{K})$. Se $r = \text{rg}(A)$, allora A è congruente ad una matrice diagonale della forma (1.4.4).*

DIM. Segue banalmente dal Teorema 1.4.7, procedendo come nel Corollario 1.4.6. \square

Teorema 1.4.9 (di Sylvester) Sia φ una forma bilineare simmetrica di rango r di uno spazio vettoriale reale \mathbf{V}_n . Allora esiste un intero $0 \leq p \leq r$, dipendente solo da φ , ed una base $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ di \mathbf{V}_n , tali che

$$M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n-r} \end{pmatrix} \quad (1.4.5)$$

dove 0 denota la matrice nulla di ordini opportuni.

DIM. Sia $B_0 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ una base ortogonale di \mathbf{V}_n rispetto a φ , la cui esistenza segue dal Teorema 1.4.4. Allora,

$$M_{B_0}(\varphi) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sia $r = rg(\varphi) = rg(M_{B_0}(\varphi))$. Riordinando i vettori della base B_0 , possiamo fare in modo che $a_{ii} \neq 0$ per $i = 1, \dots, r$ e $a_{ii} = 0$ per $i = r+1, \dots, n$, e che inoltre i primi $0 \leq p \leq r$ siano positivi. Allora, esisteranno dei numeri reali α_{ii} , tali che $a_{ii} = \alpha_{ii}^2$ per $i \leq p$ e $a_{ii} = -\alpha_{ii}^2$ per $p+1 \leq i \leq r$. Costruiamo $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$, ponendo

$$\vec{v}_i = \begin{cases} \alpha_{ii}^{-1} \vec{e}_i & \text{per } 1 \leq i \leq r, \\ \vec{e}_i & \text{per } r+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Quindi, $\varphi(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 0$ quando $i \neq j$ o $i = j > r$. Per $i = j \leq r$ risulta $\varphi(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = 1$ oppure -1 , a seconda che $i \leq p$ o $i > p$ rispettivamente. Pertanto, per ogni $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{v}_i \in \vec{v}_n$ avremo:

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2.$$

Rimane da provare che p dipende solo da φ e non dalla base scelta. Sia $B' = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ una base ortogonale di \mathbf{V}_n per φ , rispetto a cui si abbia, per ogni $\vec{y} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{w}_i \in \mathbf{V}_n$,

$$Q(\vec{y}) = y_1^2 + \dots + y_t^2 - y_{t+1}^2 - \dots - y_r^2.$$

Supponiamo per assurdo che $t \neq p$. Allora, $t > p$ oppure $t < p$. Essendo la situazione del tutto simmetrica rispetto alle due basi, senza perdere di generalità consideriamo il caso $t < p$.

Consideriamo i sottospazi di \mathbf{V}_n

$$S = L(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p), \quad T = L(\vec{w}_{t+1}, \dots, \vec{w}_n).$$

Dalla formula di Grassmann si ha:

$$\dim(S \cap T) = \dim S + \dim T - \dim(S + T) = p + n - t - \dim(S + T) \geq p - t > 0.$$

Sia dunque $\vec{x} \in S \cap T$, $\vec{x} \neq 0$. Allora,

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_p \vec{v}_p = \mu_{t+1} \vec{w}_{t+1} + \dots + \mu_n \vec{w}_n,$$

per cui

$$Q(\vec{x}) = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_p^2 > 0 \quad \text{e} \quad Q(\vec{x}) = -\mu_{t+1}^2 - \dots - \mu_n^2 \leq 0,$$

il che è assurdo. Pertanto, $t = p$ e quindi la tesi. \square

Si osservi che come conseguenza della dimostrazione del Teorema di Sylvester, date una forma bilineare simmetrica reale φ ed una sua qualsiasi base *ortogonale* $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, il numero degli \vec{e}_i per cui $\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_i)$ è positivo, negativo, nullo, *non* dipendono dalla particolare base.

Procedendo come nel Corollario 1.4.6 si ottiene il risultato seguente.

Corollario 1.4.10 *Ogni $A \in S_n(\mathbb{R})$ è congruente ad una matrice diagonale della forma (1.4.5), dove $r = \text{rg}(A)$ e p è un intero compreso tra 0 e r dipendente solo da A .*

Per il Teorema di Sylvester, se Q è una forma quadratica su uno spazio vettoriale reale \mathbf{V}_n , allora esiste una particolare base $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ di \mathbf{V}_n rispetto alla quale, per ogni vettore $\vec{x} = \sum_i x_i \vec{v}_i \in \mathbf{V}_n$:

$$Q(\vec{x}) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 \quad (1.4.6)$$

dove p ed r sono interi tali che $0 \leq p \leq r$, che dipendono solo da Q .

Definizione 1.4.11 *L'espressione (1.4.6) si dice **forma normale** di Q . Gli interi p , $r - p$ ed $n - r$ si dicono rispettivamente **indice di positività**, **di negatività** e **di nullità** di Q . La terna $(p, r - p, n - r)$ prende il nome di **segnatura** di Q .*

Una forma quadratica Q si dice

- **definita positiva** se $Q(\vec{x}) > 0$ per ogni $\vec{x} \in \mathbf{V}$, $\vec{x} \neq 0$;
- **semidefinita positiva** se $Q(\vec{x}) \geq 0$ per ogni $\vec{x} \in \mathbf{V}$;
- **semidefinita negativa** se $Q(\vec{x}) \leq 0$ per ogni $\vec{x} \in \mathbf{V}$;
- **definita negativa** se $Q(\vec{x}) < 0$ per ogni $\vec{x} \in \mathbf{V}$, $\vec{x} \neq 0$;
- **indefinita** se non è semidefinita positiva o negativa.

Analogia terminologia si applica alla forma bilineare simmetrica φ corrispondente a Q .

Dal Teorema di Sylvester segue che le possibili forme normali delle forme quadratiche non nulle, distinte per segnatura, sono le seguenti:

	Forma quadratica	Segnatura
Definita positiva	$Q(\vec{x}) = x_1^2 + \dots + x_n^2$	$(n, 0, 0)$
Semidefinita positiva	$Q(\vec{x}) = x_1^2 + \dots + x_r^2, r < n$	$(r, 0, n - r)$
Definita negativa	$Q(\vec{x}) = -x_1^2 - \dots - x_n^2$	$(0, n, 0)$
Semidefinita negativa	$Q(\vec{x}) = -x_1^2 - \dots - x_r^2, r < n$	$(0, r, n - r)$
Non degenera	$Q(\vec{x}) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2$	$(p, n - p, 0)$
Indefinita	$Q(\vec{x}) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$	$(p, r - p, n - r)$

In particolare, per $n = 2$, se Q non è la forma nulla, si hanno le seguenti forme normali:

	Forma quadratica	Segnatura
Definita positiva	$Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2$	$(2, 0, 0)$
Semidefinita positiva	$Q(\vec{x}) = x_1^2,$	$(1, 0, 1)$
Definita negativa	$Q(\vec{x}) = -x_1^2 - x_2^2$	$(0, 2, 0)$
Semidefinita negativa	$Q(\vec{x}) = -x_1^2,$	$(0, 1, 1)$
Indefinita (non degenera)	$Q(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2$	$(1, 1, 0)$

Per $n = 3$, e Q diversa dalla forma nulla, risulta:

	Forma quadratica	Segnatura
Definita positiva	$Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$(3, 0, 0)$
Semidefinite positive	$Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2,$ $Q(x) = x_1^2,$	$(2, 0, 1)$ $(1, 0, 2)$
Definita negativa	$Q(\vec{x}) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	$(0, 3, 0)$
Semidefinite negative	$Q(\vec{x}) = -x_1^2,$ $Q(\vec{x}) = -x_1^2 - x_2^2,$	$(0, 1, 2)$ $(0, 2, 1)$
Indefinite non degeneri	$Q(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ $Q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$(1, 2, 0)$ $(2, 1, 0)$
Indefinita degenera	$Q(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2$	$(1, 1, 1)$

Se $Q(\vec{x}) = X^t A X$ è una forma quadratica reale, allora Q è congruente ad una matrice della forma (1.4.5) per il Teorema di Sylvester. Pertanto è ben posta la seguente definizione:

Definizione 1.4.12 Sia $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Allora A si dice **definita positiva**, **semidefinita positiva**, **semidefinita negativa**, **definita negativa**, **non degenera** o **indefinita**, se, rispettivamente, $Q(\vec{x}) = X^t A X$ è definita positiva, semidefinita positiva, semidefinita negativa, definita negativa, non degenera o indefinita.

Corollario 1.4.13 Se $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, allora A è definita positiva se e solo se esiste $P \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che $A = P^T P$.

DIM. Per il Teorema di Sylvester, $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ è definita positiva se e solo se è congruente a I_n , cioè $A = P^T I_n P = P^T P$ con $P \in GL(n, \mathbb{R})$. \square

Definizione 1.4.14 Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$. Per ogni $k = 1, \dots, n$, si chiama **minore principale di ordine k** il determinante della sottomatrice A_k di A , ottenuta eliminando le ultime $(n - k)$ righe e le ultime $(n - k)$ colonne di A .

Teorema 1.4.15 (Criterio di Sylvester) $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ è definita positiva se e solo se per ogni $k = 1, \dots, n$ il minore principale di ordine k di A è positivo.

DIM. Sia $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ definita positiva. Consideriamo la forma quadratica su \mathbb{R}^n definita positiva $Q(Y) = Y^t A Y$ individuata da A rispetto ad una fissata base \mathcal{B} di \mathbb{R}^n . Per $k = 1, \dots, n$, si consideri la forma quadratica su \mathbb{R}^k definita da $Q_k(X) = X^t A_k X$. Per ogni $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$ vettore di \mathbb{R}^k , si consideri il vettore di \mathbb{R}^n definito da $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$. Allora,

$$Q_k(\bar{x}) = \bar{X}^t A_k \bar{X} = \sum_{i,j=1}^k a_{ij} x_i x_j = X^t A X = Q(\vec{x}).$$

Pertanto, Q_k è definita positiva poiché Q è definita positiva. Ma allora A_k è definita positiva, e per il Corollario 1.4.13 esiste $P_k \in GL(k, \mathbb{R})$ tale che $A_k = P_k^T P_k$. Quindi, $\det A_k = \det (P_k^T P_k) = \det (P_k)^2 > 0$ per ogni $k = 1, \dots, n$.

Viceversa, supponiamo ora che per ogni $k = 1, \dots, n$ il minore principale di ordine k di A sia positivo, e proviamo che A è definita positiva. Procediamo per induzione su n .

$(n = 1)$: l'asserto è banalmente vero.

$(n - 1 \Rightarrow n)$: Si considerino la forma quadratica $Q(\vec{x}) = X^t A X$, il sottospazio \mathbf{Y} di \mathbb{R}^n costituito dai vettori $\vec{y} = (y_1, \dots, y_{n-1}, 0)$ e la forma quadratica su \mathbb{R}^{n-1} definita da

$$Q_{n-1}(\bar{y}) = \bar{Y}^t A_{n-1} \bar{Y},$$

con $\bar{y} = (y_1, \dots, y_{n-1})$. Segue dall'ipotesi induttiva che Q_{n-1} è definita positiva. inoltre, $Q(\vec{y}) > 0$ per ogni $\vec{y} \in \mathbf{Y}$, poiché $Q_{n-1}(\bar{y}) = Q(\vec{y})$. Per il Teorema 1.4.7,

esiste una base ortogonale $B' = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ di \mathbb{R}^n tale che, per ogni $\vec{y} = \sum y_i \vec{e}_i$, si ha

$$Q(\vec{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$

con $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Dal Corollario 1.4.8 segue che $\det A = (\det P)^2 \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$, dove P è la matrice di passaggio dalla base B alla base B' .

Sia quindi $X = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Poiché $\dim \mathbf{Y} = n-1$ e $\dim \mathbf{X} = 2$, si ha $\dim \mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \geq 1$. Scegliamo quindi $\vec{w} \in \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$, $\vec{w} \neq 0$. Allora, $Q(\vec{w}) > 0$, ed esistono $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\vec{w} = w_1 \vec{e}_1 + w_2 \vec{e}_2$. Dunque,

$$0 < Q(\vec{w}) \leq \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 \leq \lambda_2 (w_1^2 + w_2^2)$$

da cui segue che $0 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. D'altra parte, $0 < \det A$ e quindi

$$0 < \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n,$$

in quanto $\det A = (\det P)^2 \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$. Quindi, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Ne segue che

$$Q(\vec{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 > 0$$

per ogni $\vec{y} \neq \vec{0}$, ossia, A è definita positiva. \square

Esercizi 1.4.16 1) Si determini la forma bilineare simmetrica $\varphi \in \mathcal{B}_S(\mathbb{R}^3)$, tale che $\ker(\varphi) = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ e $Q((1, 0, -1)) = 3$. Determinare la segnatura di φ e la sua forma normale.

2) Sia $\varphi \in \mathcal{B}_S(\mathbb{R}^3)$ avente come matrice associata rispetto alla base canonica B , la matrice

$$A = \begin{pmatrix} h & -1 & 2 \\ -1 & 3 & k \\ 2 & k & -6 \end{pmatrix},$$

con $k, h \in \mathbb{R}$.

(a) Determinare $h \neq k$ per cui $\dim(\ker(\varphi)) = 1$ e $\vec{u} = (0, 1, -1) \perp \vec{v} = (2, 0, -1)$.

(b) Per tali valori di $h \neq k$, trovare la forma canonica di $Q = Q_\varphi$ e classificarla.

3) Sia $\varphi \in \mathcal{B}_S(\mathbb{R}^3)$ tale che $\ker(\varphi) = L(\vec{u} = (1, 2, 1), \vec{v} = (1, -1, 0))$ e $Q(\vec{w}) = 2$, dove $\vec{w} = (1, 0, 1)$.

(a) Determinare la matrice A associata a φ rispetto alla base canonica.

(b) Classificare Q e trovarne la forma canonica.

(c) Specificare la base rispetto alla quale sussiste tale forma canonica.

Capitolo 2

Spazi Vettoriali Euclidei

In questo capitolo lo studio delle forme bilineari simmetriche si specializza al caso particolare, ma particolarmente rilevante, degli spazi vettoriali euclidei.

2.1 Definizione e relative proprietà

Definizione 2.1.1 Sia \mathbf{V} uno spazio vettoriale reale. Un **prodotto scalare** è una forma bilineare simmetrica definita positiva $\langle \cdot, \cdot \rangle$ di \mathbf{V} . La coppia $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ si dice **spazio vettoriale euclideo** (o, in breve, spazio euclideo).

Esempio 2.1.2 L'applicazione

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\mapsto \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \end{aligned}$$

è un prodotto scalare su \mathbb{R}^n , detto **prodotto scalare standard**.

Esempio 2.1.3 Lo spazio di vettori geometrici di \mathbf{V}_3 , munito del prodotto scalare definito da:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} 0 & \text{se } \vec{u} = \vec{0} \text{ o } \vec{v} = \vec{0}, \\ \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) & \text{se } \vec{u} \neq \vec{0} \neq \vec{v}, \end{cases}$$

è uno spazio vettoriale euclideo.

Esempio 2.1.4 Dalle proprietà degli integrali segue che

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx. \quad (2.1.1)$$

è un prodotto scalare su $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[a, b]$ (spazio delle funzioni continue da $[a, b]$ in \mathbb{R}).

2.2 Norma di uno spazio euclideo

Definizione 2.2.1 Sia $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo. La funzione

$$\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \longmapsto \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

si dice **norma** indotta dal prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Il numero reale $\|\vec{x}\| \geq 0$ si dice **norma del vettore** \vec{x} .

Teorema 2.2.2 (Disuguaglianza di Schwarz)

Sia $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo. Allora, per ogni $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}$ risulta

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|,$$

e l'uguaglianza vale se e solo se \vec{v} e \vec{w} sono paralleli.

DIM. Se $\vec{w} = \vec{0}$, l'asserto è banalmente vero. Quindi, supponiamo che $\vec{w} \neq \vec{0}$. Siano $a = \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle$ e $b = -\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$. Allora

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle a\vec{v} + b\vec{w}, a\vec{v} + b\vec{w} \rangle = a^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle + 2ab \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle + b^2 \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \\ &= \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle^2 \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - 2 \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \\ &= \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle (\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2) \end{aligned}$$

Poiché $\vec{w} \neq \vec{0}$, si ha $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle > 0$ e quindi $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 \leq \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle$, cioè $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$.

Si noti che $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle$ se e solo se $\langle a\vec{v} + b\vec{w}, a\vec{v} + b\vec{w} \rangle = 0$ e ciò si verifica se e solo se $\vec{v} = -(b/a)\vec{w}$, essendo $a = \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \neq 0$. \square

Proposizione 2.2.3 La norma $\| \cdot \|$ gode delle seguenti proprietà:

1. $\|\vec{x}\| \geq 0$ per ogni $\vec{x} \in \mathbf{V}$, e $\|\vec{x}\| = 0$ se e solo se $\vec{x} = \vec{0}$;
2. $\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{x} \in \mathbf{V}$;
3. $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$ (**disuguaglianza triangolare**).
inoltre l'uguaglianza vale se e solo se \vec{x} e \vec{y} sono paralleli.

DIM. Gli asserti (1) e (2) seguono immediatamente dalla definizione di norma. Proviamo l'asserto (3).

Dalla disuguaglianza di Schwarz segue che se $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$, allora

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \|\vec{x}\|^2 + 2 \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2 |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| + \|\vec{y}\|^2 \\ &\leq \|\vec{x}\|^2 + 2 \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 \leq (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \end{aligned}$$

e quindi $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$. Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ e quindi se e solo se \vec{x} e \vec{y} sono paralleli. \square

Definizione 2.2.4 La coppia $(\mathbf{V}, \|\cdot\|)$ si dice **spazio normato**.

Siano \vec{x}, \vec{y} vettori non nulli di uno spazio vettoriale euclideo \mathbf{V} . Allora $\frac{|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \leq 1$, ossia

$$-1 \leq \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \leq 1.$$

Poiché $\cos_{|[0, \pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ è invertibile, esiste un unico $\theta \in [0, \pi]$ tale che $\cos \theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|}$. Allora

$$\widehat{(\vec{x}, \vec{y})} = \arccos \left(\frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \right)$$

si definisce **angolo convesso (non orientato) individuato da \vec{x} e \vec{y}** . Pertanto, come nel caso dei vettori geometrici, in un qualsiasi spazio euclideo avremo

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \widehat{(x, y)}. \quad (2.2.1)$$

Esempio 2.2.5 Si consideri il prodotto scalare standard di \mathbb{R}^4 :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4.$$

Siano $\vec{x} = (1, 1, 0, 1)$, $\vec{y} = (1, 1, -1, 0)$ e calcoliamo l'angolo θ_1 individuato da essi rispetto a tale prodotto scalare. Avremo:

$$\theta_1 = \arccos \left(\frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_1}{\|\vec{x}\|_1 \|\vec{y}\|_1} \right) = \arccos \frac{2}{3}.$$

Ora, su \mathbb{R}^4 si consideri il prodotto scalare definito da

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_2 = \frac{1}{2} x_1 y_1 + \frac{1}{2} x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4. \quad (2.2.2)$$

L'angolo θ_2 individuato dagli stessi vettori \vec{x}, \vec{y} è:

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_2}{\|\vec{x}\|_2 \|\vec{y}\|_2} \right) = \arccos \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Si considerino, infine, i vettori $\vec{w}_1 = (1, 1, 1, 1)$ e $\vec{w}_2 = (1, 0, 0, -1)$. Questi vettori sono ortogonali rispetto al prodotto scalare standard, mentre rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ determinano l'angolo:

$$\theta = \arccos \left(\frac{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle_2}{\|\vec{w}_1\|_2 \|\vec{w}_2\|_2} \right) = \arccos \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}} \right).$$

Teorema 2.2.6 *Siano \vec{x}, \vec{y} due vettori di uno spazio vettoriale euclideo, allora:*

1. (**Teorema di Carnot**) $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2 \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta$, dove θ è l'angolo convesso (non orientato) individuato da \vec{x} e \vec{y} ;
2. (**Teorema di Pitagora**) $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ se e solo se \vec{x} ed \vec{y} sono ortogonali.

DIM. Dall'uguaglianza (2.2.1) abbiamo che

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2 \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \\ &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2 \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta, \end{aligned}$$

dove θ è l'angolo convesso (non orientato) individuato da \vec{x} e \vec{y} . Inoltre, $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ se e solo se $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$, cioè se \vec{x} e \vec{y} sono ortogonali. \square

Un vettore \vec{x} di uno spazio vettoriale euclideo $(\mathbf{V}, \langle, \rangle)$ si dice **versore** se $\|\vec{x}\| = 1$. In particolare, se $\vec{x} \neq \vec{0}$, allora $\vec{e} := \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}$ si dice **versore** associato a \vec{x} .

2.3 Basi ortonormali

Un insieme finito di vettori $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_t\}$ di \mathbf{V} si dice **ortogonale** se $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$ per ogni $i, j = 1, \dots, t$, con $i \neq j$.

Un insieme finito di vettori $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_t\}$ di \mathbf{V} si dice **ortonormale** se è un insieme ortogonale e vale che $\|\vec{v}_i\| = 1$ per ogni $i = 1, \dots, t$.

Se $\dim V = n$, una **base ortonormale** è una base $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ tale che $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$.

Proposizione 2.3.1 *Se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_t\}$ è un insieme ortogonale di vettori non nulli di \mathbf{V} , allora $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_t\}$ è un insieme linearmente indipendente. Inoltre, se $\dim \mathbf{V} = n$, un insieme ortogonale di n vettori non nulli di \mathbf{V} è una base ortogonale.*

DIM. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_t \vec{v}_t = \vec{0}$. Allora per ogni $j = 1, \dots, t$ risulta

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^t \lambda_i \vec{v}_i, \vec{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^t \lambda_i \langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = \lambda_j,$$

e quindi $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_t\}$ è un insieme linearmente indipendente. In particolare, se $\dim V = n$, un insieme ortogonale di n vettori è linearmente indipendente massimale, cioè una base. \square

Se $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ è una base ortonormale di \mathbf{V}_n , allora $M_B(\langle, \rangle) = I_n$, quindi, rispetto a tale base,

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

In altre parole, la *rappresentazione* di \langle, \rangle rispetto ad una fissata base ortonormale è la stessa del prodotto scalare standard dei vettori di \mathbb{R}^n rispetto alla base canonica di quest'ultimo.

Teorema 2.3.2 *Ogni spazio vettoriale euclideo \mathbf{V}_n possiede basi ortonormali.*

DIM. Poiché \langle, \rangle è definito positivo, segue dal Teorema di Sylvester che esiste una base B' tale che $M_{B'}(\langle, \rangle) = I_n$. Ovviamente, B' è allora una base ortonormale di \mathbf{V}_n . \square

Il seguente teorema descrive un algoritmo per costruire basi ortonormali a partire da basi di uno spazio vettoriale euclideo finitamente generato.

Teorema 2.3.3 (di Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt)

Sia $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ una base di uno spazio vettoriale euclideo \mathbf{V}_n . Allora, l'insieme $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, dove $\vec{e}_k = \frac{\vec{w}_k}{\|\vec{w}_k\|}$ e

$$\begin{cases} \vec{w}_1 = \vec{v}_1, \\ \vec{w}_k = \vec{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{v}_k, \vec{w}_j \rangle}{\langle \vec{w}_j, \vec{w}_j \rangle} \vec{w}_j, \quad k \geq 2, \end{cases}$$

è una base ortonormale di \mathbf{V}_n .

DIM. Dimostriamo per induzione su k che $L(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = L(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k)$ e che $\vec{w}_k \neq \vec{0}$ per ogni $k = 1, \dots, n$. Per $k = 1$ la tesi è banalmente vera. Supponiamo vera la tesi per $k - 1$ e proviamola per k . Supponiamo per assurdo che $\vec{w}_k = \vec{0}$. Allora,

$$\vec{v}_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{v}_k, \vec{w}_j \rangle}{\langle \vec{w}_j, \vec{w}_j \rangle} \vec{w}_j$$

e pertanto $\vec{v}_k \in L(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{k-1}) = L(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1})$ per l'ipotesi induttiva. Quindi \vec{v}_k è combinazione lineare di $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}$. Ma ciò è assurdo, poiché $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_k\}$ è un sottoinsieme della base $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$, e quindi linearmente indipendente. Pertanto, $\vec{w}_k \neq \vec{0}$.

Si noti che

$$\vec{v}_k = -\vec{w}_k + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{v}_k, \vec{w}_j \rangle}{\langle \vec{w}_j, \vec{w}_j \rangle} \vec{w}_j$$

e quindi $\vec{v}_k \in L(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k)$. Pertanto, $L(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) \subseteq L(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k)$. D'altra parte, risulta $L(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{k-1}) \subseteq L(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{k-1})$ per l'ipotesi induttiva e quindi $\vec{w}_k \in L(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_{k-1}, \vec{v}_k) \subseteq L(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k)$. Pertanto $L(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) = L(\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k)$.

Proviamo ora per induzione su k che \vec{w}_k è ortogonale a \vec{w}_j per ogni $j = 1, \dots, k-1$. (Se $k = 1$ non dobbiamo dimostrare nulla.) Se $k = 2$ abbiamo

$$\langle \vec{w}_2, \vec{w}_1 \rangle = \left\langle \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \vec{w}_1, \vec{w}_1 \right\rangle = \langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle = 0.$$

Ora supponiamo vera la tesi per $k-1$ e proviamola per k . Infatti, per ogni $j = 1, \dots, k-1$ vale che

$$\begin{aligned} \langle \vec{w}_k, \vec{w}_j \rangle &= \left\langle \vec{v}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{v}_k, \vec{w}_i \rangle}{\langle \vec{w}_i, \vec{w}_i \rangle} \vec{w}_i, \vec{w}_j \right\rangle = \langle \vec{v}_k, \vec{w}_j \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \vec{v}_k, \vec{w}_i \rangle}{\langle \vec{w}_i, \vec{w}_i \rangle} \langle \vec{w}_i, \vec{w}_j \rangle \\ &= \langle \vec{v}_k, \vec{w}_j \rangle - \frac{\langle \vec{v}_k, \vec{w}_j \rangle}{\langle \vec{w}_j, \vec{w}_j \rangle} \langle \vec{w}_j, \vec{w}_j \rangle = 0. \end{aligned}$$

Pertanto, abbiamo completato la dimostrazione per induzione. In particolare, per $k = n$ concluderemo che $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ è un insieme di n vettori, tutti non nulli, a due a due ortogonali. Quindi $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$ è una base ortogonale di \mathbf{V}_n per la Proposizione 2.3.1. Conseguentemente, $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ è una base ortonormale di \mathbf{V}_n . \square

Esempio 2.3.4 Consideriamo il prodotto scalare su \mathbb{R}^4 definito da:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{2}x_1y_1 + \frac{1}{2}x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4.$$

Applicando il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori

$$\vec{v}_1 = (1, 1, -1, -1), \quad \vec{v}_2 = (1, 1, 1, 1), \quad \vec{v}_3 = (-1, -1, -1, 1), \quad \vec{v}_4 = (1, 0, 0, 1),$$

otteniamo:

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1,$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \vec{w}_1 = \vec{v}_2 + \frac{1}{3} \vec{w}_1 = \frac{2}{3} (2, 2, 1, 1),$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \vec{w}_1 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle} \vec{w}_2 = \vec{v}_3 + \frac{1}{3} \vec{w}_1 + \frac{1}{2} \vec{w}_2 = (0, 0, -1, 1),$$

$$\begin{aligned} \vec{w}_4 &= \vec{v}_4 - \frac{\langle \vec{v}_4, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \vec{w}_1 - \frac{\langle \vec{v}_4, \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle} \vec{w}_2 - \frac{\langle \vec{v}_4, \vec{w}_3 \rangle}{\langle \vec{w}_3, \vec{w}_3 \rangle} \vec{w}_3 \\ &= \vec{v}_4 + \frac{1}{6} \vec{w}_1 - \frac{1}{2} \vec{w}_2 - \frac{1}{2} \vec{w}_3 = \frac{1}{2} (1, -1, 0, 0). \end{aligned}$$

Quindi $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$ è una base ortogonale, e $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ è una base ortonormale di \mathbb{R}^4 , dove

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1, -1), & \vec{e}_2 &= \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}(2, 2, 1, 1), \\ \vec{e}_3 &= \frac{\vec{w}_3}{\|\vec{w}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -1, 1), & \vec{e}_4 &= \frac{\vec{w}_4}{\|\vec{w}_4\|} = (1, -1, 0, 0).\end{aligned}$$

Esercizio 2.3.5 Sia $\varphi \in \mathcal{B}_S(\mathbb{R}^3)$, determinata rispetto alla base canonica B di \mathbb{R}^3 da

$$A = M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Provare che φ è un prodotto scalare (usare il criterio di Sylvester).

(b) Determinare una base ortonormale per φ .

Proposizione 2.3.6 Siano $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ una base ortonormale di \mathbf{V}_n e $\vec{x} = \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j$ un generico vettore di \mathbf{V}_n . Allora,

$$x_i = \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n.$$

DIM. Per ogni $i = 1, \dots, n$ abbiamo

$$\langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n x_j \vec{e}_j, \vec{e}_i \right\rangle = \sum_{j=1}^n x_j \delta_{ji} = x_i \quad \square$$

Proposizione 2.3.7 Siano \mathbf{V} uno spazio vettoriale euclideo (non necessariamente di dimensione finita) e $\mathbf{W} = \mathbf{W}_r$ un qualsiasi sottospazio vettoriale finito-dimensionale di \mathbf{V} . Allora, $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^\perp$.

DIM. Sia $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r\}$ una base ortonormale di \mathbf{W} . Sia $\vec{v} \in \mathbf{V}$, e consideriamo

$$\vec{w} = \langle \vec{v}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \dots + \langle \vec{v}, \vec{e}_r \rangle \vec{e}_r.$$

(la proiezione ortogonale di \vec{v} su \mathbf{W}). Allora, $\vec{v} = \vec{w} + (\vec{v} - \vec{w})$, e proviamo che $\vec{v} - \vec{w} \in \mathbf{W}^\perp$, dimostrando che $\vec{v} - \vec{w}$ è ortogonale a \vec{e}_i , per ogni $i = 1, \dots, r$. Infatti:

$$\begin{aligned}\langle \vec{e}_i, \vec{v} - \vec{w} \rangle &= \langle \vec{e}_i, \vec{v} \rangle - \langle \vec{e}_i, \vec{w} \rangle \\ &= \langle \vec{e}_i, \vec{v} \rangle - \sum_{j=1}^r \langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle \\ &= \langle \vec{e}_i, \vec{v} \rangle - \sum_{j=1}^r \langle \vec{v}, \vec{e}_j \rangle \delta_{ij} \\ &= \langle \vec{e}_i, \vec{v} \rangle - \langle \vec{e}_i, \vec{v} \rangle = 0,\end{aligned}$$

per cui, $\vec{v} - \vec{w} \in W^\perp$. Quindi, $\mathbf{V} = \mathbf{W} + \mathbf{W}^\perp$. Inoltre, $\mathbf{W} \cap \mathbf{W}^\perp = \{\vec{0}\}$, essendo il prodotto scalare \langle, \rangle definito positivo. \square

Osservazione 2.3.8 *Siano \mathbf{V} uno spazio vettoriale euclideo ed \mathbf{U} un suo sotto-spazio di dimensione finita. Dalla Proposizione 2.3.7 segue che per ogni vettore $\vec{x} \in \mathbf{V}$ esistono e sono unici i vettori $\vec{x}_U \in \mathbf{U}$, $\vec{x}_{U^\perp} \in \mathbf{U}^\perp$, tali che $\vec{x} = \vec{x}_U + \vec{x}_{U^\perp}$. Data una base ortonormale $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r\}$ di \mathbf{U} , esplicitamente abbiamo*

$$-) \vec{x}_U = \sum_{i=1}^r \langle \vec{x}, \vec{e}_i \rangle \vec{e}_i;$$

$$-) \vec{x}_{U^\perp} = \vec{x} - \vec{x}_U.$$

Definizione 2.3.9 *I vettori \vec{x}_U e \vec{x}_{U^\perp} si dicono **proiezioni ortogonali** di \vec{x} su U e U^\perp , rispettivamente.*

La seguente proposizione illustra la natura della matrice di passaggio tra basi ortonormali.

Proposizione 2.3.10 *Siano $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ e $B' = \{\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n\}$ due basi di uno spazio vettoriale euclideo \mathbf{V}_n e sia P la matrice di passaggio da B a B' . Se B è ortonormale, allora B' è ortonormale se e solo se $P^t P = I_n$.*

DIM. L' i -esima colonna della matrice P rappresenta le coordinate di \vec{e}'_i rispetto a B . Quindi, $\vec{e}'_i = \sum_h p_{hi} \vec{e}_h$. Allora,

$$\begin{aligned} \langle \vec{e}'_i, \vec{e}'_j \rangle &= \left\langle \sum_{h=1}^n p_{hi} \vec{e}_h, \sum_{k=1}^n p_{kj} \vec{e}_k \right\rangle = \sum_{h,k=1}^n p_{hi} p_{kj} \langle \vec{e}_h, \vec{e}_k \rangle \\ &= \sum_{h,k=1}^n p_{hi} p_{kj} \delta_{hk} = \sum_{h=1}^n p_{hi} p_{hj}. \end{aligned}$$

Quindi, $\langle \vec{e}'_i, \vec{e}'_j \rangle$ è uguale al prodotto della i -esima riga di P^t per la j -esima colonna di P . Pertanto, $\langle \vec{e}'_i, \vec{e}'_j \rangle = \delta_{ij}$ se e solo se $P^t P = I_n$. \square

Esercizi 2.3.11 *1) Consideriamo uno spazio vettoriale euclideo (V, g) ed una sua base ortonormale $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.*

(a) *Determinare U^\perp , dove $U = L(\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{w} = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - 2\vec{v}_3)$*

(b) *Determinare una base ortonormale di (V, g) , formata da vettori di U e di U^\perp .*

(c) *determinare l'espressione esplicita di p_{U^\perp} (proiezione ortogonale su U^\perp).*

2) In \mathbb{R}^4 , munito del prodotto scalare standard, si consideri il sottospazio $W = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, dove

$$\vec{v}_1 = (-1, 0, -1, -1), \quad \vec{v}_2 = (-1, 0, 2, 0), \quad \vec{v}_3 = (-1, 1, 0, 2).$$

(a) Determinare W^\perp .

(b) Determinare una base ortonormale di \mathbb{R}^4 , formata da vettori di W e di W^\perp .

(c) determinare l'espressione esplicita di p_{W^\perp} (proiezione ortogonale su W^\perp).

3) Sia $g \in \mathcal{B}_S(\mathbb{R}^4)$ determinata rispetto alla base canonica B di \mathbb{R}^4 dalla matrice

$$A = M_B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Provare che g è un prodotto scalare.

(b) Determinare una base ortonormale per g .

(c) Determinare la proiezione ortogonale (rispetto a g) del vettore $\vec{x} = (1, 0, 1, -1)$ su $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 = 0\}$.

Capitolo 3

Endomorfismi Simmetrici

In questo capitolo vengono analizzate le principali proprietà dell'aggiunta di un'applicazione lineare, e degli endomorfismi simmetrici (o autoaggiunti).

3.1 Applicazione aggiunta

Teorema 3.1.1 *Siano $(\mathbf{V}_n, \langle, \rangle)$ e $(\mathbf{W}_m, \langle, \rangle')$ spazi vettoriali euclidei e sia $f : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{W}_m$ un'applicazione lineare. Allora esiste un'unica applicazione lineare $f^* : \mathbf{W}_m \rightarrow \mathbf{V}_n$, tale che*

$$\langle f(\vec{v}), \vec{w} \rangle' = \langle \vec{v}, f^*(\vec{w}) \rangle$$

per ogni $\vec{v} \in \mathbf{V}_n, \vec{w} \in \mathbf{W}_m$. L'applicazione f^* è detta **applicazione aggiunta** di f .

DIM. Sia $\vec{w} \in \mathbf{W}_m$ e sia $\theta_{\vec{w}} : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\theta_{\vec{w}}(\vec{v}) = \langle f(\vec{v}), \vec{w} \rangle'$. Poiché f è lineare e \langle, \rangle' è bilineare, segue che $\theta_{\vec{w}}$ è una forma su \mathbf{V}_n , cioè $\theta_{\vec{w}} \in \mathbf{V}_n^*$. Per il Teorema di Riesz, esiste un unico $\vec{x} \in \mathbf{V}_n$ tale che $\theta_{\vec{w}}(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle$.

Consideriamo quindi

$$f^* : \mathbf{W}_m \rightarrow \mathbf{V}_n, \quad \vec{w} \mapsto \vec{x}.$$

Allora, $\langle f(\vec{v}), \vec{w} \rangle' = \theta_{\vec{w}}(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{v}, f^*(\vec{w}) \rangle$ per ogni $\vec{v} \in \mathbf{V}_n, \vec{w} \in \mathbf{W}_m$. Ciò prova l'esistenza e l'unicità di f^* . Rimane da provare che f^* è lineare. Siano $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathbf{W}_m$. Allora per ogni vettore $\vec{v} \in \mathbf{V}_n$ vale che:

$$\begin{aligned} \langle \vec{v}, f^*(\lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2) \rangle &= \langle f(\vec{v}), \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2 \rangle' = \lambda_1 \langle f(\vec{v}), \vec{w}_1 \rangle' + \lambda_2 \langle f(\vec{v}), \vec{w}_2 \rangle' \\ &= \lambda_1 \langle \vec{v}, f^*(\vec{w}_1) \rangle + \lambda_2 \langle \vec{v}, f^*(\vec{w}_2) \rangle \\ &= \langle \vec{v}, \lambda_1 f^*(\vec{w}_1) + \lambda_2 f^*(\vec{w}_2) \rangle \end{aligned}$$

quindi $f^*(\lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2) = \lambda_1 f^*(\vec{w}_1) + \lambda_2 f^*(\vec{w}_2)$, cioè f^* è lineare. \square

Corollario 3.1.2 *Siano $B = \{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ e $B' = \{\vec{e}'_i\}_{i=1}^m$ basi ortonormali di $(\mathbf{V}_n, \langle, \rangle)$ e $(\mathbf{W}_m, \langle, \rangle')$ spazi vettoriali euclidei rispettivamente, e sia $f : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{W}_m$. Allora*

$$M_{B',B}(f^*) = M_{B,B'}(f)^t.$$

DIM. Siano $A = M_{B,B'}(f)$ e $A' = M_{B',B}(f^*)$, allora $A = (a_{ij})$ e $A' = (a'_{ij})$. Quindi a'_{ij} è la i -esima componente di $f^*(\vec{e}'_j)$ rispetto alla base B , pertanto $a'_{ij} = \langle f^*(\vec{e}'_j), \vec{e}_i \rangle$ essendo B una base ortonormale di \mathbf{V}_n . Quindi

$$a'_{ij} = \langle f^*(\vec{e}'_j), \vec{e}_i \rangle = \langle \vec{e}'_j, f(\vec{e}_i) \rangle' = \langle f(\vec{e}_i), \vec{e}'_j \rangle' = a_{ji}$$

essendo $\langle f(\vec{e}_i), \vec{e}'_j \rangle'$ la j -esima componente della decomposizione di $f(\vec{e}_i)$ rispetto alla base ortonormale B' di \mathbf{W}_m . \square

Teorema 3.1.3 *Siano f^* e g^* le applicazioni aggiunte di f e g rispettivamente. Allora si ha che*

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

DIM. Siano f, g applicazioni lineari e f^*, g^* le rispettive applicazioni aggiunte. Per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}_n$:

$$\langle (f \circ g)(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, (f \circ g)^*(\vec{y}) \rangle.$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} \langle (f \circ g)(\vec{x}), \vec{y} \rangle &= \langle f(g(\vec{x})), \vec{y} \rangle = \langle g(\vec{x}), f^*(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, g^*(f^*(\vec{y})) \rangle \\ &= \langle \vec{x}, (g^* \circ f^*)(\vec{y}) \rangle. \end{aligned}$$

Pertanto $\langle \vec{x}, (f \circ g)^*(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, (g^* \circ f^*)(\vec{y}) \rangle$ per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}_n$ e quindi

$$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*. \quad \square$$

Esercizio 3.1.4 *Determinare l'espressione esplicita dell'applicazione aggiunta delle seguenti applicazioni lineari (considerando su \mathbb{R}^n il prodotto scalare standard):*

$$(a) f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad (x, y, z) \mapsto (2x - z, 3x, y - 2z, x + y);$$

$$(b) f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_4 - x_3, 2x_1, x_1 + x_2 + x_4);$$

$$(c) f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_4, 2x_1 - x_3, x_1, x_2 + x_4).$$

Analizzeremo due classi di endomorfismi particolarmente rilevanti: quelli che coincidono con l'aggiunta (endomorfismi simmetrici o autoaggiunti), e quelli invertibili la cui inversa coincide con l'applicazione aggiunta (isometrie lineari).

3.2 Endomorfismi simmetrici o autoaggiunti

Definizione 3.2.1 Sia $(\mathbf{V}_n, \langle, \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo. Un endomorfismo $f : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_n$ si dice **simmetrico** (o autoaggiunto) se e solo se

$$\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle$$

per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}_n$. Quindi f è simmetrico se coincide con la sua applicazione aggiunta.

Esempio 3.2.2 Sia \mathbf{U} un sottospazio di uno spazio vettoriale euclideo finitamente generato \mathbf{V} . Allora, la proiezione ortogonale $p : \vec{x} \mapsto \vec{x}_{\mathbf{U}}$ è un endomorfismo simmetrico. Infatti, posto $p(\vec{x}) = \vec{x}_{\mathbf{U}}$ e $p(\vec{y}) = \vec{y}_{\mathbf{U}}$, si ha:

$$\langle p(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}_{\mathbf{U}}, \vec{y} - \vec{y}_{\mathbf{U}} + \vec{y}_{\mathbf{U}} \rangle = \langle \vec{x}_{\mathbf{U}}, \vec{y} - \vec{y}_{\mathbf{U}} \rangle + \langle \vec{x}_{\mathbf{U}}, \vec{y}_{\mathbf{U}} \rangle = \langle \vec{x}, p(\vec{y}) \rangle,$$

in quanto $\langle \vec{x}_{\mathbf{U}}, \vec{y} - \vec{y}_{\mathbf{U}} \rangle = 0$ essendo $\vec{y} - \vec{y}_{\mathbf{U}} \in \mathbf{U}^{\perp}$.

Teorema 3.2.3 La matrice che rappresenta un endomorfismo simmetrico f di \mathbf{V}_n rispetto ad una base ortonormale $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ è una matrice reale simmetrica.

DIM. L'asserto segue dal Corollario 3.1.2. \square

Proposizione 3.2.4 Consideriamo uno spazio vettoriale euclideo $(\mathbf{V}_n, \langle, \rangle)$ ed un endomorfismo simmetrico $f : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_n$. Se f è invertibile, allora f^{-1} è simmetrico.

DIM. Siano $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}_n$ e $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}_n$ tali che $\vec{x} = f(\vec{v})$ e $\vec{y} = f(\vec{w})$. Allora:

$$\langle f^{-1}(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{v}, f(\vec{w}) \rangle = \langle f(\vec{v}), \vec{w} \rangle = \langle \vec{x}, f^{-1}(\vec{y}) \rangle. \quad \square$$

Se f è un endomorfismo simmetrico di \mathbf{V} , la funzione $Q_f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$Q_f(\vec{x}) = \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle, \quad \text{per ogni } \vec{x} \in \mathbf{V}, \quad (3.2.1)$$

si dice **forma quadratica associata ad f** .

Se \mathbf{V} ha dimensione n , $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{V}_n$ e $A = (a_{ij})$ è la matrice associata a f rispetto ad una base ortonormale, allora:

$$Q_f(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = X^t A X.$$

Teorema 3.2.5 *Dato uno spazio vettoriale euclideo \mathbf{V}_n di dimensione finita, esiste una corrispondenza biunivoca tra gli endomorfismi simmetrici di \mathbf{V}_n e le forme quadratiche su \mathbf{V}_n .*

DIM. f individua Q_f attraverso la (3.2.1). Viceversa, data Q , proviamo che esiste un unico endomorfismo simmetrico f corrispondente ad essa. Infatti, basta osservare che

$$Q(\vec{x} + \vec{y}) = \langle f(\vec{x} + \vec{y}), \vec{x} + \vec{y} \rangle = Q(\vec{x}) + \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle + \langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle + Q(\vec{y}),$$

e, essendo f simmetrico,

$$\langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \frac{1}{2} \{Q(\vec{x} + \vec{y}) - Q(\vec{x}) - Q(\vec{y})\}. \quad \square$$

3.3 Autovalori di un endomorfismo simmetrico

In questo capitolo analizzeremo le proprietà fondamentali relative agli autovalori di un endomorfismo simmetrico.

Teorema 3.3.1 *Le soluzioni dell'equazione caratteristica di una matrice reale simmetrica sono tutte reali.*

DIM. Sia $\mathbf{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ il polinomio caratteristico associato alla matrice $A \in S_n(\mathbb{R})$. Come conseguenza del Teorema fondamentale dell'algebra, $\mathbf{P}_A(\lambda)$ è interamente decomponibile in \mathbb{C} . Pertanto, sia $\lambda_1 = a_1 + ib_1$ una soluzione di $\mathbf{P}_A(\lambda) = 0$. Si consideri il sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite

$$(A - \lambda_1 I_n)X = 0.$$

Esso ammette almeno una soluzione $Z_1 = X_1 + iY_1 \in \mathbb{C}^{n,1}$, con $X_1, Y_1 \in \mathbb{R}^{n,1}$ non entrambi nulli. Quindi,

$$AZ_1 = \lambda_1 Z_1$$

cioè

$$A(X_1 + iY_1) = (a_1 + ib_1)(X_1 + iY_1).$$

Uguagliando le parti reali ed immaginarie si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} AX_1 = a_1 X_1 - b_1 Y_1, \\ AY_1 = b_1 X_1 + a_1 Y_1. \end{cases}$$

Sia f l'endomorfismo simmetrico di \mathbb{R}^n , munito del prodotto scalare standard, avente A per matrice associata rispetto alla base canonica. Allora,

$$\begin{cases} f(X_1) = a_1X_1 - b_1Y_1, \\ f(Y_1) = b_1X_1 + a_1Y_1. \end{cases}$$

Pertanto:

$$\langle f(X_1), Y_1 \rangle = a_1X_1Y_1 - b_1\|Y_1\|^2, \quad \langle X_1, f(Y_1) \rangle = b_1\|X_1\|^2 + a_1Y_1X_1,$$

e quindi

$$b_1 (\|X_1\|^2 + \|Y_1\|^2) = 0.$$

Poiché almeno uno tra X_1 e Y_1 è non nullo, risulta $\|X_1\|^2 + \|Y_1\|^2 > 0$. Quindi $b_1 = 0$, cioè, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. \square

Corollario 3.3.2 *Sia f un endomorfismo simmetrico dello spazio vettoriale euclideo $(\mathbf{V}_n, \langle, \rangle)$. Allora tutte le soluzioni dell'equazione caratteristica di f sono reali.*

DIM. Se B è una base ortonormale di $(\mathbf{V}_n, \langle, \rangle)$, allora $M_B(f)$ è simmetrica. Poiché vale $\mathbf{P}_f(\lambda) = \mathbf{P}_A(\lambda)$, la tesi segue dal Teorema 3.3.1. \square

Teorema 3.3.3 *Sia f un endomorfismo simmetrico di $(\mathbf{V}_n, \langle, \rangle)$. Se λ_1, λ_2 sono due autovalori distinti di f , allora gli autospazi $V(\lambda_1)$ e $V(\lambda_2)$ sono ortogonali.*

DIM. Siano $\vec{x} \in V(\lambda_1)$ e $\vec{y} \in V(\lambda_2)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Allora $f(\vec{x}) = \lambda_1\vec{x}$ e $f(\vec{y}) = \lambda_2\vec{y}$. Poiché f è simmetrico vale che:

$$\langle \lambda_1\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle f(\vec{x}), \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \lambda_2\vec{y} \rangle.$$

Quindi

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0,$$

da cui si ha che $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$. \square

Teorema 3.3.4 (spettrale) *Sia f un endomorfismo simmetrico di $(\mathbf{V}_n, \langle, \rangle)$. Allora esiste B base ortonormale di autovettori di f . In particolare, f è semplice, ovvero $M_B(f)$ è una matrice diagonale.*

DIM. Procediamo per induzione sulla dimensione n dello spazio vettoriale.

Per $n = 1$ la tesi è banalmente vera.

Supponiamo l'asserto vero per $n - 1$ e dimostriamolo per n . Sia λ_1 un autovalore reale di f , la sua esistenza è garantita dal Teorema 3.3.1. Sia \vec{u}_1 un autovettore

di f , di norma 1, relativo a λ_1 , e sia \mathbf{V}_{n-1} il sottospazio di \mathbf{V}_n ortogonale ad \vec{u}_1 . Si consideri la restrizione $f|_{\mathbf{V}_{n-1}}$ di f al sottospazio \mathbf{V}_{n-1} . Se $\vec{x} \in \mathbf{V}_{n-1}$, allora

$$\langle f(\vec{x}), \vec{u}_1 \rangle = \langle \vec{x}, f(\vec{u}_1) \rangle = \langle \vec{x}, \lambda_1 \vec{u}_1 \rangle = 0,$$

vale a dire che $f(\vec{x}) \in \mathbf{V}_{n-1}$. Pertanto, \mathbf{V}_{n-1} è f -invariante, e la restrizione $f|_{\mathbf{V}_{n-1}}$ è un endomorfismo di \mathbf{V}_{n-1} (ovviamente simmetrico, poiché f è simmetrico). Per l'ipotesi induttiva, esiste una base ortonormale $\{\vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ di \mathbf{V}_{n-1} costituita da autovettori di $f|_{\mathbf{V}_{n-1}}$ (e quindi di f). Ma allora, $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ è la base ortonormale di \mathbf{V}_n cercata. Rispetto a tale base l'endomorfismo simmetrico f è rappresentato dalla matrice:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad \square$$

Se \vec{x} ha componenti (x_1, x_2, \dots, x_n) rispetto alla base ortonormale di autovettori $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$, allora

$$f(\vec{x}) = \lambda_1 x_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 x_2 \vec{u}_2 + \dots + \lambda_n x_n \vec{u}_n$$

e quindi

$$Q_f(\vec{x}) = \langle f(\vec{x}), \vec{x} \rangle = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2. \quad (3.3.1)$$

La (3.3.1) è detta **forma canonica della forma quadratica associata ad f** .

Osservazione 3.3.5 *Si noti che la forma canonica di Q_f è completamente determinata dagli autovalori di f . Di conseguenza, se A è la matrice che rappresenta una forma quadratica Q (equivalentemente, una forma bilineare simmetrica φ), e quindi il corrispondente endomorfismo simmetrico rispetto ad un fissato prodotto scalare, allora:*

- per scrivere Q in forma canonica è sufficiente determinare gli autovalori di A ;
- per stabilire la segnatura di Q (equivalentemente, di φ) basta stabilire il segno degli autovalori di A (“Regola di Cartesio”);
- per determinare una base rispetto a cui sussiste tale forma canonica si devono determinare gli autospazi di f (corrispondenti alle soluzioni dei sistemi omogenei $(A - \lambda I)X = 0$, per ogni autovalore λ di A).

Esercizio 3.3.6 Si consideri lo spazio euclideo (\mathbb{R}^3, \cdot) .

a) Determinare una base di \mathbb{R}^3 rispetto a cui la forma quadratica

$$Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto y^2 + 4yz + 4z^2.$$

assume forma canonica, e descrivere tale forma canonica.

b) Determinare la segnatura della forma quadratica

$$Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto 2xy + y^2 + 4yz + 4z^2.$$

Definizione 3.3.7 Un endomorfismo simmetrico f di \mathbf{V}_n si dice **semidefinito positivo** se tutti i suoi autovalori sono non negativi, e quindi $Q_f(\vec{x}) \geq 0$ per ogni $\vec{x} \in \mathbf{V}_n$. In particolare, f si dice **definito positivo** se tutti gli autovalori di f sono strettamente positivi.

Sia f un endomorfismo simmetrico semidefinito positivo e sia $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ una base ortonormale di autovettori per f . Consideriamo l'endomorfismo di \mathbf{V}_n rappresentato rispetto alla stessa base B dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Chiaramente, è anch'esso un endomorfismo simmetrico di \mathbf{V}_n , detto **radice quadrata di f** e indicato con \sqrt{f} . Il nome è giustificato dal fatto che \sqrt{f} è semidefinito positivo e $\sqrt{f} \circ \sqrt{f} = f$.

Rispetto ad una qualsiasi base B l'endomorfismo \sqrt{f} sarà rappresentato da una matrice $M_B(\sqrt{f})$, in generale non diagonale, ma che comunque verifica $M_B(\sqrt{f})^2 = M_B(f)$.

Esercizio 3.3.8 Per ciascuno dei seguenti endomorfismi simmetrici $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dello spazio euclideo (\mathbb{R}^n, \cdot) , determinare una base ortonormale di autovettori e, se esiste, l'operatore radice quadrata \sqrt{f} . Determinare inoltre la forma canonica della corrispondente forma quadratica.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x + 2y, 2x + y, -z)$.

(b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ determinata rispetto alla base canonica da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ determinata rispetto alla base canonica da

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ determinata dalla forma quadratica
 $Q(x, y, z) = 8x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4xy - 4xz + 8yz$.

(e) $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ determinata rispetto alla base canonica da

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3.3.9 Consideriamo uno spazio vettoriale euclideo (V, g) ed una sua base ortonormale $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$. Sia \vec{w}_0 il versore corrispondente al vettore $\vec{w} = -\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - 2\vec{v}_3$.

Provare che $f : V \rightarrow V$, $\vec{x} \mapsto \vec{x} - 2g(\vec{x}, \vec{w}_0)\vec{w}_0$, è un endomorfismo simmetrico, e determinare una base ortonormale di autovettori per f .

Capitolo 4

Isometrie, trasformazioni ortogonali e movimenti

In questo capitolo si considerano le trasformazioni degli spazi vettoriali euclidei, compatibili con il loro prodotto scalare (isometrie lineari, trasformazioni ortogonali) e con la loro distanza (movimenti).

4.1 Isometrie. Spazi euclidei isometrici.

Definizione 4.1.1 *Siano (\mathbf{V}, g) e (\mathbf{W}, h) due spazi vettoriali euclidei. Una **isometria lineare** da \mathbf{V} in \mathbf{W} è una applicazione lineare $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ che ne preserva i prodotti scalari, cioè, tale che*

$$h(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = g(\vec{x}, \vec{y}), \quad \text{per ogni } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}.$$

Osservazione 4.1.2 *Si deve prestare attenzione al fatto che diversi testi usano il termine “isometria” con differenti significati. In alcuni casi, si sottintende l’aggettivo lineare, chiamando isometria quella che nella precedente Definizione abbiamo chiamato isometria lineare; in altri, per isometria si intende una applicazione, non necessariamente lineare, che conserva la distanza indotta dal prodotto scalare (cfr. la sezione “Movimenti”).*

Per evitare fraintendimenti, in questa sezione parleremo di isometrie (lineari) nel senso della precedente Definizione, mentre nei paragrafi successivi, occupandoci di endomorfismi che conservano il prodotto scalare e di applicazioni che conservano le distanze, useremo rispettivamente la terminologia “trasformazione ortogonale” e “movimento”.

Osservazione 4.1.3 *Poiché conserva il prodotto scalare, un’isometria lineare trasforma vettori ortogonali (rispettivamente, ortonormali) in vettori ortogonali (rispettivamente, ortonormali).*

Lemma 4.1.4 *Siano (\mathbf{V}, g) e (\mathbf{W}, h) due spazi vettoriali euclidei e $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una isometria lineare. Allora f è iniettiva.*

DIM. Se $\vec{x} \in \ker f$, allora $f(\vec{x}) = 0$. Pertanto,

$$0 = h(f(\vec{x}), f(\vec{x})) = g(\vec{x}, \vec{x}) = \|\vec{x}\|_g^2,$$

da cui segue che $\vec{x} = \vec{0}$ e quindi che f è iniettiva. \square

Proposizione 4.1.5 *Siano (\mathbf{V}, g) e (\mathbf{W}, h) due spazi vettoriali euclidei e $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una applicazione lineare. Allora, sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- i. f è una trasformazione ortogonale;*
- ii. $\|f(\vec{x})\|_h = \|\vec{x}\|_g$, per ogni $\vec{x} \in \mathbf{V}$.*

DIM. “(i) \Rightarrow (ii)”: Banale: per ogni $\vec{x} \in \mathbf{V}$:

$$\|f(\vec{x})\|_h = \sqrt{h(f(\vec{x}), f(\vec{x}))} = \sqrt{g(\vec{x}, \vec{x})} = \|\vec{x}\|_g.$$

“(ii) \Rightarrow (i)”: Segue subito dalla identità di polarizzazione. \square

Proposizione 4.1.6 *Siano (\mathbf{V}, g) e (\mathbf{W}, h) due spazi vettoriali euclidei ed $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ una isometria lineare. Se f è invertibile, allora f^{-1} è ancora un’isometria lineare.*

DIM. E’ ben noto che l’inversa di una applicazione lineare, quando esiste, è anch’essa lineare. Sia ora f^{-1} l’inversa di una isometria lineare $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$. Dati due arbitrari vettori $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathbf{W}$, siano $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbf{V}$, tali che $\vec{y}_i = f(\vec{x}_i)$, per $i = 1, 2$. Allora:

$$\begin{aligned} g(f^{-1}(\vec{y}_1), f^{-1}(\vec{y}_2)) &= g(f^{-1}(f(\vec{x}_1)), f^{-1}(f(\vec{x}_2))) = g(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = h(f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2)) \\ &= h(\vec{y}_1, \vec{y}_2), \end{aligned}$$

e quindi f^{-1} è anch’essa un’isometria (lineare). \square

Definizione 4.1.7 *Due spazi vettoriali euclidei (\mathbf{V}, g) e (\mathbf{W}, h) si dicono **isometrici** se esiste un’isometria lineare invertibile $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$.*

Osservazione 4.1.8 *E’ facile verificare che l’essere isometrici è una relazione di equivalenza nella classe degli spazi euclidei.*

E’ ben noto che due spazi vettoriali di dimensione finita (definiti sullo stesso campo) sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione. L’analogo risultato per gli spazi vettoriali euclidei è il seguente

Teorema 4.1.9 *Due spazi vettoriali euclidei (\mathbf{V}_n, g) e (\mathbf{W}_m, h) di dimensione finita sono isometrici se e solo se hanno la stessa dimensione.*

DIM. La condizione è ovviamente necessaria, perché una isometria lineare invertibile è in particolare un isomorfismo, e due spazi vettoriali di diversa dimensione non sono nemmeno isomorfi.

Viceversa, supponiamo che $n = m$. Dal Teorema 1.4.4, (\mathbf{V}_n, g) e (\mathbf{W}_n, h) ammettono delle basi ortonormali $B = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ e $B' = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n\}$. Definiamo

$$f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$$

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{v}_i \mapsto \sum_{i=1}^n x_i \vec{w}_i$$

(ossia, l'applicazione lineare determinata univocamente da $f(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ per ogni indice $i = 1, \dots, n$). Dalla sua definizione segue facilmente che f è lineare. Inoltre, $f(B) = B'$, e quindi f è invertibile.

Infine, tenendo conto del fatto che sia B che B' sono basi ortonormali, risulta, per ogni $\vec{x} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{v}_i, \vec{y} = \sum_{j=1}^n y_j \vec{v}_j \in \mathbf{V}_n$:

$$h(f(\vec{x}), (\vec{y})) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j h(\vec{w}_i, \vec{w}_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j g(\vec{v}_i, \vec{v}_j)$$

$$= g(\vec{x}, \vec{y}).$$

Quindi f è un'isometria, lineare e invertibile per cui (\mathbf{V}_n, g) e (\mathbf{W}_n, h) sono isometrici. \square

Come conseguenza del Teorema 4.1.9, a meno di isometrie esiste un unico spazio vettoriale euclideo di assegnata dimensione finita n :

Corollario 4.1.10 *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, ogni spazio vettoriale euclideo (\mathbf{V}_n, g) è isometrico a (\mathbb{R}^n, \cdot) .*

Di conseguenza, senza perdere di generalità, è sufficiente studiare le proprietà di (\mathbb{R}^n, \cdot) per avere le corrispondenti informazioni su ogni spazio vettoriale euclideo avente la stessa dimensione.

Osservazione 4.1.11 *La definizione di isometria si può estendere a spazi vettoriali (V, φ) e (W, ψ) muniti di arbitrarie forme bilineari simmetriche. L'argomento usato per dimostrare il Teorema 4.1.9 si estende ad arbitrarie forme bilineari simmetriche: (V_n, φ) e (W_m, ψ) sono isometrici se e solo se φ e ψ hanno la stessa segnatura (si noti che in particolare, in tal caso $n = m$).*

Nel caso di spazi vettoriali reali, questo risultato si può dedurre dal Teorema di Sylvester.

4.2 Trasformazioni ortogonali

In questa sezione viene analizzata un'importante classe di automorfismi di uno spazio vettoriale euclideo: le trasformazioni ortogonali. In particolare, vengono classificate in dimensione 2 e 3.

Definizione 4.2.1 Sia $(\mathbf{V}, \langle, \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo. Una **trasformazione ortogonale** di $(\mathbf{V}, \langle, \rangle)$ è una isometria lineare $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, ossia, un endomorfismo di \mathbf{V} che ne preserva il prodotto scalare:

$$\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle, \quad \text{per ogni } \vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}.$$

Esempio 4.2.2 Se $\mathbf{V}_n = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp$, allora l'endomorfismo

$$\begin{aligned} f : \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp &\rightarrow \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp \\ \vec{x} = \vec{x}_\mathbf{U} + \vec{x}_{\mathbf{U}^\perp} &\mapsto \vec{x}_\mathbf{U} - \vec{x}_{\mathbf{U}^\perp}, \end{aligned}$$

è una trasformazione ortogonale, detta **simmetria ortogonale** rispetto a \mathbf{U} . Infatti, poiché $\langle \vec{x}_\mathbf{U}, \vec{y}_{\mathbf{U}^\perp} \rangle = \langle \vec{x}_{\mathbf{U}^\perp}, \vec{y}_\mathbf{U} \rangle = 0$, si ha:

$$\begin{aligned} \langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle &= \langle \vec{x}_\mathbf{U} - \vec{x}_{\mathbf{U}^\perp}, \vec{y}_\mathbf{U} - \vec{y}_{\mathbf{U}^\perp} \rangle \\ &= \langle \vec{x}_\mathbf{U}, \vec{y}_\mathbf{U} \rangle - \langle \vec{x}_\mathbf{U}, \vec{y}_{\mathbf{U}^\perp} \rangle - \langle \vec{x}_{\mathbf{U}^\perp}, \vec{y}_\mathbf{U} \rangle + \langle \vec{x}_{\mathbf{U}^\perp}, \vec{y}_{\mathbf{U}^\perp} \rangle \\ &= \langle \vec{x}_\mathbf{U}, \vec{y}_\mathbf{U} \rangle + \langle \vec{x}_\mathbf{U}, \vec{y}_{\mathbf{U}^\perp} \rangle + \langle \vec{x}_{\mathbf{U}^\perp}, \vec{y}_\mathbf{U} \rangle + \langle \vec{x}_{\mathbf{U}^\perp}, \vec{y}_{\mathbf{U}^\perp} \rangle \\ &= \langle \vec{x}_\mathbf{U} + \vec{x}_{\mathbf{U}^\perp}, \vec{y}_\mathbf{U} + \vec{y}_{\mathbf{U}^\perp} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle. \end{aligned}$$

Esercizio 4.2.3 Provare che f dell'Esempio 4.2.2 è anche un endomorfismo simmetrico.

Ogni trasformazione ortogonale è iniettiva, come conseguenza del Lemma 4.1.4. Di conseguenza, se lo spazio euclideo ha dimensione finita, una trasformazione ortogonale è necessariamente un automorfismo. Proviamo ora la seguente caratterizzazione.

Teorema 4.2.4 Siano $(\mathbf{V}_n, \langle, \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e $f : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_n$ un endomorfismo. Allora, sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- (i) f è una trasformazione ortogonale;
- (ii) $\|f(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$, per ogni $\vec{x} \in \mathbf{V}_n$;
- (iii) $f^* = f^{-1}$.

DIM. L'equivalenza di (i) e (ii) vale più in generale (cfr. Teorema 4.1.5).

“(ii) \Rightarrow (iii)” f è iniettiva per il Lemma 4.1.4, e quindi invertibile, essendo \mathbf{V}_n di dimensione finita. Siano $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}_n$, allora vale che

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, f^*(f(\vec{y})) \rangle &= \langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle \\ &= \frac{1}{2} (\|f(\vec{x}) + f(\vec{y})\|^2 - \|f(\vec{x})\|^2 - \|f(\vec{y})\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|f(\vec{x} + \vec{y})\|^2 - \|f(\vec{x})\|^2 - \|f(\vec{y})\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\langle \vec{x}, \vec{y} - f^*(f(\vec{y})) \rangle = 0$$

per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}_n$. Allora $\vec{y} = f^*(f(\vec{y}))$ per ogni $\vec{y} \in \mathbf{V}_n$, cioè $f^* = f^{-1}$.

“(iii) \Rightarrow (i)” Siano $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}_n$ e sia f tale che $f^* = f^{-1}$, allora

$$\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, f^*(f(\vec{y})) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle. \quad \square$$

Proposizione 4.2.5 *Siano $(\mathbf{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo ed f una trasformazione ortogonale. Allora f conserva gli angoli.*

DIM. Essendo f una trasformazione ortogonale, si ha (tenendo conto del punto ii. dell'ultimo Teorema)

$$(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = \arccos \left(\frac{\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle}{\|f(\vec{x})\| \|f(\vec{y})\|} \right) = \arccos \left(\frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \right) = (\vec{x}, \vec{y}) \quad \square$$

Osservazione 4.2.6 *Mostriamo con un controesempio che il viceversa non vale. Sia $f(\vec{x}) = \rho\vec{x}$, con $\rho \neq -1, 0, 1$ (omotetia o dilatazione). Allora f è una trasformazione che conserva gli angoli. Infatti:*

$$\begin{aligned} (f(\vec{x}), f(\vec{y})) &= \arccos \left(\frac{\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle}{\|f(\vec{x})\| \|f(\vec{y})\|} \right) = \arccos \left(\frac{\langle \rho\vec{x}, \rho\vec{y} \rangle}{\|\rho\vec{x}\| \|\rho\vec{y}\|} \right) \\ &= \arccos \left(\frac{\rho^2 \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\rho^2 \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \right) = \arccos \left(\frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} \right) \\ &= (\vec{x}, \vec{y}). \end{aligned}$$

D'altra parte, se f fosse una trasformazione ortogonale, allora dovrebbe valere

$$\|\vec{x}\| = \|f(\vec{x})\| = |\rho| \|\vec{x}\|,$$

per ogni \vec{x} , e quindi $\rho = \pm 1$, contrariamente a quanto assunto.

Teorema 4.2.7 *Se λ è un autovalore reale della trasformazione ortogonale f di \mathbf{V}_n , allora $\lambda = \pm 1$.*

DIM. Sia f una trasformazione ortogonale e supponiamo che λ sia un autovalore reale di f ed $\vec{x} \neq \vec{0}$ un autovettore ad esso relativo. Allora,

$$\|\vec{x}\| = \|f(\vec{x})\| = \|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|,$$

e quindi $|\lambda| = 1$ essendo $\|\vec{x}\| \neq 0$. Pertanto, $\lambda = \pm 1$ \square

Osservazione 4.2.8 *Il Teorema non asserisce che le trasformazioni ortogonali hanno sempre autovalori reali!*

Si consideri ad esempio in \mathbb{R}^2 , munito del prodotto scalare standard, l'applicazione f tale che

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove B è la base canonica. E' facile verificare che f è una trasformazione ortogonale. Tuttavia, f non ha autovalori reali poiché il suo polinomio caratteristico $\mathbf{P}_f(\lambda) = \lambda^2 + 1$ non ha zeri reali.

Esempio 4.2.9 *Se $\mathbf{V}_n = \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp$, la simmetria ortogonale*

$$f : \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp \rightarrow \mathbf{U} \oplus \mathbf{U}^\perp, \vec{x} = \vec{x}_\mathbf{U} + \vec{x}_{\mathbf{U}^\perp} \mapsto f(\vec{x}) = \vec{x}_\mathbf{U} - \vec{x}_{\mathbf{U}^\perp},$$

è un endomorfismo simmetrico, e quindi semplice. Infatti:

- se $\mathbf{U} = \mathbf{V}_n$ allora $\mathbf{U}^\perp = \{\vec{0}\}$ e quindi $f = Id$;
- se $\mathbf{U} = \{\vec{0}\}$ e $\mathbf{U}^\perp = \mathbf{V}_n$, allora $f = -Id$.
- Nei restanti casi non banali ($\mathbf{U} \neq \mathbf{V}_n, \{\vec{0}\}$), siano $B_\mathbf{U}$ e $B_{\mathbf{U}^\perp}$ basi ortonormali di \mathbf{U} e di \mathbf{U}^\perp rispettivamente. Allora, $B = B_\mathbf{U} \cup B_{\mathbf{U}^\perp}$ è base ortonormale di \mathbf{V}_n , rispetto alla quale

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix},$$

dove $k = \dim \mathbf{U}$.

Proposizione 4.2.10 *Siano B una base ortonormale di uno spazio vettoriale euclideo $(\mathbf{V}_n, \langle, \rangle)$ e f una sua trasformazione ortogonale. Allora, $A = M_B(f)$ è una matrice ortogonale, cioè $A^t = A^{-1}$.*

DIM. Segue dal Corollario 3.1.2 e dal punto (iii) del Teorema 4.2.4 \square

Teorema 4.2.11 Dato uno spazio vettoriale euclideo $(\mathbf{V}_n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, l'insieme

$$O(\mathbf{V}_n) = \{f \mid f \text{ è una trasformazione ortogonale di } \mathbf{V}_n\}$$

è un gruppo rispetto alla composizione di funzioni.

DIM. Date $f, g \in O(\mathbf{V}_n)$, vale, per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}_n$,

$$\langle (f \circ g)(\vec{x}), (f \circ g)(\vec{y}) \rangle = \langle f(g(\vec{x})), f(g(\vec{y})) \rangle = \langle g(\vec{x}), g(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle,$$

pertanto $f \circ g \in O(\mathbf{V}_n)$. Inoltre, la composizione di funzioni è associativa, e l'identità appartiene a $O(\mathbf{V}_n)$. Infine, se $f \in O(\mathbf{V}_n)$, allora f è invertibile per il Teorema 4.2.4, e f^{-1} (ovviamente lineare) è ancora una trasformazione ortogonale per la Proposizione 4.1.6). \square

Esempio 4.2.12 Mostriamo, attraverso un controesempio, che $(O(\mathbf{V}_n), \circ)$ non è in generale un gruppo abeliano.

Siano $f, g \in O(\mathbb{R}^2)$ rappresentati, rispetto alla base canonica B di \mathbb{R}^2 , dalle seguenti matrici:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_B(g) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, \pi], \theta \neq 0, \pi.$$

Allora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix},$$

mentre

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Consideriamo

$$O(n) := O(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t A = I\},$$

allora è facile vedere che:

- $O(n, \mathbb{R})$ è un gruppo (detto *gruppo ortonormale di ordine n*) rispetto al prodotto righe per colonne di matrici;
- se $A \in O(n, \mathbb{R})$, poiché $A^t A = I$, dal Teorema di Binet segue che $\det A = \pm 1$.

Teorema 4.2.13 *Sia B una base ortonormale di $(\mathbf{V}_n, \langle, \rangle)$. Allora, l'applicazione*

$$\begin{aligned} F : O(\mathbf{V}_n) &\rightarrow O(n, \mathbb{R}), \\ f &\mapsto M_B(f) \end{aligned}$$

è un isomorfismo di gruppi.

DIM. F è ben posta per la Proposizione 4.2.10: la matrice associata ad una trasformazione ortogonale, rispetto ad una base ortonormale, è ortogonale. Siano $f, g \in O(\mathbf{V}_n)$ e B una base ortonormale di \mathbf{V}_n . Allora:

$$F(f \circ g) = M_B(f \circ g) = M_B(f)M_B(g) = F(f)F(g).$$

Pertanto, F è un omomorfismo di gruppi.

Sia $f \in \ker F$. Allora $F(f) = I_n$, e quindi $f = Id_{\mathbf{V}_n}$. Pertanto F è iniettiva.

Infine, sia $A \in O(n, \mathbb{R})$ tale che $A = M_B(f)$ dove B è una base ortonormale di \mathbf{V}_n . Allora, dalla definizione di applicazione aggiunta si ha:

$$\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x}, f^* f(\vec{y}) \rangle,$$

cioè, essendo B ortonormale,

$$(AX)^t \cdot (AY) = X^t \cdot (A^* AY),$$

dove $A^* = M_B(f^*)$. Ma $A^* = A^t$ per il Corollario 3.1.2. Quindi, poiché $A \in O(n, \mathbb{R})$, abbiamo

$$\langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle = (AX)^t \cdot (AY) = X^t \cdot (A^t AY) = X^t \cdot Y = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle,$$

cioè f è una trasformazione ortogonale. Pertanto F è suriettiva. Quindi F è un isomorfismo di gruppi \square

Teorema 4.2.14 *Una matrice reale simmetrica A si può diagonalizzare mediante una matrice ortogonale P , cioè data $A \in S_n(\mathbb{R})$ esiste $P \in O(n, \mathbb{R})$ tale che*

$$D = P^{-1}AP = P^t AP$$

sia diagonale.

DIM. Siano $A \in S_n(\mathbb{R})$ e

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad X \mapsto AX$$

il corrispondente endomorfismo simmetrico di \mathbb{R}^n , determinato da A rispetto alla base canonica. Per il Teorema spettrale, f ammette una base ortonormale $B' = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ di autovettori, e la matrice P del cambiamento dalla base canonica a B' (entrambe ortonormali) è una matrice ortogonale (Proposizione 2.3.10). Pertanto,

$$D = M_{B'}(f) = P^{-1}AP = P^t AP \quad \square$$

Vale anche il risultato inverso:

Teorema 4.2.15 *Se A è una matrice reale che si diagonalizza mediante una matrice ortogonale, allora A è simmetrica.*

DIM. Sia A una matrice diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale P . Allora esiste una matrice diagonale D tale che $D = P^t A P$. Pertanto $A = P D P^t$ e quindi

$$A^t = (P D P^t)^t = (P^t)^t D^t P^t = P D P^t = A \quad \square$$

Teorema 4.2.16 (di Decomposizione Polare)

Sia $f : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_n$ un automorfismo di uno spazio vettoriale euclideo \mathbf{V}_n . Allora, esistono e sono univocamente determinati due endomorfismi simmetrici definiti positivi $\varphi, \psi : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_n$ ed una trasformazione ortogonale $r : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_n$, tali che

$$\begin{aligned} f &= r \circ \varphi && \text{(decomposizione polare destra),} \\ f &= \psi \circ r && \text{(decomposizione polare sinistra).} \end{aligned}$$

gli endomorfismi simmetrici sono definiti da:

$$\varphi = \sqrt{f^* \circ f}, \quad \psi = \sqrt{f \circ f^*}.$$

DIM. Iniziamo osservando che $f^* f = (f^* f)^*$ è un endomorfismo simmetrico di \mathbf{V}_n . Inoltre, è definito positivo. Infatti, $\langle (f^* f(\vec{x})), \vec{x} \rangle = \langle f(\vec{x}), f(\vec{x}) \rangle > 0$ se $\vec{x} \neq \vec{0}$, essendo f invertibile. Allora esiste l'endomorfismo $\varphi = \sqrt{f^* f}$, che è simmetrico e definito positivo, quindi invertibile. Inoltre φ^{-1} è simmetrico per la Proposizione 3.2.4 ed è ancora definito positivo.

Definiamo ora $r = f \circ \varphi^{-1}$. Si ha:

$$\begin{aligned} r^* \circ r &= (f \circ \varphi^{-1})^* \circ (f \circ \varphi^{-1}) = (\varphi^{-1})^* \circ f^* \circ f \circ \varphi^{-1} \\ &= (\varphi^{-1})^* \circ \varphi^2 \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ \varphi^2 \circ \varphi^{-1} \\ &= Id_{\mathbf{V}_n}, \end{aligned}$$

per cui r è una trasformazione ortogonale. Pertanto $f = r \circ \varphi$, dove r è una trasformazione ortogonale e φ è un endomorfismo simmetrico definito positivo.

Proviamo ora l'unicità di tale decomposizione. Supponiamo che esistano r_1 trasformazione ortogonale e φ_1 endomorfismo simmetrico definito positivo, tali che $f = r_1 \circ \varphi_1$. Allora,

$$f^* \circ f = (r_1 \circ \varphi_1)^* \circ (r_1 \circ \varphi_1) = \varphi_1^* \circ r_1^* \circ r_1 \circ \varphi_1 = \varphi_1^2$$

e quindi $\varphi_1 = \sqrt{f^* \circ f} = \varphi$, da cui segue anche banalmente che $r_1 = f \circ \varphi_1^{-1} = f \circ \varphi^{-1} = r$.

L'esistenza e l'unicità della decomposizione polare sinistra si dimostrano applicando esattamente lo stesso argomento, partendo però dall'endomorfismo simmetrico

definito positivo ff^* .

Poiché in questo caso la trasformazione ortogonale viene definita da $\tilde{r} = \psi^{-1} \circ f$, completiamo la dimostrazione provando che $\tilde{r} = r$. Infatti, consideriamo l'endomorfismo

$$\varphi' := r \circ \varphi \circ r^{-1} = r \circ \varphi \circ r^*.$$

Allora:

- φ' è un endomorfismo simmetrico, in quanto

$$(\varphi')^* = (r \circ \varphi \circ r^*)^* = (r^*)^* \circ \varphi^* \circ r^* = r \circ \varphi^* \circ r^* = \varphi'.$$

- φ' è definito positivo. Infatti, per ogni $\vec{x} \in \mathbf{V}_n$, $\vec{x} \neq \vec{0}$:

$$\langle \varphi'(\vec{x}), \vec{x} \rangle = \langle r \circ \varphi \circ r^*(\vec{x}), \vec{x} \rangle = \langle \varphi \circ r^*(\vec{x}), r^*(\vec{x}) \rangle > 0,$$

essendo φ definito positivo e $r^*(\vec{x}) \neq \vec{0}$ (r^* è un isomorfismo e $\vec{x} \neq \vec{0}$).

Ma $\varphi' = r \circ \varphi \circ r^{-1}$, per cui $\varphi' \circ r = r \circ \varphi = f = \psi \circ \tilde{r}$. Allora, l'unicità della decomposizione sinistra implica che $\varphi' = \psi$ e $\tilde{r} = r$. \square

Corollario 4.2.17 *Sia $A \in GL(n, \mathbb{R})$, allora esistono e sono univocamente determinate due matrici reali simmetriche definite positive A_φ e A_ψ ed una matrice ortogonale R , tali che*

$$A = RA_\varphi, \quad A = A_\psi R.$$

Osservazione 4.2.18 (Motivazione geometrica del nome di “Decomposizione Polare”.)

Consideriamo $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ con il suo prodotto scalare standard. Consideriamo l'automorfismo f di \mathbb{R}^2 individuato dal prodotto per un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ ($z \neq 0$), che, come è ben noto, in forma polare è completamente descritto dal suo modulo $\rho > 0$ e dal suo argomento θ :

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Sia $\vec{x} = x + iy \in \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$. Allora:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} &\mapsto z\vec{x} = (x\rho \cos \theta - y\rho \sin \theta) + i(x\rho \sin \theta + y\rho \cos \theta). \end{aligned}$$

Pertanto, rispetto alla base canonica $B = \{\vec{e}_1 \equiv 1, \vec{e}_2 \equiv i\}$, abbiamo

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix},$$

cioè, $M_B(f) = RU = WR$, con

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

che rappresenta una trasformazione ortogonale (esattamente, la rotazione antioraria dell'angolo θ), mentre

$$U = W = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$$

determina un endomorfismo simmetrico definito positivo.

Quindi, assegnato un numero complesso non nullo $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, l'azione complessiva di $f(\vec{x}) = z\vec{x}$ su un qualsiasi vettore $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ è la risultante di due azioni: modificare di un fattore ρ la norma di \vec{x} (omotetia), e ruotare di un angolo θ la sua direzione (rotazione).

Esempio 4.2.19 Si consideri l'automorfismo f di \mathbf{R}^2 rappresentato, rispetto alla base canonica, dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix}.$$

Siano U, W due matrici reali simmetriche definite positive ed R matrice ortogonale, tali che

$$A = RU = WR,$$

con $U = \sqrt{A^t A}$, e $W = \sqrt{AA^t}$.

Determiniamo la decomposizione polare destra. Si ha:

$$A^t A = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{17}{5} \end{pmatrix}.$$

La matrice AA^t ha autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 4$; una base ortonormale di autovettori è $B' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2\}$, con $\vec{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1)$ e $\vec{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$.

L'endomorfismo $u = \sqrt{f^* f}$, individuato da U rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^2 , è rappresentato, rispetto alla base B' , dalla matrice diagonale

$$U' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

avente come elementi della diagonale 1 e 2 cioè le radici quadrate di λ_1 e λ_2 rispettivamente. Pertanto risulta

$$U = PU'P^t = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}, \quad \text{con } P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

da cui segue che

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

e quindi

$$R = AU^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

$$W = AR^t = A^tR = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{7}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix},$$

Esercizio 4.2.20 Determinare la decomposizione polare di

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{2}((3\sqrt{3} + 1)x + (3 + \sqrt{3})y, (\sqrt{3} - 3)x + (3\sqrt{3} - 1)y, 2z)$$

Osservazione 4.2.21 Sia $f = ru = wr$ un automorfismo di \mathbf{V}_3 con u, w endomorfismi simmetrici, e r una trasformazione ortogonale. Siano $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ tre autovettori a due a due ortogonali dell'endomorfismo u relativi agli autovalori positivi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Essendo r una trasformazione ortogonale, si ha che

$$\|f(\vec{e}_i)\| = |\lambda_i| \|\vec{e}_i\|,$$

cioè le rette (a 2 a 2 ortogonali) individuate da $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sono trasformate da f in altre tre rette, ancora fra loro ortogonali, ed ogni vettore di tali rette subisce mediante f una “dilatazione” data da λ_i .

4.2.1 Trasformazioni ortogonali di ordine 2

Sappiamo dal Teorema 4.1.9 che tutti gli spazi euclidei di dimensione 2 sono isometrici tra loro e ad \mathbb{R}^2 munito del prodotto scalare standard. Andremo ora a descrivere le matrici ortogonali di ordine 2 e le corrispondenti trasformazioni ortogonali che queste rappresentano rispetto a basi ortonormali.

Teorema 4.2.22 Ogni matrice ortogonale di ordine 2 è della forma

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad o \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

con $\theta \in]-\pi, \pi]$.

DIM. Sia $A \in O(2, \mathbb{R})$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ trasformazione ortogonale tale che $A = M_B(f)$, dove $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ è una base ortonormale di \mathbb{R}^2 munito del prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2, \\ f(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2. \end{cases}$$

Poiché $\|f(\vec{e}_1)\| = \|\vec{e}_1\| = 1$, si ha

$$1 = \langle a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2, a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 \rangle = a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1.$$

Pertanto, $a_{11}^2 = 1 - a_{21}^2 \leq 1$, per cui esiste $\theta \in]-\pi, \pi]$ tale che $a_{11} = \cos \theta$, $a_{21} = \sin \theta$. Per lo stesso motivo, da $\|f(\vec{e}_2)\| = \|\vec{e}_2\| = 1$ segue che esiste $\omega \in]-\pi, \pi]$ tale che $a_{22} = \cos \omega$, $a_{12} = \sin \omega$. Infine,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2) \rangle = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} \\ &= \cos \theta \sin \omega + \sin \theta \cos \omega = \sin(\omega + \theta) \end{aligned}$$

e quindi $\omega = -\theta$ oppure $\omega = -\theta + \pi$. Nei due casi abbiamo, rispettivamente,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad e \quad S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad \square$$

Proposizione 4.2.23 *Ogni matrice R_θ rappresenta una rotazione di un angolo θ .*

DIM. Sia $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{x} \neq \vec{0}$. Allora, $\vec{x} = \|\vec{x}\|[(\cos \delta)\vec{e}_1 + (\sin \delta)\vec{e}_2]$. Consideriamo il vettore colonna delle componenti di \vec{x} rispetto alla base canonica $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ di \mathbb{R}^2 :

$$X = \begin{pmatrix} \|\vec{x}\| \cos \delta \\ \|\vec{x}\| \sin \delta \end{pmatrix}.$$

Allora:

$$\begin{aligned} R_\theta X &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \|\vec{x}\| \cos \delta \\ \|\vec{x}\| \sin \delta \end{pmatrix} = \|\vec{x}\| \begin{pmatrix} (\cos \theta \cos \delta - \sin \theta \sin \delta) \\ (\cos \theta \sin \delta + \sin \theta \cos \delta) \end{pmatrix} \\ &= \|\vec{x}\| \begin{pmatrix} \cos(\theta + \delta) \\ \sin(\theta + \delta) \end{pmatrix} = \|\vec{x}\| \begin{pmatrix} \cos(\theta + \delta) \\ \sin(\theta + \delta) \end{pmatrix} \quad \square \end{aligned}$$

Corollario 4.2.24 *R_0 e R_π sono le uniche rotazioni di \mathbb{R}^2 che ammettono autovalori reali.*

DIM. L'equazione caratteristica

$$0 = \det(R_\theta - \lambda I_2) = (\cos \theta - \lambda)^2 + \sin^2 \theta$$

ha soluzioni reali solo se $\sin \theta = 0$, da cui $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$. Nei due casi, rispettivamente abbiamo $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$.

Quindi, $R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $R_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sono le uniche rotazioni che ammettono autovalori reali. \square

Proposizione 4.2.25 *Ogni matrice ortogonale S_θ rappresenta una simmetria ortogonale rispetto alla retta che forma un angolo convesso di $\frac{\theta}{2}$ radianti con la retta orientata individuata da \vec{e}_1 (asse x).*

DIM. L'equazione caratteristica di S_θ è $\lambda^2 - 1 = 0$, e quindi S_θ ammette autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 1$. Inoltre, essendo S_θ simmetrica, abbiamo $\mathbb{R}^2 = V(1) \perp V(-1)$. Esplicitamente,

$$V(1) = L(\vec{v}_1), \quad \vec{v}_1 = \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \vec{e}_1 + \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) \vec{e}_2, \quad e \|\vec{v}_1\| = 1.$$

Infatti:

$$\begin{aligned} S_\theta \vec{v}_1 &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} + \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} - \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \left(\theta - \frac{\theta}{2} \right) \\ \sin \left(\theta - \frac{\theta}{2} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \vec{v}_1. \end{aligned}$$

Infine $V(-1) = L(\vec{v}_2)$, con $\vec{v}_2 = \left(-\sin \frac{\theta}{2} \right) \vec{e}_1 + \left(\cos \frac{\theta}{2} \right) \vec{e}_2$. Infatti abbiamo che $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_1$ e $\|\vec{v}_2\| = 1$. Per ogni $\vec{x} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^2$, abbiamo

$$S_\theta \vec{x} = S_\theta(x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2) = x_1 S_\theta \vec{v}_1 + x_2 S_\theta \vec{v}_2 = x_1 \vec{v}_1 - x_2 \vec{v}_2.$$

Pertanto, S_θ è una simmetria ortogonale, rispetto alla retta vettoriale individuata da \vec{v}_1 , il quale forma un angolo convesso di $\frac{\theta}{2}$ radianti con $L(\vec{e}_1)$. \square

I risultati precedenti sono sintetizzati nel seguente

Teorema 4.2.26 *Data $f \in O(\mathbb{R}^2)$, esiste una base ortonormale B tale che $M_B(f)$ è una delle seguenti matrici:*

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \text{ con } \theta \in]-\pi, \pi[, \theta \neq 0; \quad (3) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.2.2 Trasformazioni ortogonali di ordine 3

Teorema 4.2.27 *Data $f \in O(\mathbb{R}^3)$, esiste una base ortonormale di \mathbb{R}^3 tale che $M_B(f)$ è una delle seguenti:*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ con } \theta \in]-\pi, \pi[, \theta \neq 0,$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ con } \theta \in]-\pi, \pi[, \theta \neq 0,$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

DIM. Siano $A \in O(3, \mathbb{R})$ e $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una trasformazione ortogonale tale che $A = M_B(f)$ con B una base ortonormale di \mathbb{R}^3 (ad esempio quella canonica). Sappiamo che

$$\mathbf{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0$$

è un'equazione di terzo grado a coefficienti reali. Siccome le radici dell'equazione caratteristica sono a due a due complesse coniugate, almeno una soluzione λ_1 è

autoconiugata, ossia reale.

Poiché A è ortogonale, $\lambda_1 = \pm 1$. Sia \vec{e}_1 autovettore di norma 1 di A relativo a λ_1 e consideriamo $E_2 := L(\vec{e}_1)^\perp$. Sia $\vec{x} \in E_2$, allora

$$\langle f(\vec{x}), \vec{e}_1 \rangle \underset{f(\vec{e}_1)=\pm\vec{e}_1}{=} \pm \langle f(\vec{x}), f(\vec{e}_1) \rangle \underset{f \text{ T.O.}}{=} \pm \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle = 0$$

cioè $f(\vec{x}) \in E_2$. Pertanto E_2 è f -invariante. Considerato quindi E_2 con il prodotto scalare indotto, vale che

$$f|_{E_2} : E_2 \longrightarrow E_2$$

è una trasformazione ortogonale di E_2 , il quale è isometrico a \mathbb{R}^2 per il Teorema 4.1.9. Pertanto, dal Teorema 4.2.26 segue che esiste $B_0 = \{\vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ base ortonormale di E_2 , rispetto a cui $M_{B_0}(f|_{E_2})$ assuma una delle forme (1)-(4).

Per $\lambda_1 = 1$ otteniamo corrispondentemente che rispetto alla base ortonormale $B' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, f si rappresenta con una delle matrici A_1 - A_4 dell'enunciato.

Se $\lambda_1 = -1$, escludendo i casi che si riconducono ad A_1 - A_4 dopo un riordinamento dei vettori di B' , si aggiungono i casi corrispondenti a (2) e (3), rappresentati rispetto a B' dalle matrici A_5 ed A_6 rispettivamente.

In conclusione, A è simile (nonché congruente) ad una delle matrici A_i , $i = 1, \dots, 6$, cioè esiste $P \in O(3, \mathbb{R})$ tale che

$$A_i = P^t A P.$$

Osservazione 4.2.28

- i. $A_1 = I_3$ rappresenta l'identità $I_{\mathbb{R}^3}$ su \mathbb{R}^3 ;
- ii. A_2 rappresenta la *rotazione intorno alla retta vettoriale* $L(\vec{e}_1)$;
- iii. A_3 rappresenta la *simmetria ortogonale rispetto alla retta vettoriale* $L(\vec{e}_1)$;
- iv. A_4 rappresenta la *simmetria ortogonale rispetto al piano vettoriale* $L(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$;
- v. A_5 rappresenta una *rotosimmetria*, ossia la composizione di una rotazione intorno alla retta vettoriale $L(\vec{e}_1)$ con la simmetria ortogonale rispetto al piano $L(\vec{e}_1)^\perp = L(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$, in quanto

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

- vi. $A_6 = -I_3$ rappresenta $-I_{\mathbb{R}^3}$.

Metodo per classificare le trasformazioni ortogonali di ordine 3.

Le trasformazioni ortogonali $f \in O(\mathbb{R}^3)$ si classificano considerando il sottospazio vettoriale dei vettori fissi di \mathbb{R}^3 rispetto ad f :

$$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{x}) = \vec{x}\}.$$

I casi possibili sono i seguenti:

- I) $\dim U = 3$: allora $M_B(f) = A_1 = I_3$;
- II) $\dim U = 2$: allora $M_B(f) = A_4$ ed f è la simmetria ortogonale rispetto al piano U ;
- III) $\dim U = 1$: allora
 - (a) $M_B(f) = A_2$ ed f è la rotazione intorno alla retta U , oppure
 - (b) $M_B(f) = A_3$ ed f è la simmetria ortogonale rispetto alla retta U .

I due casi sono distinti dal fatto che, rispettivamente, $\lambda = -1$ non sia oppure sia anch'esso autovalore di f .

IV) $\dim U = 0$: allora

- (a)' $M_B(f) = A_5$ ed f è la rotosimmetria determinata dalla retta vettoriale $W = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : f(\vec{x}) = -\vec{x}\}$, oppure
- (b)' $M_B(f) = A_6 = -I_3$.

I due casi sono distinti dalla molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = -1$.

Poiché le matrici $A_i, i = 1, \dots, 6$, sono matrici ortogonali, vale che $\det A_i = \pm 1$. In dettaglio, $\det A_i = 1$ per $i = 1, 2, 3$ e $\det A_i = -1$ per $i = 4, 5, 6$. Pertanto, si ottiene il seguente teorema.

Teorema 4.2.29 (di Eulero) *Ogni trasformazione ortogonale f di \mathbb{R}^3 con determinante > 0 ammette un asse di rotazione, cioè, esiste una retta r tale che $f(\vec{x}) = \vec{x}$ per ogni $\vec{x} \in r$ e $f|_{r^\perp}$ è una rotazione (di un angolo $\theta \in]-\pi, \pi[$).*

Esercizio 4.2.30 *In (\mathbb{R}^3, \cdot) , si consideri, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\mapsto \frac{1}{3}(-2x + \alpha - 2z, \alpha x - 2y - 2z, -2x - 2y + \alpha z). \end{aligned}$$

- (a) *Determinare l'unico valore reale di α per il quale $f \in O(\mathbb{R}^3)$.*
- (b) *Determinare il sottospazio U dei punti fissi di f ed interpretare geometricamente f .*
- (c) *Determinare U^\perp .*

4.3 Movimenti

Definizione 4.3.1 Sia $(\mathbf{V}, \langle, \rangle)$ uno spazio euclideo. L'applicazione

$$\begin{aligned} d : \mathbf{V} \times \mathbf{V} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\mapsto \|\vec{x} - \vec{y}\| \end{aligned}$$

si chiama **distanza** indotta dalla norma di $(\mathbf{V}, \langle, \rangle)$.

Dalle proprietà della norma scaturiscono immediatamente le seguenti proprietà della distanza.

Proposizione 4.3.2 Per ogni $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{V}$:

- (i) $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$;
- (ii) $d(\vec{x}, \vec{y}) \geq 0$, e l'uguaglianza si ha se e solo se $\vec{x} = \vec{y}$.
- (iii) $d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$.

Definizione 4.3.3 Siano $(\mathbf{V}, \langle, \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo e d la corrispondente distanza. Una applicazione $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ si dice **movimento** se conserva le distanze, ossia se per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$ si ha

$$d(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = d(\vec{x}, \vec{y})$$

Si noti che f non è necessariamente un'applicazione lineare. Consideriamo infatti il seguente

Esempio 4.3.4 Per ogni $\vec{a} \in \mathbf{V}$, sia $T_{\vec{a}} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$, $\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{a}$ una traslazione. Allora,

$$\begin{aligned} d(T_{\vec{a}}(\vec{x}), T_{\vec{a}}(\vec{y})) &= \|T_{\vec{a}}(\vec{x}) - T_{\vec{a}}(\vec{y})\| = \|\vec{x} + \vec{a} - (\vec{y} + \vec{a})\| \\ &= \|\vec{x} + \vec{a} - \vec{y} - \vec{a}\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| = d(\vec{x}, \vec{y}). \end{aligned}$$

Pertanto le traslazioni $T_{\vec{a}}$ sono movimenti, non lineari per ogni $\vec{a} \neq \vec{0}$ (infatti, $T_{\vec{a}}(\vec{0}) = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$).

Esempio 4.3.5 Le trasformazioni ortogonali sono movimenti (lineari). Infatti, sia $f \in O(\mathbf{V})$. Allora,

$$d(f(\vec{x}), f(\vec{y})) = \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\| = \|f(\vec{x} - \vec{y})\| = \|\vec{x} - \vec{y}\| = d(\vec{x}, \vec{y})$$

Proposizione 4.3.6 La composizione di movimenti è un movimento.

DIM. Siano m_1, m_2 movimenti di \mathbf{V} e poniamo $m = m_2 \circ m_1$. Allora, per ogni $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}$,

$$d(m(\vec{x}), m(\vec{y})) = d((m_2 \circ m_1)(\vec{x}), (m_2 \circ m_1)(\vec{y})) = d(m_1(\vec{x}), m_1(\vec{y})) = d(\vec{x}, \vec{y}) \quad \square$$

Corollario 4.3.7 *Le composizioni $m = T_{\vec{a}} \circ f$ di traslazioni e trasformazioni ortogonali sono movimenti.*

Il risultato fondamentale circa i movimenti di uno spazio euclideo di dimensione finita, è che il precedente Corollario si può invertire:

Teorema 4.3.8 *Siano $(\mathbf{V}_n, \langle, \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita e $m : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_n$ un movimento. Allora esistono $\vec{a} \in \mathbf{V}_n$ ed $f \in O(\mathbf{V}_n)$, tali che*

$$m = T_{\vec{a}} \circ f.$$

DIM. Dato un movimento $m : \mathbf{V}_n \rightarrow \mathbf{V}_n$, poniamo $\vec{a} = m(\vec{0})$ movimento e consideriamo

$$\begin{aligned} f : \mathbf{V}_n &\longrightarrow \mathbf{V}_n, \\ \vec{x} &\longmapsto m(\vec{x}) - \vec{a}. \end{aligned}$$

Dalla definizione di f segue subito che $m(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \vec{a} = (T_{\vec{a}} \circ f)(\vec{x})$ per ogni \vec{x} , ossia, $m = T_{\vec{a}} \circ f$. Per completare la dimostrazione dobbiamo quindi provare che $f \in O(\mathbf{V}_n)$. Osserviamo che

$$f(\vec{0}) = m(\vec{0}) - m(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Completeremo la dimostrazione in diversi passi.

(I) f conserva la distanza d . Infatti:

$$\begin{aligned} d(f(\vec{x}), f(\vec{y})) &= d(m(\vec{x}) - m(\vec{0}), m(\vec{y}) - m(\vec{0})) \\ &= \|m(\vec{x}) - m(\vec{0}) - m(\vec{y}) + m(\vec{0})\| = \|m(\vec{x}) - m(\vec{y})\| \\ &= d(m(\vec{x}), m(\vec{y})) = d(\vec{x}, \vec{y}). \end{aligned}$$

(II) f conserva la norma. Infatti, tenendo conto di (I):

$$\|f(\vec{x})\| = \|f(\vec{x}) - \vec{0}\| = \|f(\vec{x}) - f(\vec{0})\| = d(f(\vec{x}), f(\vec{0})) = d(\vec{x}, \vec{0}) = \|\vec{x} - \vec{0}\| = \|\vec{x}\|.$$

(III) f conserva il prodotto scalare. Infatti, Poiché

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{2} \{ \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \},$$

da (II) segue che

$$\begin{aligned}
 \langle f(\vec{x}), f(\vec{y}) \rangle &= \frac{1}{2} \{ \|f(\vec{x})\|^2 + \|f(\vec{y})\|^2 - \|f(\vec{x}) - f(\vec{y})\|^2 \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - d(f(\vec{x}), f(\vec{y}))^2 \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - d(\vec{x}, \vec{y})^2 \} \\
 &= \frac{1}{2} \{ \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - \|\vec{x} - \vec{y}\|^2 \} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle.
 \end{aligned}$$

(IV) f trasforma basi ortonormali in basi ortonormali. Sia $B = \{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormale di \mathbf{V}_n e consideriamo $f(B) = \{f(\vec{e}_i)\}_{i=1}^n$. Allora, per (III),

$$\langle f(\vec{e}_i), f(\vec{e}_j) \rangle = \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij},$$

cioè $f(B)$ è un insieme ortonormale costituito da n vettori. Quindi, per la Proposizione 2.3.1, $f(B)$ è una base ortonormale di \mathbf{V}_n .

(V) f è una trasformazione ortogonale. Visto che f conserva il prodotto scalare per (III), basta dimostrare che f è lineare. Siano $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{V}_n$ e sia $B_0 = \{\vec{e}_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormale di \mathbf{V}_n . Allora, per ogni indice i ,

$$\begin{aligned}
 \langle f(\vec{e}_i), f(\vec{x} + \vec{y}) - f(\vec{x}) - f(\vec{y}) \rangle &= \\
 &= \langle (f(\vec{e}_i), f(\vec{x} + \vec{y})) - \langle f(\vec{e}_i), f(\vec{x}) \rangle - \langle f(\vec{e}_i), f(\vec{y}) \rangle \rangle \\
 &= \langle \vec{e}_i, \vec{x} + \vec{y} \rangle - \langle \vec{e}_i, \vec{x} \rangle - \langle \vec{e}_i, \vec{y} \rangle = 0.
 \end{aligned}$$

Pertanto, $f(\vec{x} + \vec{y}) - f(\vec{x}) - f(\vec{y})$ è ortogonale a tutti i vettori della base ortonormale $f(B_0)$, e quindi a tutti i vettori di \mathbf{V}_n . Ma allora $f(\vec{x} + \vec{y}) - f(\vec{x}) - f(\vec{y}) = \vec{0}$, essendo \langle, \rangle non degenere. Applicando lo stesso argomento, considerati $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\vec{x} \in \mathbf{V}_n$, abbiamo

$$\begin{aligned}
 \langle f(\vec{e}_i), f(\lambda\vec{x}) - \lambda f(\vec{x}) \rangle &= \langle f(\vec{e}_i), f(\lambda\vec{x}) \rangle - \lambda \langle f(\vec{e}_i), f(\vec{x}) \rangle \\
 &= \langle \vec{e}_i, \lambda\vec{x} \rangle - \lambda \langle \vec{e}_i, \vec{x} \rangle = 0,
 \end{aligned}$$

per cui $f(\lambda\vec{x}) - \lambda f(\vec{x})$ è ortogonale a tutti i vettori di $f(B_0)$, e quindi a tutti i vettori di \mathbf{V}_n . Allora $f(\lambda\vec{x}) - \lambda f(\vec{x}) = \vec{0}$.

Per le proprietà (V) e (III), f è un endomorfismo di \mathbf{V}_n che conserva il prodotto scalare, ossia, una trasformazione ortogonale, e questo completa la dimostrazione poiché $m = T_{\vec{a}} \circ f$. \square

Il Teorema 4.3.8 permette di ridurre lo studio dei movimenti di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita, a quello delle sue trasformazioni ortogonali. In particolare, tenendo conto delle classificazioni che abbiamo ottenuto per le trasformazioni ortogonali in dimensione 2 e 3, abbiamo subito i seguenti risultati:

Teorema 4.3.9 *I movimenti di (\mathbb{R}^2, \cdot) sono composizioni di traslazioni con*

- *rotazioni rispetto ad un punto;*
- *simmetrie rispetto ad una retta.*

Teorema 4.3.10 *I movimenti di (\mathbb{R}^3, \cdot) sono composizioni di traslazioni con:*

- *rotazioni intorno a rette;*
- *simmetrie ortogonali rispetto a rette ed a piani;*
- *rotosimmetrie rispetto a rette.*

Esercizio 4.3.11 *Per ciascuna delle seguenti applicazioni $m : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, descrivete da*

$$(I): m(x, y, z) = \left(x - 1, \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}\sqrt{2}z, \frac{2}{3}\sqrt{2}y + \frac{1}{3}z + 4 \right).$$

$$(II): m(x, y, z) = \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z, -y, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}z \right);$$

$$(III): m(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}x - \frac{1}{2}z, y - 2, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}z + 1 \right);$$

(a) *provare che m è un movimento di (\mathbb{R}^3, \cdot) , e determinare $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ e $f \in O(\mathbb{R}^3)$, tali che $m = T_{\vec{a}} \circ f$.*

(b) *Determinare il sottospazio U dei punti fissi di f ed interpretare geometricamente f .*

(c) *Determinare U^\perp .*

Capitolo 5

Coniche

5.1 Il piano euclideo ampliato e complessificato

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ delle terne non nulle di numeri reali. Su $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$, la relazione \sim (*proporzionalità*), definita da

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \iff \exists t \in \mathbb{R} - \{0\} : (y_1, y_2, y_3) = (tx_1, tx_2, tx_3)$$

è una relazione di equivalenza; l'insieme quoziente

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \frac{\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}}{\sim}$$

si chiama *piano proiettivo (numerico reale)*.

L'applicazione

$$p : \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto [(x_1, x_2, x_3)],$$

che a $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ associa la sua classe di equivalenza, si chiama **suriezione canonica**.

Sia \sum l'insieme delle rette del piano euclideo Π . La relazione di *parallelismo* \mathcal{P} :

$$r\mathcal{P}s \iff r||s \iff r \equiv s \text{ o } r \cap s = \emptyset$$

è una relazione d'equivalenza su \sum . Rette parallele hanno la stessa direzione. L'insieme quoziente

$$i_\infty = \frac{\sum}{\mathcal{P}}$$

si chiama insieme delle *direzioni* del piano euclideo Π .

Definizione 5.1.1 Si chiama *piano euclideo ampliato* l'insieme $\bar{\Pi} = \Pi \cup i_\infty$, in cui si aggiungono ai punti del piano euclideo Π , le direzioni delle rette del piano stesso.

Il legame tra il piano proiettivo ed il piano euclideo ampliato con le direzioni, è chiarito dal seguente

Teorema 5.1.2 *Esiste una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e $\bar{\Pi} = \Pi \cup i_\infty$.*

DIM. Sia $\mathcal{R}(O, x, y)$ un riferimento affine su Π . Si consideri l'applicazione:

$$k : \Pi \cup i_\infty \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}),$$

definita da

$$\begin{aligned} \forall P(x, y) \in \Pi : & \quad k(P) = p(x, y, 1), \\ \forall R_\infty \in i_\infty : & \quad k(R_\infty) = p(b, -a, 0), \end{aligned}$$

dove $r : ax + by + c = 0$ è una retta che rappresenta la direzione R_∞ (si osservi che $(l = b, m = -a)$ sono i parametri direttori della retta r).

Si prova facilmente che k è una corrispondenza biunivoca. Infatti, consideriamo $p(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Se $x_3 \neq 0$, si considera il punto $P(x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}) \in \Pi$, e si ha:

$$k(P) = p(x, y, 1) = p(x_1, x_2, x_3).$$

Se invece $x_3 = 0$, si considera la retta $r : ax + by + c = 0$ con $a = -x_2$ e $b = x_1$. La direzione R_∞ di r soddisfa:

$$k(R_\infty) = p(-b, a, 0) = p(x_1, x_2, x_3).$$

Quindi, k è suriettiva.

Per dimostrare che k è iniettiva, si osserva dapprima che se due elementi di $\Pi \cup i_\infty$ hanno la stessa immagine tramite k , allora essi sono o entrambi punti del piano euclideo, oppure entrambi direzioni.

Se $P(x, y)$ e $Q(x', y')$ sono due punti di Π tali che $k(P) = k(Q)$, (ossia, $p(x, y, 1) = p(x', y', 1)$), allora esiste $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ tale che $x' = tx, y' = ty, 1 = t$, per cui $(x, y) = (x', y')$ e quindi $P = Q$.

Se R_∞ ed S_∞ sono direzioni, definite rispettivamente dalle rette $r : ax + by + c = 0$ ed $s : a'y + b'y + c' = 0$, tali che $k(R_\infty) = k(S_\infty)$, allora si ha $p(b, -a, 0) = p(b', -a', 0)$. Quindi, esiste $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, tale che $b' = tb$ e $a' = ta$. Ma allora $r \parallel s$, e quindi $R_\infty = S_\infty$. \square

L'applicazione k definita nel precedente teorema si chiama *sistema di coordinate omogenee* associato al riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$.

Se $P \in \Pi \cup i_\infty$ e $k(P) = p(x_1, x_2, x_3)$, la terna ordinata (x_1, x_2, x_3) si chiama *terna delle coordinate omogenee* di P ; si osservi che (tx_1, tx_2, tx_3) , per ogni $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, è ancora terna di coordinate omogenee dello stesso punto P .

Se P è un punto del piano euclideo Π , allora le sue coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3) hanno $x_3 \neq 0$; le coordinate cartesiane di P sono $(x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3})$.

Se P è una direzione, per le coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3) di P si ha sempre $x_3 = 0$.

Le rette del piano euclideo ampliato $\bar{\Pi}$ sono i_∞ ed i sottoinsiemi del tipo $r \cup R_\infty$ (r = retta del piano euclideo, R_∞ direzione definita dalla retta r). La retta i_∞ si chiama *retta impropria*, una retta del tipo $r \cup R_\infty$ si chiama *retta propria* e si indica semplicemente con r (sottintendendo l'ampliamento con il suo punto improprio).

Fissato su $\bar{\Pi}$ un sistema di coordinate omogenee:

$$k : \bar{\Pi} = \Pi \cup i_\infty \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

associato ad un riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$, si può ottenere una *rappresentazione analitica delle rette* di $\bar{\Pi}$ nel modo seguente:

- La retta impropria i_∞ è rappresentata dall'equazione $x_3 = 0$. Infatti, tutti i punti impropri hanno coordinate omogenee del tipo $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)$, che soddisfano ovviamente l'equazione $x_3 = 0$. Viceversa, ogni soluzione non banale $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ dell'equazione $x_3 = 0$ è terna di coordinate omogenee di un punto improprio.
- La retta propria $r \cup R_\infty$, di equazione cartesiana $r : ax + by + c = 0$, è rappresentata dall'equazione lineare omogenea:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0). \quad (5.1.1)$$

Infatti, tale equazione è soddisfatta dalle coordinate omogenee $(b, -a, 0)$ di R_∞ , e dalle coordinate omogenee $(\bar{x}, \bar{y}, 1)$ dei punti propri $P(\bar{x}, \bar{y}) \in r$.

Viceversa, ogni soluzione $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \neq (0, 0, 0)$ dell'equazione (5.1.1) è una terna di coordinate omogenee o di un punto $P \in r$ oppure di R_∞ .

L'equazione (5.1.1) si chiama *equazione in coordinate omogenee* della retta r .

Si osservi che $t(ax_1 + bx_2 + cx_3) = 0$, con $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, è ancora equazione in coordinate omogenee della retta r .

Dalla precedente descrizione si ottiene facilmente la seguente

Proposizione 5.1.3 *Rispetto ad un fissato sistema di coordinate omogenee, una retta del piano euclideo ampliato Π è il luogo dei punti P , le cui coordinate omogenee $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \neq (0, 0, 0)$ sono tutte e sole le soluzioni di un'equazione omogenea di primo grado:*

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

Vale inoltre la seguente

Proposizione 5.1.4 *Due rette distinte del piano euclideo ampliato hanno esattamente un punto in comune.*

DIM. Siano r ed s due rette distinte di $\bar{\Pi}$, di equazioni rispettivamente $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ ed $a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = 0$, rispetto ad un sistema di coordinate omogenee k . Essendo le rette distinte, la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

ha rango 2. Allora, il sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ a'x_1 + b'x_2 + c'x_3 = 0 \end{cases}$$

ammette ∞^1 soluzioni diverse da quella banale. Se $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ è una di queste soluzioni, tutte le altre sono del tipo $(t\bar{x}_1, t\bar{x}_2, t\bar{x}_3)$, con $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Di conseguenza, il punto $P \in \bar{\Pi}$, di coordinate omogenee $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ è un punto sia di r che di s , ed è unico (essendo l'unico punto determinato dalle coordinate omogenee $(t\bar{x}_1, t\bar{x}_2, t\bar{x}_3), t \neq 0$). \square

5.1.1 Complessificazione del piano euclideo ampliato.

Sia $\mathcal{R}(O, x, y)$ un riferimento affine sul piano euclideo Π . Il piano euclideo Π si dice *complessificato*, e si indica con $\Pi^{\mathbb{C}}$, quando il campo di variabilità delle coordinate cartesiane è il campo \mathbb{C} dei numeri complessi.

Un punto $P(x, y)$, con $x, y \in \mathbb{C}$, si dice *punto complesso*. Il *punto coniugato* di $P(x, y)$ è il punto $\bar{P}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$. I punti di Π , o *punti reali*, sono i punti di $\Pi^{\mathbb{C}}$ per cui $P = \bar{P}$. Quindi, i punti reali

-) hanno coordinate non omogenee della forma $P(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$;
-) hanno coordinate omogenee $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$, tali che esista $\rho \in \mathbb{C}$ per cui $\rho(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

Le rette di $\Pi^{\mathbb{C}}$ si definiscono nel modo seguente:

una retta complessa è il luogo dei punti di $\Pi^{\mathbb{C}}$, le cui coordinate omogenee complesse sono le soluzioni (in \mathbb{C}^2) di un'equazione algebrica del tipo $ax + by + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{C}$ ed $(a, b) \neq (0, 0)$.

Quando $a, b, c \in \mathbb{R}$, la retta complessa si chiama *retta reale* di $\Pi^{\mathbb{C}}$.

Ad esempio:

-) la retta r di equazione: $(1 + 2i)x + 3y + 1 = 0$ è una retta complessa; come si può notare, essa ha sia punti reali (ad esempio, $P(0, -\frac{1}{3})$) che punti complessi (ad esempio, $Q(-\frac{1}{1+2i}, 0)$);
-) la retta $r : x - y + 1 = 0$ è una retta reale; essa ha sia punti reali (ad esempio $P(1, 2)$), che punti complessi (ad esempio, $Q(i, i + 1)$);

-) la retta $r : x - 1 - 2i = 0$ è una retta complessa, priva di punti reali; infatti i suoi punti sono tutti del tipo $P(2i + 1, y)$.

Sia $r : ax + by + c = 0$ una retta di $\Pi^{\mathbb{C}}$; la *retta complessa coniugata* di r è la retta \bar{r} di $\Pi^{\mathbb{C}}$ di equazione $\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c} = 0$, dove $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sono rispettivamente i numeri complessi coniugati di a, b, c . Ovviamente, r è reale se e solo se $r = \bar{r}$, e quindi se $P \in r$ anche il complesso coniugato di P appartiene ad r .

Si osservi che $r \cap \bar{r} = \{1 \text{ punto reale}\}$ oppure $r \cap \bar{r} = \emptyset$.

Due rette $r : ax + by + c = 0$ ed $s : a'x + b'y + c' = 0$ di $\Pi^{\mathbb{C}}$ si dicono *parallele* se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ (con la solita convenzione che se uno dei denominatori è 0, allora è 0 anche il corrispondente numeratore).

Anche l'estensione complessa $\Pi^{\mathbb{C}}$ del piano euclideo Π si può ampliare con i punti impropri, considerando l'insieme $\sum^{\mathbb{C}}$ delle rette di $\Pi^{\mathbb{C}}$ con la relazione di parallelismo \mathcal{P} . L'insieme quoziente

$$i_{\infty} = \frac{\sum^{\mathbb{C}}}{\mathcal{P}}$$

si chiama *insieme delle direzioni* di $\Pi^{\mathbb{C}}$.

In modo analogo al caso reale, si definisce il *piano proiettivo complesso*, considerando nell'insieme $\mathbb{C}^3 - \{(0, 0, 0)\}$ la relazione di equivalenza \sim :

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \iff \exists t \in \mathbb{C} - \{0\} : (y_1, y_2, y_3) = (tx_1, tx_2, tx_3).$$

L'insieme quoziente:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = \frac{\mathbb{C}^3 - \{(0, 0, 0)\}}{\sim}$$

si chiama *piano numerico proiettivo complesso*.

Fissato sul piano euclideo Π un riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$, si consideri l'applicazione

$$k : \bar{\Pi}^{\mathbb{C}} = \Pi^{\mathbb{C}} \cup i_{\infty} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

così definita: se $P(x, y) \in \Pi^{\mathbb{C}}$, si pone $k(P) = p(x, y, 1)$; se $R_{\infty} \in i_{\infty}$ è la direzione definita da una retta $r : ax + by + c = 0$, allora $k(R_{\infty}) = p(b, -a, 0)$. Allora, k (detta *sistema di coordinate omogenee*) stabilisce una corrispondenza biunivoca tra $\Pi^{\mathbb{C}} \cup i_{\infty}$ e $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

L'insieme $\bar{\Pi}^{\mathbb{C}} = \Pi^{\mathbb{C}} \cup i_{\infty}$ prende il nome di *estensione complessa del piano euclideo ampliato con i punti impropri*.

Le rette di $\Pi^{\mathbb{C}} \cup i_{\infty}$ sono i_{∞} e tutti i sottoinsiemi di $\Pi^{\mathbb{C}} \cup i_{\infty}$ del tipo $r \cup R_{\infty}$, dove r è una retta del piano euclideo complessificato $\Pi^{\mathbb{C}}$ ed R_{∞} il suo punto improprio.

Rispetto ad un sistema di coordinate omogenee k assegnato, le rette di $\Pi^{\mathbb{C}} \cup i_{\infty}$ sono rappresentate da equazioni lineari omogenee del tipo $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

La retta impropria i_∞ ha equazione $x_3 = 0$. Ogni altra retta propria $r \cup R_\infty$, con $r : ax + by + c = 0$ (equazione cartesiana di r rispetto al riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$ associato a k), ha equazione $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$; l'equazione $ax + by + c = 0$ si chiama anche equazione della retta $r \cup R_\infty$ in coordinate non omogenee.

Particolare interesse rivestono i punti impropri $I_\infty(1, i, 0)$ e $J_\infty(1, -i, 0)$, detti **punti ciclici**; una retta propria passante per un punto ciclico si chiama **retta isotropa**.

Fissato un punto proprio P_0 , vi sono due rette isotrope passanti per esso; se (x_0, y_0) sono le coordinate non omogenee di P_0 allora le rette isotrope per P_0 hanno equazione (non omogenea):

$$y - y_0 = \pm i(x - x_0).$$

Come si può notare, sono rette complesse coniugate, di coefficiente angolare $\pm i$, aventi P_0 come unico punto reale.

5.1.2 Trasformazioni affini, metriche e proiettive

Sia Π il piano euclideo, con un fissato sistema di riferimento affine.

Definizione 5.1.5 Una trasformazione affine di Π è una applicazione $f : \Pi \rightarrow \Pi$, $P(x, y) \mapsto P'(x', y')$, con

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + c_1, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + c_2, \end{cases} \quad \text{e } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) \quad (\det A \neq 0).$$

Quindi, le trasformazioni affini del piano sono tutte e sole le composizioni di traslazioni e automorfismi.

Proposizione 5.1.6 L'insieme

$$\text{Aff} := \{\text{trasformazioni affini di } \pi\},$$

con l'usuale composizione di funzioni, è un gruppo.

Osservazione 5.1.7 Se consideriamo il piano euclideo Π con un fissato sistema di riferimento cartesiano, allora una trasformazione affine con $A \in O(2, \mathbb{R})$ è un movimento del piano. L'insieme Iso dei movimenti del piano euclideo, con l'usuale composizione di funzioni, è un gruppo, sottogruppo di Aff .

Consideriamo ora il piano proiettivo \mathbb{P}^2 .

Definizione 5.1.8 Una trasformazione proiettiva di \mathbb{P}^2 è una applicazione $f : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$, $[(x_1, x_2, x_3)] \mapsto [(x'_1, x'_2, x'_3)]$, tale che esista una matrice invertibile $A = (a_{ij})$, per cui

$$x'_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij}x_i \quad j = 1, 2, 3.$$

La definizione precedente è ben posta, ossia indipendente dalla terna scelta a rappresentare le coordinate omogenee. Infatti:

$$(x_j) \sim (y_j) \quad \implies \quad \exists \rho \neq 0 : \quad y_j = \rho x_j, \quad j = 1, 2, 3,$$

quindi

$$y'_j = \sum_{i=1}^3 a_{ij}y_i = \sum_{i=1}^3 a_{ij}\rho x_i = \rho \sum_{i=1}^3 a_{ij}x_i = \rho x'_j \implies (x'_j) \sim (y'_j).$$

Proposizione 5.1.9 *L'insieme*

$$\mathcal{Pr} := \{\text{trasformazioni proiettive di } \mathbb{P}^2\}$$

con l'usuale composizione di funzioni, è un gruppo.

Proposizione 5.1.10 $\mathcal{Iso} \subset \mathcal{Aff} \subset \mathcal{Pr}$.

Definizione 5.1.11 *Una proprietà geometrica si dice*

- **proiettiva** se è invariante per trasformazioni proiettive.
- **affine** se è invariante per trasformazioni affini;
- **metrica** se è invariante per movimenti;

Ovviamente, una proprietà proiettiva è anche affine (ma non viceversa) e una proprietà affine è anche metrica (ma non viceversa). Ad esempio:

- ogni trasformazione proiettiva trasforma punti in punti e rette in rette. Quindi, l'essere un punto, o una retta, sono caratteristiche proiettive;
- il *parallelismo* di rette è una caratteristica affine, ma non proiettiva. L'essere propri o impropri, per punti e rette, sono caratteristiche affini, ma non proiettive;
- la *perpendicolarità* di rette è una caratteristica metrica, ma non affine.

5.2 Definizione e classificazione proiettiva

In questo e nei paragrafi successivi, l'ambiente in cui si considera una conica è l'estensione complessa $\overline{\Pi}^{\mathbb{C}} = \Pi^{\mathbb{C}} \cup i_{\infty}$ del piano euclideo ampliato con i punti impropri, su cui è fissato un sistema di coordinate proiettive omogenee (x_1, x_2, x_3) , indotto da un riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$ (in particolare, cartesiano ortogonale quando intervengono questioni metriche).

Definizione 5.2.1 Si dice **conica** l'insieme \mathcal{C} dei punti del piano $\overline{\Pi}^{\mathbb{C}}$, le cui coordinate omogenee sono soluzioni di un'equazione omogenea di secondo grado, ossia del tipo:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0, \quad (5.2.1)$$

dove a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$ sono numeri reali, non tutti nulli. L'equazione precedente si chiama **equazione della conica \mathcal{C}** rispetto al sistema di coordinate omogenee fissato.

Posto $a_{ij} = a_{ji}$, per ogni $i, j = 1, 2, 3$, l'equazione (5.2.1) si scrive nella forma compatta

$$\mathcal{C} : \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_i x_j = 0.$$

Posto $x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$, dalla (5.2.1) si ottiene l'equazione di \mathcal{C} in coordinate non omogenee:

$$\mathcal{C} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (5.2.2)$$

detta **equazione cartesiana** di \mathcal{C} rispetto al riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$ fissato. La matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

si chiama **matrice (dell'equazione) della conica \mathcal{C}** .

Definizione 5.2.2 La conica \mathcal{C} , rappresentata dall'equazione (5.2.2), si dice

- **generale (o non degenera)** se il polinomio che ne determina l'equazione è irriducibile (nel campo dei numeri reali),
- **degenera** se tale polinomio è decomponibile nel prodotto di due polinomi di primo grado. In particolare, \mathcal{C} è detta
 - **semplicemente degenera** se tali polinomi sono distinti,

– **doppiamente degeneri** se tali polinomi coincidono.

La suddivisione delle coniche in generali, semplicemente degeneri e doppiamente degeneri costituisce la **classificazione proiettiva** delle coniche, in quanto tale classificazione è invariante per trasformazioni proiettive. In particolare, è anche invariante per cambiamenti di riferimento cartesiani.

Esempio 5.2.3 1. $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 - 1 = 0$ è generale;

2. $\mathcal{C}_2 : x^2 - 2xy = 0$ è semplicemente degeneri;

3. $\mathcal{C}_3 : x^2 + y^2 - 2xy = 0$ è doppiamente degeneri.

Osservazione 5.2.4 L'equazione (5.2.2) dipende da 5 parametri essenziali, quindi per determinare una conica occorrono 5 condizioni tra loro indipendenti.

Vale il seguente

Teorema 5.2.5 Data la conica \mathcal{C} , di equazione (5.2.2), risulta:

- \mathcal{C} è generale $\iff rg(A) = 3 \iff \mathcal{C}$ non contiene rette,
- \mathcal{C} è semplicemente degeneri $\iff rg(A) = 2 \iff \mathcal{C}$ è formata da due rette distinte,
- \mathcal{C} è doppiamente degeneri $\iff rg(A) = 1 \iff \mathcal{C}$ è formata da due rette coincidenti.

Osservazione 5.2.6 Una conica \mathcal{C} è completamente determinata dalla matrice simmetrica A ad essa associata, che come sappiamo determina univocamente una forma bilineare simmetrica φ , o equivalentemente la corrispondente forma quadratica Q (quella determinata dal polinomio omogeneo di secondo grado che dà l'equazione della conica in coordinate omogenee). Dal Teorema precedente discende che sono equivalenti:

1. \mathcal{C} è non degeneri;
2. A è non degeneri, ossia non singolare;
3. φ è non degeneri.

Per l'osservazione precedente, le matrici $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ ed $A' = (a'_{hk})_{1 \leq h, k \leq 3}$, che rappresentano \mathcal{C} rispetto a diversi sistemi di coordinate omogenee, hanno lo stesso rango. Quindi, tale rango è invariante per cambiamenti di riferimento proiettivi (ossia, per trasformazioni proiettive). Perciò, si dice che $rg(A)$ è un *invariante proiettivo* della conica, e si chiama **rango della conica**.

5.3 Posizioni di una retta rispetto ad una conica

Definizione 5.3.1 Siano $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_i x_j = 0$ una conica generale ed $r : u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ una retta del piano. La retta r può assumere tre posizioni rispetto a \mathcal{C} :

-) r è **secante** se $r \cap \mathcal{C}$ contiene due punti reali e distinti.
-) r è **tangente** se $r \cap \mathcal{C}$ contiene due punti reali e coincidenti.
-) r è **esterna** se $r \cap \mathcal{C}$ contiene due punti complessi coniugati.

Le intersezioni di \mathcal{C} con r corrispondono alle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} a_{ij}x_i x_j = 0, \\ u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0. \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Consideriamo separatamente i casi della retta impropria i_∞ e di una retta propria.

Caso I: intersezioni con la retta impropria (Classificazione Affine).

Se $r = i_\infty : x_3 = 0$ è la retta impropria, allora il sistema (5.3.1) diventa

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases} \quad (5.3.2)$$

indichiamo con Δ il discriminante dell'equazione di secondo grado contenuta in (5.3.2). Posto

$$D_{33} := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -\Delta,$$

risulta che D_{33} è un'invariante affine della conica (cioè, non dipende dal sistema di riferimento affine). Si hanno le seguenti tre possibilità:

- $D_{33} > 0 \iff i_\infty \cap \mathcal{C} = \{\text{due punti complessi coniugati}\}.$
- $D_{33} < 0 \iff i_\infty \cap \mathcal{C} = \{\text{due punti reali e distinti}\}.$
- $D_{33} = 0 \iff i_\infty \cap \mathcal{C} = \{\text{due punti reali e coincidenti}\}.$

Definizione 5.3.2 Se $D_{33} > 0$ la conica (generale) \mathcal{C} si chiama **ellisse**; se $D_{33} < 0$, \mathcal{C} si chiama **iperbole**; se $D_{33} = 0$, \mathcal{C} si chiama **parabola**.

La suddivisione delle coniche generali in ellissi, parabole ed iperboli, sulla base dei punti all'infinito, prende il nome di **classificazione affine**, essendo una caratteristica affine della conica, ossia, invariante per cambiamenti di riferimento affini, cioè, per trasformazioni affini. In particolare, è anche invariante per cambiamenti di riferimento ortonormali (movimenti), ma NON per cambiamenti di riferimento proiettivi.

Definizione 5.3.3 Una circonferenza è una ellisse la cui equazione soddisfa $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$.

Definizione 5.3.4 Siano \mathcal{C} un'iperbole, e $R_\infty(l, m, 0)$, $S_\infty(l', m', 0)$ i punti di intersezione di \mathcal{C} con la retta impropria. Le direzioni definite da R_∞ ed S_∞ si dicono **direzioni asintotiche** dell'iperbole \mathcal{C} .

Se il riferimento $\mathcal{R}(O, x, y)$ è ortonormale, si può dimostrare che vale:

$$ll' + mm' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_{11} + a_{22} = 0.$$

Quindi, le direzioni asintotiche dell'iperbole sono perpendicolari tra loro se e solo se $T := a_{11} + a_{22} = 0$. In questo caso, si dice che \mathcal{C} è un'iperbole equilatera. Si può dimostrare che $T = a_{11} + a_{22}$ è un *invariante (metrico)* della conica.

Caso II: intersezioni con una retta propria.

Sia r la retta propria di equazioni parametriche $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$. In coordinate non omogenee (x, y) , il sistema (5.3.1) si scrive :

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ a_{11}(x_0 + lt)^2 + a_{22}(y_0 + mt)^2 + 2a_{12}(x_0 + lt)(y_0 + mt) \\ + 2a_{13}(x_0 + lt) + 2a_{23}(y_0 + mt) + a_{33} = 0 \end{cases}$$

Posto

$$\begin{aligned} \alpha &= a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2, \\ \beta &= (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})l + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})m, \\ \gamma &= a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{13}x_0 + 2a_{23}y_0 + a_{33}, \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ \alpha t^2 + 2\beta t + \gamma = 0. \end{cases}$$

Se $\alpha = 0$, il punto improprio $R_\infty(l, m, 0)$ della retta r appartiene alla conica \mathcal{C} , e l'altro punto d'intersezione di r con \mathcal{C} si ottiene per t soluzione dell'equazione $2\beta t + \gamma = 0$.

Se $\alpha \neq 0$, l'equazione $\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma = 0$ ammette due soluzioni, in corrispondenza delle quali si hanno i due punti di intersezione di r con la conica \mathcal{C} .

Mantenendo le notazioni precedenti, sia $P_0(x_0, y_0) \in r \cap \mathcal{C}$ (equivalentemente, $\gamma = 0$). Se P_0 è l'unico punto di intersezione di r con \mathcal{C} (cioè, r è tangente in P_0 alla conica) allora tale condizione si traduce analiticamente imponendo $\beta = 0$; tenendo conto dell'espressione di β , deve esistere $\varrho \neq 0$, tale che

$$-(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) = \varrho l, \quad (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) = \varrho m.$$

Si ottiene così l'equazione della **retta tangente** in $P_0(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ alla conica \mathcal{C} :

$$t_{P_0} : (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13})(x - x_0) + (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23})(y - y_0) = 0.$$

Nell'equazione precedente, i coefficienti di x e di y non sono contemporaneamente nulli. Infatti, se fosse $(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}) = (a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}) = 0$ allora si avrebbe anche $a_{11}x_0^2 + a_{12}x_0y_0 + a_{13}x_0 = 0$ e $a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + a_{23}y_0 = 0$ che, insieme alla condizione $\gamma = 0$, implicano $a_{13}x_0 + a_{23}y_0 + a_{33} = 0$. Quindi, (x_0, y_0) sarebbe soluzione del sistema

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0, \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33} = 0, \end{cases}$$

che è incompatibile, perché le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

hanno rango diverso ($rg(A) = 3$, essendo \mathcal{C} generale).

5.4 Polarità definita da una conica

In questa sezione introduciamo il concetto centrale nello studio di una conica (generale), quello di polarità.

Definizione 5.4.1 Siano $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_i x_j = 0$ una conica generale e $P(x_1, x_2, x_3)$, $Q(x'_1, x'_2, x'_3)$ due punti del piano ampliato. P e Q si dicono **coniugati rispetto a \mathcal{C}** se le loro coordinate omogenee verificano la relazione

$$\sum a_{ij}x_i x'_j = 0.$$

Essendo tale relazione simmetrica rispetto a x_i ed x'_i , si ha che P è coniugato a Q se e solo se Q è coniugato a P . Inoltre, si osservi che P è autoconiugato se e solo se $P \in \mathcal{C}$.

Fissato $P_0(x_1^o, x_2^o, x_3^o)$ un punto del piano, il luogo dei punti coniugati a P_0 ha equazione

$$\sum a_{ij}x_i^o x_j = 0,$$

ovvero:

$$\begin{pmatrix} x_1^o & x_2^o & x_3^o \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

dove A è la matrice associata alla conica \mathcal{C} . Si noti che tale equazione rappresenta sempre una retta. Infatti, si ponga

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}x_1^o + a_{12}x_2^o + a_{13}x_3^o, \\ u_2 &= a_{12}x_1^o + a_{22}x_2^o + a_{23}x_3^o, \\ u_3 &= a_{13}x_1^o + a_{23}x_2^o + a_{33}x_3^o. \end{aligned}$$

Essendo $(x_1^o, x_2^o, x_3^o) \neq (0, 0, 0)$ e $\text{rg}(A) = 3$, si conclude facilmente che $(u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$.

Definizione 5.4.2 *La retta*

$$p_{P_0} : u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$$

si chiama **retta polare** di P_0 rispetto alla conica \mathcal{C} . P_0 si chiama **polo** della retta p_{P_0} .

Si osservi che quando $P_0 \in \mathcal{C}$, la retta polare p_{P_0} coincide con la retta t , tangente in P_0 alla conica. Più precisamente:

$$P_0 \in \mathcal{C} \iff p_{P_0} = t.$$

Valgono i seguenti importanti risultati.

Teorema 5.4.3 *Data una conica generale \mathcal{C} , l'applicazione*

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}^{\mathcal{C}} &\rightarrow \sum^{\mathcal{C}} U_{i\infty} \\ P &\mapsto p_P \end{aligned}$$

è una corrispondenza biunivoca, detta **polarità definita dalla conica \mathcal{C}** .

DIM. Abbiamo già illustrato come, a partire da un arbitrario punto P_0 del piano (euclideo ampliato complessificato), si determina univocamente la sua retta polare rispetto a \mathcal{C} . Pertanto, ci basta provare che, per ogni retta r del piano stesso, esiste uno ed un solo punto P_0 tale che $p_{P_0} = r$. Sia $r : u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ una arbitraria retta. Consideriamo il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = u_1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = u_2, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 = u_3 \end{cases} \quad (5.4.1)$$

nelle incognite x_1, x_2, x_3 (non omogeneo, in quanto $(u_1, u_2, u_3) \neq (0, 0, 0)$). La matrice del sistema è quella della conica \mathcal{C} , quindi ha rango 3. Quindi, il sistema è di Cramer, per cui ammette una ed una sola soluzione $(x_1^o, x_2^o, x_3^o) \neq (0, 0, 0)$.

Considerato il punto $P_0(x_1^o, x_2^o, x_3^o)$, dalla definizione di retta polare risulta ovviamente $r = p_{P_0}$. D'altra parte, P_0 è unico, per l'unicità della soluzione (x_1^o, x_2^o, x_3^o) del sistema (5.4.1). \square

Teorema 5.4.4 (di reciprocità) *Siano \mathcal{C} una conica generale, P e Q due punti del piano, p_P e p_Q le rette polari di P e Q rispetto a \mathcal{C} . Allora, si ha:*

$$P \in p_Q \iff Q \in p_P. \quad (5.4.2)$$

DIM. Sia $\mathcal{C} : a_{ij}x_i x_j = 0$ e siano $P(x_1^o, x_2^o, x_3^o)$ e $Q(y_1^o, y_2^o, y_3^o)$ due punti del piano. L'equazione della polare di Q è $\sum_i (\sum_j a_{ij} y_j^o) x_i = 0$. Pertanto:

$$P \in p_Q \iff \sum_i (\sum_j a_{ij} y_j^o) x_i^o = 0 \iff \sum_j (\sum_i a_{ij} x_i^o) y_j^o = 0 \iff Q \in p_P \quad \square$$

Definizione 5.4.5 *Le rette p_Q e p_P per cui vale la (5.4.2), si dicono **rette coniugate** rispetto alla conica \mathcal{C} .*

I seguenti risultati sono conseguenze del teorema di reciprocità.

Corollario 5.4.6 *Siano \mathcal{C} una conica generale e r una retta del piano. Al variare di P su r , la polare p_P descrive un fascio di rette di centro il polo di r .*

DIM. Sia $r = p_{P_0}$. Allora, per il teorema di reciprocità, si ha

$$P \in r = p_{P_0} \iff P_0 \in p_P \iff p_P \in \mathcal{F}(P_0),$$

dove $\mathcal{F}(P_0)$ indica il fascio di rette di centro P_0 , da cui la tesi. \square

Corollario 5.4.7 *Siano \mathcal{C} una conica generale e $P_0 \notin \mathcal{C}$. Allora si ha:*

- (i) *Se $\{T_1, T_2\} = p_{P_0} \cap \mathcal{C}$ allora le rette $P_0 T_1$ e $P_0 T_2$ sono tangenti alla conica \mathcal{C} rispettivamente in T_1 e T_2 .*
- (ii) *Se $t_1 = P_0 T_1$ è tangente in T_1 a \mathcal{C} e $t_2 = P_0 T_2$ è tangente in T_2 a \mathcal{C} , allora $p_{P_0} = T_1 T_2$.*

DIM. (i): Poiché $T_1, T_2 \in \mathcal{C}$, si ha $p_{T_1} = t_1$, tangente in T_1 a \mathcal{C} , e $p_{T_2} = t_2$, tangente in T_2 a \mathcal{C} . Allora, per il teorema di reciprocità, si ha anche:

$$\begin{aligned} T_1 \in p_{P_0} &\Rightarrow P_0 \in p_{T_1} = t_1 \\ T_2 \in p_{P_0} &\Rightarrow P_0 \in p_{T_2} = t_2, \end{aligned}$$

da cui si ottiene $t_1 = P_0 T_1$ e $t_2 = P_0 T_2$.

(ii): Per il teorema di reciprocità si ha:

$$\begin{aligned} P_0 \in t_1 = p_{T_1} &\Rightarrow T_1 \in p_{P_0} \\ P_0 \in t_2 = p_{T_2} &\Rightarrow T_2 \in p_{P_0}. \end{aligned}$$

Quindi, p_{P_0} è la retta congiungente i punti T_1 e T_2 (si osservi che $T_1 \neq T_2$, perché $P_0 \notin \mathcal{C}$). \square

Definizione 5.4.8 *Data una conica generale \mathcal{C} , un punto $P \notin \mathcal{C}$ del piano si dice*

- **esterno** a \mathcal{C} se le tangenti condotte da P alla conica sono reali e distinte;
- **interno** a \mathcal{C} se le tangenti condotte da P alla conica sono complesse coniugate.

Per costruire la polare di un punto P rispetto ad una conica \mathcal{C} si procede nel modo seguente.

-) Se P è esterno alla conica \mathcal{C} , si mandano da P le tangenti alla conica. Detti T_1 e T_2 i punti di contatto, la polare di P è la retta congiungente i punti T_1 e T_2 .
-) Se P è interno alla conica, si considerano due rette distinte r ed s passanti per P . Si costruisce il polo R della retta r ed il polo S della retta s , e la polare di P è la retta passante per i punti R ed S .

5.5 Centro e diametri di una conica

Definizione 5.5.1 *Sia $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_ix_j = 0$ una conica generale. Si chiama **centro** di \mathcal{C} il polo della retta impropria.*

La parabola, essendo tangente alla retta impropria, ha come centro un punto improprio, invece l'ellisse e l'iperbole hanno centro proprio. Per questo motivo, la parabola è detta **conica senza centro**, l'ellisse e l'iperbole **coniche a centro**.

Nel caso dell'ellisse o dell'iperbole, il centro si determina nel seguente modo: si considerano i punti impropri $X_\infty(1, 0, 0)$ dell'asse delle x e $Y_\infty(0, 1, 0)$ dell'asse delle y , del riferimento affine $\mathcal{R}(O, x, y)$ prefissato, e si scrivono le equazioni delle rispettive polari:

$$\begin{cases} p_{X_\infty} : a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ p_{Y_\infty} : a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases} \quad (5.5.1)$$

Poichè $X_\infty \in i_\infty = p_C$ e $Y_\infty \in i_\infty = p_C$, per il teorema di reciprocità si ha che $C \in p_{X_\infty}$ e $C \in p_{Y_\infty}$, ossia $\{C\} = p_{X_\infty} \cap p_{Y_\infty}$. Quindi, *le coordinate di C sono la soluzione del sistema (5.5.1)*.

(Tale sistema è sicuramente compatibile poiché, essendo la conica generale \mathcal{C} una ellisse o una iperbole, risulta $D_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$).

Definizione 5.5.2 *Sia $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_ix_j = 0$ una conica generale. Si chiama **diametro** di \mathcal{C} ogni retta propria passante per il centro.*

Da tale definizione scaturisce subito la seguente

Proposizione 5.5.3 *Siano \mathcal{C} una conica generale e d una retta propria. Allora:*

$$d \text{ è diametro} \iff \text{il polo di } d \text{ è un punto improprio.}$$

DIM. Sia Q il polo del diametro d , cioè $d = p_Q$. Allora:

$$C \in d = p_Q \Leftrightarrow Q \in p_C = i_\infty \Leftrightarrow Q \text{ è punto improprio. } \square$$

Il polo di un diametro d , essendo un punto all'infinito, definisce una direzione, detta *direzione coniugata* a d .

In una parabola, poiché il suo centro C_∞ è un punto improprio, tutti i diametri sono paralleli, e “passano” per C_∞ , ossia hanno la direzione da esso determinata.

Proposizione 5.5.4 *Sia \mathcal{C} una conica a centro. Se d e d' sono diametri coniugati rispetto a \mathcal{C} , allora ogni corda parallela a d è bisecata da d' (cioè incontra d' nel suo punto medio). In particolare, il centro C di \mathcal{C} è centro di simmetria della conica.*

DIM. Siano P_1 e P_2 due punti della conica e d il diametro della conica parallelo alla corda $\overline{P_1P_2}$. Indicati con $D_\infty(l, m, 0)$ il punto improprio di d , con d' il diametro coniugato di d e con $M(x_0, y_0)$ il punto medio della corda $\overline{P_1P_2}$, la retta r passante per M e parallela a d ha equazioni

$$r \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

Denotati con t_1 e t_2 i valori del parametro corrispondenti rispettivamente ai punti P_1 e P_2 , il punto M , che si ottiene per $t = 0$, corrisponde anche al valore del parametro $t = \frac{t_1+t_2}{2}$, e quindi si ha $t_1 + t_2 = 0$. Ma t_1, t_2 sono le soluzioni dell'equazione

$$\alpha t^2 + 2\beta t + \gamma = 0,$$

con α, β, γ definiti come in (5.3). Quindi, $\frac{t_1+t_2}{2} = -\frac{\beta}{\alpha}$, da cui $\beta = 0$. Ma $\beta = 0$ equivale a dire che $M(x_0, y_0) \in p_{D_\infty} = d'$.

Se $P \in \mathcal{C}$ e d è il diametro per P , indicata con P' l'ulteriore intersezione di d con \mathcal{C} , per quanto visto prima, il centro C è punto medio di $\overline{PP'}$, ossia C è centro di simmetria della conica. \square

Definizione 5.5.5 *Si chiamano **asintoti** di una iperbole \mathcal{C} i diametri passanti per i punti impropri di \mathcal{C} .*

Proposizione 5.5.6 *Siano \mathcal{C} un'iperbole, R_∞ ed S_∞ punti impropri di \mathcal{C} , r ed s due rette aventi direzioni rispettivamente R_∞ ed S_∞ . Allora:*

r ed s sono asintoti $\iff r$ ed s sono tangenti a \mathcal{C} nei suoi punti impropri.

DIM. Se r ed s sono asintoti, allora passano per il centro C della conica, per cui $\{C\} = r \cap s$. Essendo $p_C = i_\infty$ e $p_C \cap \mathcal{C} = \{R_\infty, S_\infty\}$, per la (i) del Corollario (5.4.7) si ha che r ed s sono tangenti alla conica \mathcal{C} rispettivamente in R_∞ ed S_∞ .

Viceversa, siano $r = p_{R_\infty} = t_1$ tangente in R_∞ a \mathcal{C} e $s = p_{S_\infty} = t_2$ tangente in S_∞ a \mathcal{C} . Per la (ii) del Corollario (5.4.7), si ha che $i_\infty = R_\infty S_\infty = p_{r \cap s}$ e quindi $r \cap s = \{C\}$, centro della conica. Si conclude che r ed s sono diametri e, poiché passano per i punti impropri di \mathcal{C} , sono asintoti. \square

Per determinare le equazioni degli asintoti di una iperbole $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_i x_j = 0$, si trovano i punti R_∞ ed S_∞ di intersezione della conica \mathcal{C} con la retta impropria i_∞ . Le loro coordinate sono soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0, \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Equivalentemente, i parametri direttori degli asintoti sono le soluzioni dell'equazione omogenea:

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0. \quad (5.5.2)$$

Esempio 5.5.7 Si vogliono trovare gli asintoti dell'iperbole $\mathcal{C} : x^2 - 4y^2 + x - y + 1 = 0$. L'equazione (5.5.2) si scrive

$$l^2 - 4m^2 = 0,$$

le cui soluzioni $(-2, 1)$ e $(2, 1)$ sono i parametri direttori degli asintoti. Per trovare le coordinate del centro, si risolve il sistema (5.5.1) che in questo caso dà

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2} = 0, \\ 4y + \frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

Quindi, il centro è $C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$, e gli asintoti a_1 e a_2 hanno equazioni

$$a_1 : \frac{x + \frac{1}{2}}{-2} = \frac{y + \frac{1}{8}}{1}, \quad a_2 : \frac{x + \frac{1}{2}}{2} = \frac{y + \frac{1}{8}}{1}.$$

5.6 Assi di una conica

Definizione 5.6.1 Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortonormale $\mathcal{R}(O, x, y)$, consideriamo una conica generale $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_i x_j = 0$. Un diametro d di \mathcal{C} si dice **asse** se è perpendicolare alla sua direzione coniugata.

Osservazione 5.6.2 Si può provare che gli assi di una conica sono i suoi assi di simmetria.

Per determinare gli assi di una conica distinguiamo i seguenti casi:

Caso I: \mathcal{C} è una ELLISSE o IPERBOLE.

Siano $d = p_{D_\infty}$ e $d' = p_{D'_\infty}$ due diametri coniugati di \mathcal{C} , con $D_\infty(l, m, 0)$ e $D'_\infty(l', m', 0)$ (esistono, perchè \mathcal{C} è a centro). Allora, essendo d e d' diametri coniugati, risulta:

$$a_{11}ll' + a_{12}(lm' + l'm) + a_{22}mm' = 0. \quad (5.6.1)$$

Ora, d è asse se e solo se D_∞ è una direzione perpendicolare a D'_∞ , ossia,

$$d \text{ asse} \iff ll' + mm' = 0$$

o equivalentemente, $(l', m') = (\varrho m, -\varrho l)$, con $\varrho \neq 0$. L'equazione (5.6.1) allora si scrive:

$$a_{12}l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2 = 0. \quad (5.6.2)$$

Si osservi che essendo $\Delta = (a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2 \geq 0$, l'equazione (5.6.2) ammette soluzioni reali. Quindi, *gli assi di una conica a centro sono rette reali*.

Osserviamo inoltre che $\Delta = 0$ se e solo se $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$. In tal caso, l'equazione (5.6.2) è identicamente soddisfatta, ossia, *ogni diametro è un asse*.

La condizione analitica $a_{11} = a_{22}$ e $a_{12} = 0$ equivale al fatto che \mathcal{C} è una circonferenza. Perciò, *una conica generale \mathcal{C} è una circonferenza se e solo se ogni diametro è asse*.

Se $\Delta > 0$ (quindi la conica è iperbole o ellisse, ma non circonferenza) allora la conica ha due assi reali e distinti. I parametri direttori di essi sono le soluzioni distinte (definiti a meno di un fattore di proporzionalità $\varrho \neq 0$) di (5.6.2).

Esempio 5.6.3 *Si vogliono trovare le equazioni degli assi della conica*

$$\mathcal{C} : x^2 - 4y^2 + x - y + 1 = 0.$$

La conica \mathcal{C} ha centro $C(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$. L'equazione

$$a_{12}l^2 + (a_{22} - a_{11})lm - a_{12}m^2 = 0$$

in questo caso si scrive

$$(-4 - 1)lm = 0,$$

le cui soluzioni sono $(\varrho, 0, 0)$ e $(0, \varrho, 0)$, con $\varrho \neq 0$. Ponendo $\varrho = 1$, si hanno $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$. Quindi, gli assi sono le rette di equazioni

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{8},$$

cioè le rette passanti per C e parallele rispettivamente all'asse delle y e all'asse delle x .

Caso II: \mathcal{C} è una PARABOLA.

Nel caso della parabola, tutti i diametri sono paralleli, quindi hanno tutti la stessa direzione. Sia D_∞ il punto improprio della parabola \mathcal{C} .

Definizione 5.6.4 *L'asse di una parabola \mathcal{C} è la polare del punto D'_∞ che definisce la direzione ortogonale a D_∞ .*

Esempio 5.6.5 *Troviamo l'equazione dell'asse della parabola $\mathcal{C} : x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$. Il punto improprio D_∞ della parabola si trova risolvendo il sistema:*

$$\begin{cases} \mathcal{C} : x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_3 = 0, \\ i_\infty : x_3 = 0, \end{cases}$$

la cui soluzione è $D_\infty(1, 1, 0)$. Il punto improprio che definisce la direzione ortogonale a quella di D_∞ è allora $D'_\infty(-1, 1, 0)$. Quindi, l'asse a di \mathcal{C} è la polare di D'_∞ , di equazione $4x_1 - 4x_2 - x_3 = 0$ (in coordinate non omogenee, $a : 4x - 4y - 1 = 0$).

Definizione 5.6.6 *Si chiama **vertice** di una conica generale \mathcal{C} ogni punto proprio e reale V , di intersezione di \mathcal{C} con un suo asse a .*

In una parabola c'è un solo vertice. Nell'iperbole ce ne sono due, e appartengono ad uno stesso asse. Nell'ellisse ci sono quattro vertici.

Proposizione 5.6.7 *Siano \mathcal{C} una conica generale, V un suo vertice e t la retta tangente in V a \mathcal{C} . Allora, t è perpendicolare all'asse passante per V .*

DIM. Se a è asse, allora $a = p_{D'_\infty}$ è perpendicolare alla sua direzione coniugata D'_∞ . Di conseguenza, se V è un vertice e $V \in a$, per il teorema di reciprocità si ha:

$$V \in a = p_{D'_\infty} \Rightarrow D'_\infty \in p_V = t$$

e quindi t ha direzione perpendicolare ad a . \square

5.7 Equazioni canoniche

Mediante la scelta di un opportuno sistema di riferimento ortonormale, è possibile scrivere l'equazione di una conica (non degenera) in una forma particolarmente semplice. Distinguiamo i seguenti casi.

a) Sia \mathcal{C} una conica a centro, di equazione

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

in un sistema di riferimento cartesiano ortonormale $RC(O, x, y)$. Scegliamo un nuovo riferimento $RC'(O', x', y')$, in modo tale che

-) $O' = C$ sia il centro della conica, e
-) gli assi del riferimento siano gli assi della conica

Allora, l'equazione di \mathcal{C} in $RC'(O', x', y')$ si riduce alla forma

$$Lx'^2 + My'^2 + N = 0.$$

Inoltre, in base alle diverse possibilità per il segno di L, M, N , si può scrivere l'equazione canonica in uno dei seguenti modi standard:

- i) $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$ (*ellisse a punti reali*);
- ii) $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = -1$ (*ellisse a punti immaginari*);
- iii) $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = \pm 1$ (*iperbole*);

b) Sia \mathcal{C} una parabola. In un nuovo sistema di riferimento cartesiano ortonormale $RC'(O', x', y')$, scelto in modo tale che

-) $O' = V$ sia il vertice della conica, e
-) gli assi del riferimento siano il suo asse e la tangente nel vertice,

l'equazione di \mathcal{C} si riduce alla forma

$$\alpha y'^2 + 2\beta x' = 0.$$

Tenendo conto del fatto che $\alpha \neq 0$ (essendo \mathcal{C} generale), ne segue che, posto $p = -\beta/\alpha$, si può scrivere l'equazione canonica nel seguente modo standard:

$$y'^2 = 2px' \quad (\textit{parabola}).$$

Descriviamo nel seguito due metodi per determinare le equazioni canoniche di una assegnata conica generale.

5.7.1 Il cambiamento di coordinate

In entrambi i casi a) e b) descritti sopra, la trasformazione che porta ad un nuovo sistema di riferimento, nel quale la conica data assume forma canonica, è un movimento del piano euclideo, più precisamente, una *rototraslazione*, ottenuta componendo:

- (i) una *rotazione*, che porta gli assi coordinati ad essere paralleli agli assi della conica nel caso a), o all'asse a della conica ed alla tangente nel vertice $V = \mathcal{C} \cap a$ nel caso b), con

- (ii) una *traslazione*, che porta l'origine del riferimento nel centro della conica nel caso a), o in V nel caso b).

La rotazione del punto (i) si può determinare come applicazione del Teorema Spettrale: considerata la sottomatrice (reale simmetrica)

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

della matrice associata alla conica, se ne determinano gli autovalori, i relativi autospazi ed una base ortonormale di autovettori $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, opportunamente scelta in modo che la matrice ortogonale P del cambiamento di base da $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ a $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ rappresenti una rotazione.

Il cambiamento di coordinate da $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ a $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ è allora dato da

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

(basta confrontare $(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} = \hat{x}\vec{e}_1 + \hat{y}\vec{e}_2$).

La traslazione del punto (ii), una volta determinate le coordinate (\hat{x}_o, \hat{y}_o) del centro C nel caso a), o di V nel caso b), è data da:

$$\begin{cases} \hat{x} = X + \hat{x}_o, \\ \hat{y} = Y + \hat{y}_o. \end{cases}$$

Nelle nuove coordinate (X, Y) , la conica data assume forma canonica. Si osservi che tale metodo è il più completo, in quanto fornisce anche esplicitamente le equazioni del cambiamento di coordinate necessario ad ottenere la conica in forma canonica:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}.$$

5.7.2 Il metodo degli invarianti

a) (Coniche a centro).

Il modo più semplice per determinare i coefficienti L, M, N , consiste nell'usare gli invarianti della conica, il che equivale anche a confrontare la matrice $A = (a_{ij})$ associata a \mathcal{C} nel riferimento $RC(O, x, y)$ con la matrice diagonale $A' = \text{diag}(L, M, N)$ che la rappresenta nel riferimento $RC'(O', x', y')$. Infatti, poiché $LMN = \det(A')$, $LM = D'$ e $L+M = T'$, si ha che L, M, N possono determinarsi considerando e risolvendo il sistema (non lineare)

$$\begin{cases} LMN = \det(A), \\ LM = D_{33}, \\ L + M = T. \end{cases}$$

b) (Parabole).

Il modo più semplice per determinare i coefficienti α, β consiste nell'usare gli invarianti della conica, che verificano

$$\begin{cases} -\alpha\beta^2 = \det(A), \\ (0 = D_{33}), \\ \alpha = T. \end{cases}$$

Esempio 5.7.1 Consideriamo la conica

$$\mathcal{C} : 5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0. \quad (5.7.1)$$

Allora

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 8\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 0 \\ 8\sqrt{2} & 0 & 38 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$

$\det(A) = -32$, quindi la conica è non degenera; $\det(Q) = 16$, pertanto la conica è un'ellisse.

1. Troviamo la rotazione.

Gli autovalori di Q sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$. I corrispondenti autospazi sono generati dai vettori $(1, 1)$ e $(1, -1)$ rispettivamente. Consideriamo allora i versori $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\vec{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (si noti il cambio di segno). Pertanto la rotazione è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}.$$

e in coordinate (\hat{x}, \hat{y}) , l'equazione di \mathcal{C} diventa:

$$\mathcal{C} : 2\hat{x}^2 + 8\hat{y}^2 + 16\hat{x} - 16\hat{y} + 38 = 0. \quad (5.7.2)$$

2. Troviamo la traslazione.

Essendo la conica un'ellisse, ne determiniamo il centro

$$C : \begin{cases} 5x - 3y + 8\sqrt{2} = 0, \\ -3x + 5y = 0 \end{cases} \implies C \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}} \right).$$

Quindi, la rototraslazione è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

e sostituendo nell'equazione (5.7.1) si ottiene l'equazione canonica $2X^2 + 8Y^2 - 2 = 0$, cioè:

$$X^2 + 4Y^2 - 1 = 0.$$

Onde evitare calcoli più laboriosi, si può pervenire allo stesso risultato determinando le coordinate $(\hat{x}_o, \hat{y}_o) = (-4, 1)$ di C ottenute risolvendo

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{2}} \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_o \\ \hat{y}_o \end{pmatrix},$$

considerando la traslazione

$$\begin{cases} \hat{x} = X + \hat{x}_o = X - 4, \\ \hat{y} = Y + \hat{y}_o = Y + 1, \end{cases}$$

e sostituendo nell'equazione (5.7.2).

Infine, osserviamo come il metodo degli invarianti porti a risultati concordi con i precedenti. Infatti, avremo

$$\begin{cases} LMN = \det(A) = -32, \\ LM = D_{33} = 16, \\ L + M = T = 10, \end{cases} \implies \begin{cases} L = 2 \text{ o } 8, \\ M = 8 \text{ o } 2, \\ N = -2, \end{cases}$$

e quindi,

$$C : 2X^2 + 8Y^2 - 2 = 0 \quad \text{o} \quad 8X^2 + 2Y^2 - 2 = 0.$$

Esempio 5.7.2 Consideriamo la conica

$$C : 7x^2 + 5y^2 + 2\sqrt{3}xy + 32\sqrt{3}x = 0. \quad (5.7.3)$$

Allora

$$A = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{3} & 16\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 & 0 \\ 16\sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}.$$

La conica è non degenere ($\det(A) = 256 \cdot 5 \cdot 3 \neq 0$) ed è un'ellisse, in quanto $D_{33} = \det(Q) = 32 > 0$. Procediamo quindi come nell'esempio precedente.

1. Troviamo la rotazione.

Gli autovalori di Q sono $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 8$. I corrispondenti autospazi sono generati dai vettori $(1, -\sqrt{3})$ e $(\sqrt{3}, 1)$. Consideriamo allora i versori $\vec{e}_1 = \frac{1}{2}(1, -\sqrt{3})$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, 1)$. Pertanto la rotazione è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix},$$

e in coordinate (\hat{x}, \hat{y}) , l'equazione di \mathcal{C} diventa $4\hat{x}^2 + 8\hat{y}^2 + 16\sqrt{3}\hat{x} + 48\hat{y} = 0$, ossia,

$$\mathcal{C} : \hat{x}^2 + 2\hat{y}^2 + 4\sqrt{3}\hat{x} + 12\hat{y} = 0. \quad (5.7.4)$$

2. Troviamo la traslazione.

Essendo la conica un'ellisse, ne determiniamo il centro $C(-\frac{5}{2}\sqrt{3}, \frac{3}{2})$, che in coordinate (\hat{x}, \hat{y}) è dato da $(\hat{x}_o, \hat{y}_o) = (-2\sqrt{3}, -3)$. Il cambiamento di coordinate che dà l'equazione canonica è quindi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{5}{2}\sqrt{3} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix},$$

e l'equazione canonica si ottiene dalla (5.7.4) mediante la traslazione

$$\begin{cases} \hat{x} = X + \hat{x}_o = X - 2\sqrt{3}, \\ \hat{y} = Y + \hat{y}_o = Y - 3, \end{cases}$$

che dà

$$\mathcal{C} : X^2 + 2Y^2 - 30 = 0.$$

Infatti, usando il metodo degli invarianti, avremo

$$\begin{cases} LMN = \det(A) = -256 \cdot 5 \cdot 3, \\ LM = D_{33} = 32, \\ L + M = T = 12, \end{cases} \implies \begin{cases} L = 4 \text{ o } 8, \\ M = 8 \text{ o } 4, \\ N = -120, \end{cases}$$

e quindi,

$$\mathcal{C} : 4(X^2 + 2Y^2 - 30) = 0 \quad \text{o} \quad 4(2X^2 + Y^2 - 30) = 0.$$

Esempio 5.7.3 Consideriamo la conica

$$\mathcal{C} : x^2 + 4y^2 + 4xy - 6x + 1 = 0. \quad (5.7.5)$$

Allora

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$\det(A) = -36$, quindi la conica è non degenera; $\det(Q) = 0$, pertanto la conica è una parabola.

1. Troviamo la rotazione.

Gli autovalori di Q sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 5$. I corrispondenti autospazi sono generati dai vettori $(-2, 1)$ e $(1, 2)$ rispettivamente. Consideriamo allora i versori $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1)$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2)$; pertanto la rotazione è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

e in coordinate (\hat{x}, \hat{y}) , l'equazione di \mathcal{C} diventa:

$$\mathcal{C} : 5\hat{y}^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}\hat{x} - \frac{6}{\sqrt{5}}\hat{y} + 1 = 0. \quad (5.7.6)$$

2. Troviamo la traslazione.

Essendo la conica una parabola, ne determiniamo il centro $C_\infty(-2, 1, 0)$, la direzione ortogonale $D_\infty(1, 2, 0)$, e l'asse

$$a = p_{D_\infty} : 5x + 10y - 3 = 0.$$

Allora, il vertice della parabola è $V = a \cap \mathcal{C}$ è il punto $V\left(\frac{17}{75}, \frac{14}{75}\right)$, e la rototraslazione è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{17}{75} \\ \frac{14}{75} \end{pmatrix},$$

e sostituendo nell'equazione (5.7.5) si ottiene l'equazione canonica

$$5Y^2 - \frac{12}{\sqrt{5}}X = 0.$$

Lo stesso risultato si ottiene determinando le coordinate $(\hat{x}_o = \frac{4}{75}\sqrt{5}, \hat{y}_o = \frac{3}{25}\sqrt{5})$ di V , considerando la traslazione

$$\begin{cases} \hat{x} = X + \hat{x}_o = X + \frac{4}{75}\sqrt{5}, \\ \hat{y} = Y + \hat{y}_o = Y + \frac{3}{25}\sqrt{5}, \end{cases}$$

e sostituendo nell'equazione (5.7.6).

Infine, con il metodo degli invarianti, avremo

$$\begin{cases} -\alpha^2\beta = \det(A) = -36, \\ (D_{33} = 0), \\ \beta = 5, \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \pm\frac{6}{\sqrt{5}}, \\ \beta = 5 \end{cases}$$

e quindi

$$\mathcal{C} : 5Y^2 \pm \frac{12}{\sqrt{5}}X = 0.$$

Esercizio 5.7.4 Per ciascuna delle seguenti coniche:

1. $\mathcal{C} : 2x^2 + 4x - 2y + 1 = 0.$

2. $\mathcal{C} : x^2 + 6xy + y^2 + 2x + y + \frac{1}{2} = 0.$

3. $\mathcal{C} : x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 10y + 16 = 0.$

(a) Determinare la classificazione proiettiva ed affine, il centro, gli assi, gli asintoti (nel caso dell'iperbole), il vertice (nel caso della parabola).

(b) Determinare la forma canonica, specificando il cambiamento di coordinate (ossia, la rototraslazione) che permette di ottenerla.

5.8 Fuochi ed eccentricità di una conica

Sia $\mathcal{R}(O, x, y)$ un sistema di riferimento cartesiano ortonormale. Se \mathcal{C} è una conica generale, si ha la seguente

Proposizione 5.8.1 \mathcal{C} è una circonferenza se e solo se \mathcal{C} passa per i punti ciclici.

DIM. Se \mathcal{C} è una circonferenza, allora ha $a_{11} - a_{22} = a_{12} = 0$. Pertanto, \mathcal{C} ha un'equazione del tipo $\mathcal{C} : a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$, e si verifica subito che le coordinate dei punti ciclici $I_\infty(1, i, 0)$, $J_\infty(1, -i, 0)$ soddisfano la sua equazione.

Viceversa, supponiamo che i punti ciclici $I_\infty(1, i, 0)$ e $J_\infty(1, -i, 0)$ appartengano alla conica $\mathcal{C} : \sum a_{ij}x_ix_j = 0$. Allora, si ha

$$a_{11} - a_{22} + 2a_{12}i = 0,$$

$$a_{11} - a_{22} - 2a_{12}i = 0$$

da cui sommando membro a membro si ottiene $a_{11} = a_{22}$, e sottraendo membro a membro si ottiene $a_{12} = 0$. Pertanto, \mathcal{C} è una circonferenza. \square

Definizione 5.8.2 Sia \mathcal{C} una conica generale a punti reali. Si chiama **fuoco** di \mathcal{C} un punto proprio e reale, tale che le tangenti condotte da esso alla conica siano le rette isotrope.

Osservazione 5.8.3 Essendo le tangenti condotte da un fuoco F alla conica \mathcal{C} rette complesse coniugate, F è sempre un punto interno a \mathcal{C} .

Proposizione 5.8.4 Sia \mathcal{C} una conica generale a punti reali. Allora, il centro di \mathcal{C} è un fuoco se e solo se \mathcal{C} è una circonferenza. (Una circonferenza ha un solo fuoco, che coincide con il centro.)

DIM. Supponiamo che il centro C della conica \mathcal{C} coincida con un fuoco F . Allora, $p_F = p_C = i_\infty$.

Poichè F è fuoco, le rette CA_∞ e CB_∞ , tangenti a \mathcal{C} condotte da $C = F$, sono le rette isotrope. Quindi, A_∞ e B_∞ sono i punti ciclici. Ma A_∞ e B_∞ appartengono alla conica. Quindi, per la proposizione (5.8.1), \mathcal{C} è una circonferenza.

Viceversa, sia \mathcal{C} una circonferenza. Per la proposizione (5.8.1), \mathcal{C} passa per $I_\infty(1, i, 0)$ e $J_\infty(1, -i, 0)$. Le tangenti alla conica per I_∞ e J_∞ si incontrano nel polo della retta passante per I_∞ e J_∞ , ossia per il polo della retta impropria i_∞ , che per definizione è il centro C di \mathcal{C} . Allora, C è anche fuoco, perchè le tangenti condotte da esso a \mathcal{C} sono le rette isotrope. \square

Proposizione 5.8.5 *Una conica a punti reali, a centro e che non sia una circonferenza, ha due fuochi distinti, che appartengono ad uno stesso asse detto **asse focale**. Una parabola ha un solo fuoco, che appartiene all'asse della parabola.*

Definizione 5.8.6 *Sia \mathcal{C} una conica generale a punti reali. Si chiama **direttrice** della conica \mathcal{C} una retta propria e reale, polare di un fuoco.*

Proposizione 5.8.7 *Se \mathcal{C} è una conica a centro, qualunque sia P punto proprio e reale di \mathcal{C} , il rapporto delle distanze di P da un fuoco e dalla relativa direttrice è costante.*

DIM. Una conica \mathcal{C} con fuoco $F(x_0, y_0)$ e direttrice $d : ax + by + c = 0$, ha equazione, in coordinate non omogenee, del tipo:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - h(ax + by + c)^2 = 0.$$

Sia $P(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{C}$; allora si ha:

$$d(P, F) = \sqrt{(\bar{x} - x_0)^2 + (\bar{y} - y_0)^2},$$

$$d(P, d) = \left| \frac{a\bar{x} + b\bar{y} + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

da cui si ricava:

$$\frac{d(P, F)^2}{d(P, d)^2} = \frac{(\bar{x} - x_0)^2 + (\bar{y} - y_0)^2}{(a\bar{x} + b\bar{y} + c)^2} (a^2 + b^2) = h(a^2 + b^2). \quad \square$$

Proposizione 5.8.8 *Sia \mathcal{C} una parabola. Il rapporto delle distanze di un punto proprio e reale $P \in \mathcal{C}$ dal fuoco F e dalla direttrice d è uguale a 1.*

DIM. Supponiamo che il fuoco abbia coordinate $F(\frac{p}{2}, 0)$ e la direttrice d abbia equazione $x + \frac{p}{2} = 0$; allora l'equazione di \mathcal{C} è $y^2 = 2px$. Se $P(x_0, y_0) \in \mathcal{C}$, allora si ha:

$$\begin{aligned} d(P, F) &= \sqrt{(x_0 - \frac{p}{2})^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 - \frac{p}{2})^2 + 2px_0} = \sqrt{(x_0 + \frac{p}{2})^2} = |x_0 + \frac{p}{2}| \\ &= d(P, d), \end{aligned}$$

da cui la tesi. \square

Definizione 5.8.9 *Se \mathcal{C} è una conica generale a punti reali, il rapporto delle distanze di $P \in \mathcal{C}$ da un fuoco e dalla relativa direttrice si chiama **eccentricità**, e si indica con e .*

Come visto, una parabola ha eccentricità $e = 1$. Si può dimostrare che un'ellisse ha eccentricità $e < 1$; un'iperbole ha eccentricità $e > 1$.

Proposizione 5.8.10 *In un'ellisse, la somma delle distanze di un suo punto qualunque dai fuochi è costante ed è uguale alla misura dell'asse focale (lunghezza del segmento di estremi V_1, V_2 , vertici che stanno sull'asse contenente i fuochi).*

DIM. Se F_1 ed F_2 sono fuochi e d_1 e d_2 rispettivamente le relative direttrici, si ha:

$$\frac{d(P, F_1)}{d(P, d_1)} = \frac{d(P, F_2)}{d(P, d_2)} = e$$

da cui

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = e \cdot (d(P, d_1) + d(P, d_2)) = e \cdot d(d_1, d_2),$$

che quindi non dipende da P .

Allora, per $P = V_1$ si ha:

$$d(V_1, F_1) + d(V_1, F_2) = e \cdot d(d_1, d_2).$$

Ma

$$d(V_1, F_1) + d(V_1, F_2) = d(V_1, F_1) + d(F_1, F_2) + d(F_2, V_2) = d(V_1, V_2)$$

e quindi

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(V_1, V_2) \quad (= 2a). \quad \square$$

Nel caso dell'iperbole si può dimostrare che il valore assoluto della differenza delle distanze di un punto dell'iperbole dai fuochi è uguale alla misura dell'asse focale, cioè

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Osservazione 5.8.11 *E' facile calcolare le coordinate dei fuochi e l'eccentricità di una conica, quando questa ha equazione in forma canonica.*

Per l'**ELLISSE**: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a \geq b > 0$, posto $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ si trova facilmente che i fuochi hanno coordinate $F(\pm c, 0)$, l'eccentricità e è data da $e = \frac{c}{a} < 1$ e le direttrici sono le rette $x = \pm \frac{a}{e}$.

Per l'**IPERBOLE**: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a > 0$ e $b > 0$, posto $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, i fuochi hanno coordinate $F(\pm c, 0)$, l'eccentricità $e = \frac{c}{a} > 1$ e le direttrici sono le rette $x = \pm \frac{a}{e}$.

Per la **PARABOLA**: $y^2 = 2px$, il fuoco ha coordinate $F(\frac{p}{2}, 0)$, l'eccentricità $e = 1$ e la direttrice d ha equazione $x + \frac{p}{2} = 0$.

5.9 Studio di una conica

Sia fissato un sistema $RC(O, x, y)$. **Studiare** una assegnata conica \mathcal{C} , di equazione cartesiana $\sum a_{ij}x_i x_j = 0$ vuol dire:

- a) *Classificarla dal punto di vista proiettivo ed affine.*
- b) *Trovarne assi, centro, gli asintoti (solo nel caso di un'iperbole), il vertice (solo nel caso di una parabola).*
- c) *Trovarne l'equazione canonica (con il metodo degli invarianti, a meno che sia espressamente richiesto il cambiamento di coordinate che porta all'equazione canonica).*
- d) *(solo se espressamente richiesto) Scrivere l'equazione canonica in modo standard, e trovare vertici, fuochi, eccentricità, direttrici.*

Esercizi:

- 1) *Studiare $\mathcal{C} : 3x^2 - 2xy - 2x + 2y + 3 = 0$.*
- 2) *Studiare $\mathcal{C} : 2x^2 + 4y^2 + 4xy + 6x + 1 = 0$.*
- 3) *Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri la conica $\mathcal{C}_k : x^2 + y^2 + 2kxy + 2ky + 1 = 0$.*
 - a) *Classificare \mathcal{C}_k dal punto di vista proiettivo e affine.*
 - b) *Per $k = 1$, studiare \mathcal{C}_1 .*
- 4) *Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri la conica $\mathcal{C}_k : x^2 + ky^2 + 4kxy + 2(k-1)y = 0$.*
 - a) *Classificare \mathcal{C}_k dal punto di vista proiettivo e affine.*
 - b) *Per $k = 3$, studiare \mathcal{C}_3 .*
- 5) *Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri la conica $\mathcal{C}_k : 3x^2 - 2kxy - 2x + 2y + 3 = 0$.*
 - a) *Classificare \mathcal{C}_k dal punto di vista proiettivo e affine.*
 - b) *Per $k = -1$, studiare \mathcal{C}_1 .*

Capitolo 6

Curve Algebriche Piane

6.1 Definizione.

Definizione 6.1.1 Sia $f(x, y)$ un polinomio algebrico di grado $n \geq 1$ con coefficienti complessi nelle variabili x, y . L'insieme \mathcal{C} dei punti $P(x, y)$ del piano (affine/euclideo) le cui coordinate x, y soddisfano l'equazione

$$f(x, y) = 0 \tag{6.1.1}$$

si dice **curva algebrica piana** di ordine n . L'equazione $f(x, y) = 0$ si dice **equazione cartesiana** di \mathcal{C} .

Osservazione 6.1.2 (Simmetrie di una curva algebrica piana)

$\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ è **simmetrica** rispetto

- **all'origine** se $P(x, y) \in \mathcal{C} \implies P(-x, -y) \in \mathcal{C}$.
Ciò accade quando tutti i monomi in f sono di grado pari;
- **all'asse x** se $P(x, y) \in \mathcal{C} \implies P(x, -y) \in \mathcal{C}$;
Ciò accade quando tutte le potenze di y in f sono di grado pari;
- **all'asse y** se $P(x, y) \in \mathcal{C} \implies P(-x, y) \in \mathcal{C}$;
Ciò accade quando tutte le potenze di x in f sono di grado pari;.

Esempio 6.1.3 $\mathcal{C}_1 : 2x^2 + 3y^2 - 1 = 0$ è simmetrica rispetto all'origine.

$\mathcal{C}_2 : 2x + 3y^2 - 1 = 0$ è simmetrica rispetto all'asse x .

Sia $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ una curva algebrica di ordine $n \geq 1$. Essendo $f(x, y)$ un polinomio algebrico di grado $n \geq 1$ con coefficienti complessi nelle variabili x, y , esistono $a_{pq} \in \mathbb{C}$, tali che

$$f(x, y) = \sum_{p+q \leq n} a_{pq} x^p y^q = 0. \tag{6.1.2}$$

Passando alle coordinate omogenee di \mathbb{P}^2 , avremo

$$f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = \sum_{p+q \leq n} a_{pq} \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^p \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^q = \sum_{p+q \leq n} a_{pq} \frac{x_1^p x_2^q}{x_3^{p+q}}$$

e quindi

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_3)^n f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = \sum_{p+q \leq n} a_{pq} x_1^p x_2^q x_3^{n-(p+q)} \quad (6.1.3)$$

Si noti che $F(x_1, x_2, x_3)$ è un polinomio omogeneo di grado n .

Viceversa, si passa da un'equazione del tipo (6.1.3) a una equazione del tipo (6.1.2) dividendo per x_3^n (con $x_3 \neq 0$), e ponendo $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$.

Definizione 6.1.4 *Nel piano proiettivo \mathbb{P}^2 , si chiama **curva algebrica piana, di ordine $n \geq 1$** , l'insieme \mathcal{C}^n dei punti $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^2$ le cui coordinate soddisfano un'equazione del tipo*

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (6.1.4)$$

dove $F(x_1, x_2, x_3)$ è un polinomio omogeneo di grado n a coefficienti complessi.

Si osservi che

$$F(\rho x_1, \rho x_2, \rho x_3) = \rho^n F(x_1, x_2, x_3) \quad \text{per ogni } \rho \in \mathbb{C}$$

e quindi,

$$F(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = 0 \iff F(\rho \tilde{x}_1, \rho \tilde{x}_2, \rho \tilde{x}_3) = 0.$$

Pertanto, l'equazione in coordinate omogenee di una \mathcal{C}^n è determinata a meno di un fattore di proporzionalità.

Proposizione 6.1.5 *L'ordine di una curva algebrica è un invariante proiettivo.*

DIM. Consideriamo $\mathcal{C}^n : F(x_1, x_2, x_3) = 0$ ed una trasformazione proiettiva f . Allora, $f(\mathcal{C}^n)$ è ancora descritta da un'equazione algebrica, $F'(x'_1, x'_2, x'_3) = 0$, ancora di grado n . Infatti, essendo f una trasformazione proiettiva, f corrisponde ad un cambiamento di coordinate proiettive, descritto da equazioni lineari (cioè, di I grado) del tipo $x_r = \sum a_{ir} x'_i$ (con A invertibile), e l'equazione di $f(\mathcal{C}^n)$ si ottiene da

$$f(\mathcal{C}^n) : F\left(\sum a_{i1} x'_i, \sum a_{j2} x'_j, \sum a_{k3} x'_k\right) = 0. \quad \square$$

In ordine crescente, alcune delle principali curve algebriche piane sono:

- Le \mathcal{C}^1 , ovvero le *rette*, di equazione del tipo $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$;
- Le \mathcal{C}^2 , ovvero le *coniche* di equazione del tipo $\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i x_j = 0$, con a_{ij} non tutti nulli;
- Le \mathcal{C}^3 , ovvero le *cubiche*;
- Le \mathcal{C}^4 , ovvero le *quartiche*.

Osservazione 6.1.6 *L'equazione di una \mathcal{C}^n in coordinate non omogenee può avere grado minore di n .*

Esempi

- L'equazione $x_2x_3^2 - x_1^3 = 0$ rappresenta una cubica;
- L'equazione $x_1^3 + x_2^2 - x_3 + 1 = 0$ non rappresenta una curva algebrica, in quanto il polinomio $F(x_1, x_2, x_3)$ non è omogeneo;
- L'equazione $x_1x_2x_3^3 - x_1^2x_2x_3^2 + x_2^2x_3^3 - 2x_1x_3^4 = 0$ rappresenta l'equazione di una curva algebrica \mathcal{C}^5 riducibile:
 $\mathcal{C}^5 = \mathcal{C}^2 \cup \mathcal{C}^3$, con $\mathcal{C}^2 : x_3^2 = 0$ e $\mathcal{C}^3 : x_1x_2x_3 - x_1^2x_2 + x_2^2x_3 - 2x_1x_3^2 = 0$. Si noti che in coordinate cartesiane essa ha ordine 3, non 5.

6.2 Riducibilità di una \mathcal{C}^n

Definizione 6.2.1 *Un polinomio $F(x_1, x_2, x_3)$ di grado ≥ 1 si dice **irriducibile** se non può essere scritto come prodotto di polinomi di grado positivo. In caso contrario, si dice **riducibile**.*

*Una curva algebrica $\mathcal{C}^n : F(x_1, x_2, x_3) = 0$ si dice **irriducibile** se tale è il polinomio $F(x_1, x_2, x_3)$. In caso contrario, la curva \mathcal{C}^n si dice **riducibile**.*

Osservazione 6.2.2 *Adattando l'argomento usato per provare che l'ordine di una curva algebrica è un invariante proiettivo, è facile concludere che anche la sua riducibilità/irriducibilità è un invariante proiettivo.*

Esempio 6.2.3

1. *Un polinomio di grado uno è sempre irriducibile. Corrispondentemente, ogni retta è irriducibile.*

2. Il polinomio $f(x, y) = xy + y^2$ è riducibile, in quanto $f(x, y) = y(x + y)$. Corrispondentemente, la curva $\mathcal{C} : xy + y^2 = 0$ è riducibile (conica sempl. degenera).
3. Il polinomio $f(x, y) = y^2 + x^3$ è irriducibile. Infatti, supponiamo per assurdo che $f(x, y) = (y + p(x))(y + q(x))$, con p, q polinomi. Per il principio di identità dei polinomi, deve essere $p + q = 0$ e $pq = x^3$, per cui $p^2 = -x^3$, che è impossibile, avendo p^2 grado pari. Corrispondentemente, la curva $\mathcal{C} : y^2 + x^3 = 0$ è irriducibile.
4. Il polinomio $f(x, y) = 2x^3 + x^2y - x^2 + 4xy + 2y^2 - 2y$ è riducibile. Infatti, richiedendo che $f(x, y) = (yp(x) + q(x))(yr(x) + s(x))$, con p, q, r, s polinomi, si trova, applicando il principio di identità dei polinomi, che $f(x, y) = (2y + x^2)(y + 2x - 1)$. Corrispondentemente, la curva $\mathcal{C} : 2x^3 + x^2y - x^2 + 4xy + 2y^2 - 2y = 0$ è riducibile.

Osservazione 6.2.4 Date due curve algebriche $\mathcal{C}^n : f(x, y) = 0$ e $\mathcal{C}^m : g(x, y) = 0$ ($m < n$), se il polinomio $g(x, y)$ è un divisore di $f(x, y)$, allora $\mathcal{C}^m \subset \mathcal{C}^n$.

Proposizione 6.2.5 L'unione e l'intersezione di due curve algebriche piane, sono ancora curve algebriche piane.

DIM. Per l'unione segue dalla legge di annullamento del prodotto. Per l'intersezione, si osservi che se $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ e $\tilde{\mathcal{C}} : g(x, y) = 0$, allora $\mathcal{C} \cap \tilde{\mathcal{C}} : f(x, y)^2 + g(x, y)^2 = 0$. \square

Consideriamo $\mathcal{C}^n : F(x_1, x_2, x_3) = 0$ riducibile. Allora

$$F = F_1^{r_1} \dots F_k^{r_k}$$

dove F_1, \dots, F_k sono polinomi omogenei irriducibili nelle variabili x_1, x_2, x_3 .

Se indichiamo con n_i il grado di F_i , allora $n_1, \dots, n_k < n$ e $n = n_1 r_1 + \dots + n_k r_k$. Inoltre possiamo scrivere

$$\mathcal{C}^n : F_1^{n_1} \dots F_k^{n_k} = 0$$

e quindi

$$\mathcal{C}^n = \mathcal{C}_1^{n_1} \cup \dots \cup \mathcal{C}_k^{n_k}$$

con $\mathcal{C}_i : F_i(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$. Tali curve si dicono (**curve**) **componenti irriducibili** di \mathcal{C}^n (da considerare con la loro molteplicità).

Esempio 6.2.6 La curva algebrica \mathcal{C}^5 dell'esempio precedente è riducibile; il polinomio $x^2 + y^2$ è irriducibile nel campo reale, ma riducibile nel campo complesso: $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$. Pertanto la curva $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 0$ è riducibile.

Definizione 6.2.7 Una curva algebrica $\mathcal{C}^n : f(x, y) = 0$ si dice **reale** se tutti i coefficienti di f sono reali. Si dice **a punti reali** se possiede punti reali.

Esempio 6.2.8 \mathcal{C}^n reale $\not\Rightarrow$ \mathcal{C}^n a punti reali. Esempio: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. \mathcal{C}^n a punti reali $\not\Rightarrow$ \mathcal{C}^n reale. Esempio: una retta isotropa.

Data $\mathcal{C}^n : \sum a_{pq} x_1^p x_2^q x_3^{n-(p+q)} = 0$, la sua coniugata è la curva algebrica

$$\bar{\mathcal{C}}^n : \sum \bar{a}_{pq} x_1^p x_2^q x_3^{n-(p+q)}$$

E' evidente allora che una curva è reale se e solo se $\mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}}$.

Se \mathcal{C} è reale e riducibile, allora le sue componenti sono reali oppure a 2 a 2 coniugate di uguale molteplicità (ad esempio, $\mathcal{C}^3 : x^3 + xy^2 + x^2 - y^2 = 0$, che diventa $(x^2 + y^2)(x - 1) = 0$ e quindi $(x + iy)(x - iy)(x - 1) = 0$).

Proposizione 6.2.9 Una \mathcal{C}^n possiede infiniti propri punti (in generale complessi).

DIM. Consideriamo $\mathcal{C}^n : f(x, y) = 0$ in coordinate non omogenee. Ordinando i termini secondo le potenze crescenti di y , avremo

$$f(x, y) = f_0(x) + f_1(x)y + \cdots + f_m(x)y^m, \quad \text{con } m \leq n.$$

L'equazione $f_m(x) = 0$ ammette un numero finito di soluzioni $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{C}$ per il teorema fondamentale dell'algebra. Per ogni fissato $x_o \in \mathbb{C} \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$, consideriamo l'equazione

$$f_0(x_o) + f_1(x_o)y + \cdots + f_m(x_o)y^m = 0$$

Osserviamo che $f_m(x_o) \neq 0$, cioè tale equazione ha grado m e quindi ammette m soluzioni complesse y_1, \dots, y_m .

Di conseguenza, per ogni $x_o \in \mathbb{C} \setminus \{x_1, \dots, x_r\}$ e $j = 1, \dots, m$, risulta

$$f_0(x_o) + f_1(x_o)y_j + \cdots + f_m(x_o)y_j^m = 0$$

da cui

$$f(x_o, y_j) = 0 \quad \text{per ogni } x_o \in \mathbb{C} \setminus \{x_1, \dots, x_r\} \text{ e } j = 1, \dots, m.$$

Pertanto, $P(x_o, y_j) \in \mathcal{C}^n$, dunque \mathcal{C}^n possiede infiniti punti (essendo x_o arbitrario). \square

Se consideriamo ora \mathcal{C}^n in coordinate omogenee $F(x_1, x_2, x_3) = 0$, possiamo avere i seguenti casi:

- Se $\mathcal{C}^n = r_\infty^n$, allora \mathcal{C}^n ha infiniti punti;
- Se $\mathcal{C}^n \neq r_\infty^n$, allora \mathcal{C} in coordinate non omogenee ha equazione $f(x, y) = 0$, con f polinomio di grado $n \geq 1$, e si può quindi procedere come nella precedente Proposizione.

6.2.1 Coefficienti essenziali dell'equazione di una \mathcal{C}^n

Osservazione 6.2.10 *L'equazione di una \mathcal{C}^1 (retta) ha 3 coefficienti, di cui 2 essenziali; l'equazione di una \mathcal{C}^2 (conica) ha 6 coefficienti, di cui 5 essenziali.*

Sia $\mathcal{C}^n : F(x_1, x_2, x_3) = 0$. Ordiniamo il polinomio $F(x_1, x_2, x_3)$ secondo le potenze decrescenti di x_3 :

$$\mathcal{C}^n : a_{00}x_3^n + \varphi_1(x_1, x_2)x_3^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1}(x_1, x_2)x_3 + \varphi_n(x_1, x_2) = 0,$$

dove, per ogni $k = 1, \dots, n$, $\varphi_k(x_1, x_2)$ è un polinomio omogeneo di grado k nelle variabili x_1, x_2 , ovvero

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1, x_2) &= a_{10}x_1 + a_{01}x_2 \\ \varphi_2(x_1, x_2) &= a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 \\ &\vdots\end{aligned}$$

Allora, il numero totale di coefficienti di $F(x_1, x_2, x_3)$ è

$$1 + \frac{2}{\varphi_1} + \frac{3}{\varphi_2} + \cdots + \frac{n}{\varphi_{n-1}} + \frac{n+1}{\varphi_n} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Essendo almeno un coefficiente diverso da 0, possiamo dividere per esso, e concludiamo che il numero dei coefficienti essenziali è

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$$

Vale infatti il seguente risultato, di cui riportiamo solo l'enunciato.

Proposizione 6.2.11 *Per $\frac{n(n+3)}{2}$ punti indipendenti (ossia, tali da individuare condizioni lineari tra loro indipendenti) passa una e una sola \mathcal{C}^n .*

6.3 Significato geometrico dell'ordine di una \mathcal{C}^n

Proposizione 6.3.1 *Sia \mathcal{C}^n una curva algebrica di ordine n . Se r è una retta di \mathbb{P}^2 , allora si possono avere i seguenti casi:*

- (1) $r \cap \mathcal{C}^n = n$ punti (punti propri o impropri, reali o complessi, da contare con la loro molteplicità), oppure
- (2) $r \subset \mathcal{C}^n$. In tal caso \mathcal{C}^n è riducibile.

DIM. Poiché l'ordine n è un invariante proiettivo, consideriamo un sistema di coordinate omogenee per cui $r : x_i = 0$ per un certo indice $i = 1, 2, 3$.

Infatti, se $r : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ con $a \neq 0$, applichiamo la trasformazione proiettiva

$$\begin{cases} x'_1 = ax_1 + bx_2 + cx_3 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \end{cases}, \quad \text{con } (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(a_{ij}) = a \neq 0,$$

e rispetto alle coordinate (x'_i) , r ha equazione $x'_1 = 0$. Se $b \neq 0$ o $c \neq 0$ si procede analogamente.

Assumiamo per semplicità che $r : x_3 = 0$. Dobbiamo studiare $r \cap \mathcal{C}^n$, ovvero:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} F(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a_{00}x_3^n + \varphi_1(x_1, x_2)x_3^{n-1} + \varphi_2(x_1, x_2)x_3^{n-2} + \cdots + \varphi_n(x_1, x_2) = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \varphi_n(x_1, x_2) = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \\ \iff & (*) : \begin{cases} x_3 = 0 \\ a_{n,0}x_1^n + a_{n-1,1}x_1^{n-1}x_2 + \cdots + a_{n-k,k}x_1^{n-k}x_2^k + \cdots + a_{0,n}x_2^n = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Distinguiamo quindi due casi:

- (I) $a_{n,0} \neq 0$. Le soluzioni (diverse dalla terna nulla) del sistema (*) sono tante quante le soluzioni $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ di $\varphi_n(x_1, x_2) = 0$. Senza perdere di generalità, supponiamo ora $x_2 \neq 0$ e poniamo $t = \frac{x_1}{x_2}$. La seconda equazione di (*) diventa:

$$a_{n,0} t^n + a_{n-1,1} t^{n-1} + \cdots + a_{1,n-1} t + a_{0,n} = 0,$$

che è un'equazione di grado n in t . Per il teorema fondamentale dell'algebra, l'equazione ammette n soluzioni t_1, \dots, t_n . In corrispondenza a queste soluzioni si ottengono gli n punti $P_1(t_1, 1, 0), \dots, P_n(t_n, 1, 0)$, di intersezione tra r e \mathcal{C}^n .

(II) $a_{n,0} = 0$. Consideriamo nuovamente due casi:

(a) $a_{n,0} = a_{n-1,1} = \cdots = a_{n-(k-1),k-1} = 0$, $a_{n-k,k} \neq 0$. Allora, il sistema (*) diventa

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_3 = 0 \\ a_{n-k,k} x_1^{n-k} x_2^k + \cdots + a_{0,n} x_2^n = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2^k (a_{n-k,k} x_1^{n-k} + \cdots + a_{0,n} x_2^{n-k}) = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2^k = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x_3 = 0 \\ a_{n-k,k} x_1^{n-k} + \cdots + a_{0,n} x_2^{n-k} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dal primo sistema abbiamo k soluzioni in $X_\infty(1, 0, 0)$. Per il secondo sistema si può procedere come nel primo caso, ottenendo $(n - k)$ soluzioni diverse dalla terna nulla. Pertanto, il sistema (*) ammette in totale n soluzioni diverse dalla terna nulla.

(b) Tutti i coefficienti di $\varphi_n(x_1, x_2)$ sono nulli. Ma allora la seconda equazione del sistema (*) è un'identità, e quindi $r \subset \mathcal{C}^n$.

Corollario 6.3.2 *Se una retta r e una curva algebrica \mathcal{C}^n hanno più di n punti in comune, allora $r \subset \mathcal{C}^n$ e quindi \mathcal{C}^n è riducibile.*

Osserviamo che la Proposizione 6.3.1 è un caso particolare del seguente risultato generale, di cui riportiamo solo l'enunciato (cfr. Teorema 33.2 in E. Sernesi, *Geometria I*, Boringhieri, 1989).

Teorema 6.3.3 (di Bézout) *Siano \mathcal{C}^n e \mathcal{C}^m due curve algebriche. Allora, si possono avere i seguenti casi:*

- (1) *Le due curve si intersecano sempre in $n \cdot m$ punti (propri o impropri, reali o complessi, da contare con la loro molteplicità); oppure*
- (2) *Le due curve hanno una componente in comune. In tal caso almeno una delle due curve (quella di ordine più grande) è riducibile.*

6.4 Punti semplici e punti multipli di una \mathcal{C}^n

Siano \mathcal{C} una curva arbitraria e $P_o, P \in \mathcal{C}$, con $P \neq P_o$.

Definizione 6.4.1 *La retta tangente in P_o alla curva \mathcal{C} è la posizione limite (se esiste) per $P \rightarrow P_o$ della corda $[P_o, P]$.*

Sia la curva \mathcal{C} descritta da equazioni parametriche

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

con $t \in I$ intorno di t_o e $P_o(x(t_o), y(t_o))$. Supponiamo che $(x(t), y(t))$ siano derivabili e che $(x'(t_o), y'(t_o)) \neq (0, 0)$. La corda $[P_o, P]$ ha equazione

$$\frac{x - x_o}{x(t) - x_o} = \frac{y - y_o}{y(t) - y_o}$$

Dividiamo per $\Delta t = t - t_o \neq 0$, ottenendo

$$\frac{\frac{x-x_o}{x(t)-x_o}}{\Delta t} = \frac{\frac{y-y_o}{y(t)-y_o}}{\Delta t}$$

Allora, passando al limite, otteniamo

$$P(t) \rightarrow P_o \implies \frac{x - x_o}{x'(t_o)} = \frac{y - y_o}{y'(t_o)},$$

che rappresenta l'equazione della retta tangente in P_o alla curva piana \mathcal{C} .

Definizione 6.4.2 *Siano $\mathcal{C}^n : f(x, y) = 0$ una curva algebrica piana di ordine n e $P_o(x_o, y_o) \in \mathcal{C}^n$. P_o si dice **punto semplice** per \mathcal{C}^n se $(f_x^o, f_y^o) \neq (0, 0)$, dove*

$$f_x^o = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) \quad e \quad f_y^o = \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o).$$

P_o si dice invece **punto multiplo** (o **singolare**) se non è semplice.

Una curva si dice **liscia** se tutti i suoi punti sono semplici.

Consideriamo $\mathcal{C}^n : f(x, y) = 0$ e sia $P_o(x_o, y_o) \in \mathcal{C}^n$ un punto semplice. Senza perdere di generalità, supponiamo che $f_y^o \neq 0$. Allora esistono $J(x_o), J(y_o)$ intervalli aperti contenenti x_o e y_o rispettivamente, tali che esista un'unica funzione differenziabile

$$\varphi : J(x_o) \rightarrow J(y_o) \quad x \mapsto y = \varphi(x)$$

con

$$y_o = \varphi(x_o) \quad e \quad f(x, \varphi(x)) = 0 \quad \text{per ogni } x \in J(x_o).$$

Inoltre, $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$ per ogni $x \in J(x_o)$. Quindi in un intorno di P_o , la \mathcal{C}^n si può esprimere con equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = t \\ y = \varphi(t) \end{cases} \quad \text{con } t \in J(x_o).$$

Per $t = t_o = x_o$ risulta

$$x'(t_o) = 1 \neq 0 \quad \text{e} \quad y'(t_o) = \varphi'(x_o) = -\frac{f_x^o(x_o, y_o)}{f_y^o(x_o, y_o)}.$$

Ciò garantisce l'esistenza della retta tangente in P_o a \mathcal{C}^n , che ha equazione

$$\frac{x - x_o}{x'(t_o)} = \frac{y - y_o}{y'(t_o)}.$$

Sostituendo $x'(t_o) = 1$ e $y'(t_o) = -\frac{f_x^o(x_o, y_o)}{f_y^o(x_o, y_o)}$, si ottiene

$$f_x^o(x - x_o) + f_y^o(y - y_o) = 0$$

ovvero l'equazione della retta tangente in P_o (punto semplice) alla curva \mathcal{C}^n .

Proposizione 6.4.3 *Sia $\mathcal{C}^n : f(x, y) = 0$ e $P_o(x_o, y_o) \in \mathcal{C}^n$. Allora P_o è punto semplice se e solo se ogni retta per P_o , eccetto una, ha una sola intersezione con $\mathcal{C}^n \in P_o$. La retta che fa eccezione è la retta tangente t_{P_o} , che ha almeno due intersezioni con \mathcal{C}^n che ricadono in P_o , cioè*

$$I(\mathcal{C}^n, t_{P_o}, P_o) \geq 2.$$

DIM. Se r è una retta passante per P_o , $I(\mathcal{C}^n, r, P_o)$ denota il numero intersezioni di \mathcal{C}^n con r in P_o . Sia r una retta per P_o , descritta da equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_o + lt \\ y = y_o + mt \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$. Per trovare $I(\mathcal{C}^n, r, P_o)$ studiamo il sistema

$$\begin{cases} x = x_o + lt \\ y = y_o + mt \\ f(x, y) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Sviluppamo con la formula di Taylor (di punto iniziale P_o) il nostro polinomio $f(x, y)$. Allora

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f(x_o, y_o) \\
 &+ [f_x^o(x - x_o) + f_y^o(y - y_o)] \\
 &+ \frac{1}{2!}[f_{xx}^o(x - x_o)^2 + 2f_{xy}^o(x - x_o)(y - y_o) + f_{yy}^o(y - y_o)^2] \\
 &+ \frac{1}{3!}[f_{xxx}^o(x - x_o)^3 + \dots] \\
 &+ \dots \\
 &+ \frac{1}{n!}[\dots].
 \end{aligned}$$

Il sistema (*) diventa

$$\begin{cases}
 x - x_o = lt, \\
 y - y_o = mt, \\
 [f_x^o l + f_y^o m]t + \frac{1}{2!}[f_{xx}^o l^2 + 2f_{xy}^o lm + f_{yy}^o m^2]t^2 + \frac{1}{3!}[\dots]t^3 \\
 + \dots + \frac{1}{n!}[\dots]t^n = 0.
 \end{cases} \quad (6.4.5)$$

Le intersezioni in P_o si ottengono in corrispondenza della soluzione $t = 0$. Per ipotesi P_o è semplice, ovvero $(f_x^o, f_y^o) \neq (0, 0)$. Ciò equivale a dire che nell'ultima equazione di (6.4.5), il coefficiente di t è non nullo, eccetto nel caso in cui $(f_x^o, f_y^o) \sim (-m, l)$.

Quindi tale equazione ammette la soluzione $t = 0$ con molteplicità 1, eccetto in un caso, dove la molteplicità è almeno 2. Concludendo, per ogni retta r passante per P_o risulta $I(\mathcal{C}^n, r, P_o) = 1$, eccetto in un caso. La retta che fa eccezione è quella che si ottiene per $l = f_y^o$ e $m = -f_x^o$, ovvero

$$r : \begin{cases}
 x - x_o = f_y^o t \\
 y - y_o = -f_x^o t.
 \end{cases}$$

Eliminando t si ha

$$\boxed{r : f_x^o(x - x_o) + f_y^o(y - y_o) = 0} \quad (6.4.6)$$

che rappresenta la retta tangente in P_o a \mathcal{C}^n .

Definizione 6.4.4 Consideriamo $\mathcal{C}^n : f(x, y) = 0$ e $P_o \in \mathcal{C}^n$. P_o si dice **punto doppio** per \mathcal{C}^n se $(f_x^o, f_y^o) = (0, 0)$ e $(f_{xx}^o, f_{xy}^o, f_{yy}^o) \neq (0, 0, 0)$.

Proposizione 6.4.5 Sia $\mathcal{C}^n : f(x, y) = 0$ e sia $P_o \in \mathcal{C}^n$. P_o è punto doppio se e solo se per ogni retta r per P_o , eccetto due, risulta $I(\mathcal{C}^n, r, P_o) = 2$. Le due rette che fanno eccezione hanno almeno 3 intersezioni in P_o con \mathcal{C}^n . Tali rette si dicono **tangenti principali** in P_o a \mathcal{C}^n .

DIM. Consideriamo $\mathcal{C}^n : f(x, y) = 0$ e sia $P_o(x_o, y_o) \in \mathcal{C}^n$. Sia r la generica retta passante per P_o :

$$r : \begin{cases} x = x_o + lt \\ y = y_o + mt. \end{cases}$$

Procedendo in modo analogo con la dimostrazione della Proposizione precedente, per determinare $I(\mathcal{C}^n, r, P_o)$ consideriamo la molteplicità della soluzione $t = 0$ nell'ultima equazione di (6.4.5). Per ipotesi P_o è un punto doppio, ovvero $(f_x^o, f_y^o) = (0, 0)$ e $(f_{xx}^o, f_{xy}^o, f_{yy}^o) \neq (0, 0, 0)$. Ciò vuol dire che nell'equazione (5) il coefficiente di t è nullo, mentre il coefficiente di t^2 è non nullo (e quindi $I(\mathcal{C}^n, \text{tg}, P_o) = 2$), eccetto nei casi in cui la retta r ha parametri direttori l, m che verificano

$$f_{xx}^o l^2 + 2f_{xy}^o lm + f_{yy}^o m^2 = 0 \quad (6.4.7)$$

Le rette i cui parametri direttori verificano (6.4.7) sono le tangenti principali in P_o a \mathcal{C}^n , per le quali vale $I(\mathcal{C}^n, r, P_o) \geq 3$.

Eliminando (l, m) tra le equazioni parametriche di r e l'equazione (6.4.7), quest'ultima diventa

$$\boxed{f_{xx}^o (x - x_o)^2 + 2f_{xy}^o (x - x_o)(y - y_o) + f_{yy}^o (y - y_o)^2 = 0.} \quad (6.4.8)$$

La (6.4.8) è l'equazione complessiva di due rette per P_o , che hanno almeno 3 intersezioni con \mathcal{C}^n in P_o . Tali rette si dicono tangenti principali a \mathcal{C}^n nel punto doppio P_o . \square

Osservazione 6.4.6 La (6.4.8) rappresenta una conica degenera. Ad esempio, prendendo $P_o = O$, la (6.4.8) diventa

$$f_{xx}^o x^2 + 2f_{xy}^o xy + f_{yy}^o y^2 = 0$$

La matrice associata a tale conica è

$$A = \begin{pmatrix} f_{xx}^o & f_{xy}^o & 0 \\ f_{xy}^o & f_{yy}^o & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed ha rango strettamente minore di 3.

Definizione 6.4.7 Il punto doppio P_o si dice:

- **nodo** se le tangenti principali sono distinte;
- **cuspid** se le tangenti principali sono coincidenti;

Se \mathcal{C}^n è una curva reale e P_o è un punto reale, allora l'equazione (6.4.8) è reale e in tal caso le tangenti principale possono essere:

- reali e distinte. In tal caso P_o si dice **nodo reale**;
- complesse coniugate. In tal caso P_o si dice **punto doppio isolato**;
- reali e coincidenti. In tal caso P_o si dice **cuspidi (reale)**.

Osservazione 6.4.8 Si noti che il discriminante dell'equazione (6.4.8), è dato da

$$\Delta/4 = -\mathcal{H}(x_o, y_o) = - \begin{vmatrix} f_{xx}^o & f_{xy}^o \\ f_{yx}^o & f_{yy}^o \end{vmatrix},$$

il cui segno (> 0 , < 0 , $= 0$) porta a classificare i punti doppi in nodi, punti doppi isolati e cuspidi.

Definizione 6.4.9 Siano $\mathcal{C}^n : f(x, y) = 0$ e $P_o \in \mathcal{C}^n$. P_o si dice **punto r-uplo** di \mathcal{C}^n se tutte le derivate parziali di f fino all'ordine $(r-1)$ sono nulle in (x_o, y_o) , ed almeno una derivata parziale di ordine r calcolata in (x_o, y_o) è diversa da 0.

Proposizione 6.4.10 Un punto $P_o \in \mathcal{C}^n$ si dice **r-uplo** se e solo se ogni retta per P_o , eccetto r rette, ha r intersezioni con la curva \mathcal{C}^n in P_o . Le rette che fanno eccezione hanno più di r intersezioni, e sono dette **tangenti principali** in P_o a \mathcal{C}^n . L'equazione complessiva delle r tangenti principali è:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{(r)} f}{\partial x^r}(x_o, y_o)(x - x_o)^r + r \frac{\partial^{(r)} f}{\partial x^{(r-1)} \partial y}(x_o, y_o)(x - x_o)^{r-1}(y - y_o) + \\ & \dots \\ & + r \frac{\partial^{(r)} f}{\partial x \partial y^{r-1}}(x_o, y_o)(x - x_o)(y - y_o)^{r-1} + \frac{\partial^{(r)} f}{\partial y^r}(x_o, y_o)(y - y_o)^r = 0. \end{aligned}$$

6.4.1 Uso di coordinate omogenee

Consideriamo $\mathcal{C}^n : f(x, y) = 0$ e $P_o \in \mathcal{C}^n$. In coordinate omogenee:

$$\mathcal{C}^n : F(x_1, x_2, x_3) = x_3^n f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right) = 0.$$

Consideriamo

$$F_1 := \frac{\partial F}{\partial x_1} = x_3^n f_x \frac{1}{x_3} = x_3^{n-1} f_x,$$

$$F_2 := \frac{\partial F}{\partial x_2} = x_3^n f_y \frac{1}{x_3} = x_3^{n-1} f_y,$$

$$F_3 := \frac{\partial F}{\partial x_3} = n x_3^{n-1} f - x_3^n \left(f_x \frac{x_1}{x_3^2} + f_y \frac{x_2}{x_3^2} \right) = n x_3^{n-1} f - x_3^{n-2} (x_1 f_x + x_2 f_y). \tag{6.4.9}$$

Poniamo $F_i^o = F_i(x_1^o, x_2^o, x_3^o)$ per ogni $i = 1, 2, 3$, dove $P_o(x_1^o, x_2^o, x_3^o)$. Allora

$$\begin{aligned} F_1^o &= (x_3^o)^{n-1} f_x^o, \\ F_2^o &= (x_3^o)^{n-1} f_y^o, \\ F_3^o &= -(x_3^o)^{n-2} (x_1^o f_x^o + x_2^o f_y^o) = -(x_3^o)^{n-2} \left(x_1^o \frac{F_1^o}{(x_3^o)^{n-1}} + x_2^o \frac{F_2^o}{(x_3^o)^{n-1}} \right) \\ &\implies F_3^o = -\frac{(x_1^o F_1^o + x_2^o F_2^o)}{x_3^o}. \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

Quindi, per un punto P_o proprio:

$$\begin{aligned} P_o \text{ (proprio) semplice} &\iff (f_x^o, f_y^o) \neq (0, 0) \iff (F_1^o, F_2^o, F_3^o) \neq (0, 0, 0) \\ P_o \text{ singolare} &\iff (f_x^o, f_y^o) = (0, 0) \iff (F_1^o, F_2^o, F_3^o) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

Ora supponiamo P_o semplice. L'equazione della tangente in P_o in coordinate omogenee diventa (utilizzando (6.4.10)):

$$\begin{aligned} \frac{F_1^o}{(x_3^o)^{n-1}} \left(\frac{x_1}{x_3} - \frac{x_1^o}{x_3^o} \right) + \frac{F_2^o}{(x_3^o)^{n-1}} \left(\frac{x_2}{x_3} - \frac{x_2^o}{x_3^o} \right) &= 0 \\ F_1^o \frac{x_1}{x_3} + F_2^o \frac{x_2}{x_3} - \frac{F_1^o x_1^o + F_2^o x_2^o}{x_3^o} &= 0 \end{aligned}$$

Applicando (9) e moltiplicando per x_3 si ottiene

$$\boxed{F_1^o x_1 + F_2^o x_2 + F_3^o x_3 = 0} \quad (6.4.11)$$

che è l'equazione della retta tangente in P_o (punto semplice) in coordinate omogenee.

Infine, poniamo

$$F_{ij} := \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}, \quad F_{ij}^o = F_{ij}(x_1^o, x_2^o, x_3^o) \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Allora, risulta:

$$P_o \text{ è punto doppio} \iff F_1^o = F_2^o = F_3^o = 0 \text{ e } F_{ij}^o \text{ non tutte nulle.}$$

Quindi l'equazione complessiva delle tangenti principali in P_o (punto doppio) in coordinate omogenee diventa

$$\boxed{F_{11}^o x_1^2 + F_{22}^o x_2^2 + F_{33}^o x_3^2 + 2F_{12}^o x_1 x_2 + 2F_{13}^o x_1 x_3 + 2F_{23}^o x_2 x_3 = 0.} \quad (6.4.12)$$

Punti impropri

Sia P_o punto improprio della curva \mathcal{C}^n di equazione $F(x_1, x_2, x_3) = 0$. Seguendo l'argomento precedente, si ottiene:

$$P_o \text{ semplice} \stackrel{\text{def}}{\iff} (F_1^o, F_2^o, F_3^o) \neq (0, 0, 0),$$

$$P_o \text{ singolare} \stackrel{\text{def}}{\iff} (F_1^o, F_2^o, F_3^o) = (0, 0, 0),$$

$$P_o \text{ doppio} \stackrel{\text{def}}{\iff} F_i^o = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{e} \quad F_{ij}^o \neq 0 \text{ per qualche } i, j$$

Esempio 6.4.11 Consideriamo $\mathcal{C}^3 : x(y-1)^2 + y = 0$, e determiniamo la natura dei suoi punti O , $A(-2, 2)$ e X_∞ , e le tangenti in tali punti.

Per i punti propri, posto $f(x, y) = x(y-1)^2 + y$, basta considerare

$$f_x = (y-1)^2, \quad f_y = 2x(y-1) + 1.$$

Allora, $f_x(O) = 1$, $f_y(O) = 1$, per cui concludiamo che O è un punto semplice, e applicando (6.4.6) otteniamo la tangente in O , $t_O : 1(x-0) + 1(y-0) = 0$, ossia, $t_O : x + y = 0$ (vedremo nella sezione 6.5 come si poteva ottenere più facilmente tale conclusione).

Analogamente, $f_x(A) = 1$, $f_y(A) = -3$, e quindi A è un punto semplice, e, per la (6.4.6), $t_A : x - 3y + 8 = 0$.

Per il punto improprio $X_\infty(1, 0, 0)$, in coordinate omogenee abbiamo

$$\mathcal{C}^3 : F(x_1, x_2, x_3) = x_1(x_2 - x_3)^2 + x_2x_3^2 = 0.$$

Allora, calcolando $F_i = \partial F / \partial x_i$ per $i = 1, 2, 3$, troviamo $F_i(X_\infty) = 0$ per ogni i , sicché X_∞ non è un punto semplice. Calcolando $F_{ij} = \partial^2 F / \partial x_i \partial x_j$ per ogni i, j , stabiliamo che X_∞ è un punto doppio (per esempio, $F_{22}(X_\infty) = 2 \neq 0$), e applicando l'equazione (6.4.12) determiniamo l'equazione complessiva delle tangenti principali in X_∞ :

$$2x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_2x_3 = 0 \quad \text{ossia,} \quad (y-1)^2 = 0$$

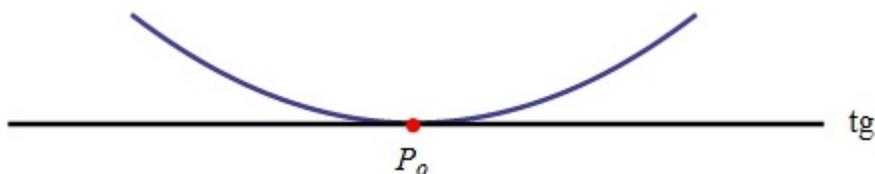
(anche tale risultato si otterrà in modo più semplice nella sezione 6.5).

6.4.2 Classificazione dei punti semplici

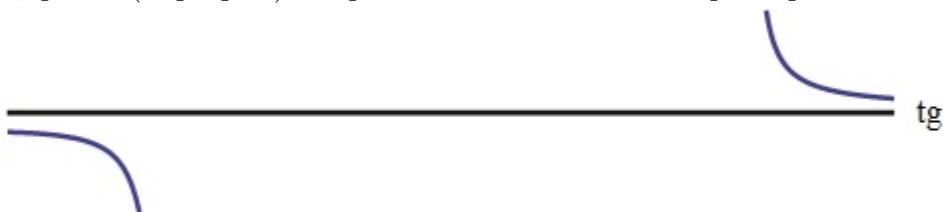
Siano \mathcal{C}^n una curva e $P_o \in \mathcal{C}^n$ punto semplice (proprio o improprio). Sia t_{P_o} la tangente in P_o a \mathcal{C}^n . Essendo P_o semplice, risulta $I(\mathcal{C}^n, t_{P_o}, P_o) \geq 2$.

Definizione 6.4.12 P_o si dice **punto semplice ordinario** se $I(\mathcal{C}^n, t_{P_o}, P_o) = 2$. Se invece $I(\mathcal{C}^n, t_{P_o}, P_o) = k + 2$, con $k \geq 1$, allora P_o si dice **punto di flesso di specie k** . In particolare, P_o si dice **flesso ordinario** se $k = 1$ (ovvero $I(\mathcal{C}^n, t_{P_o}, P_o) = 3$).

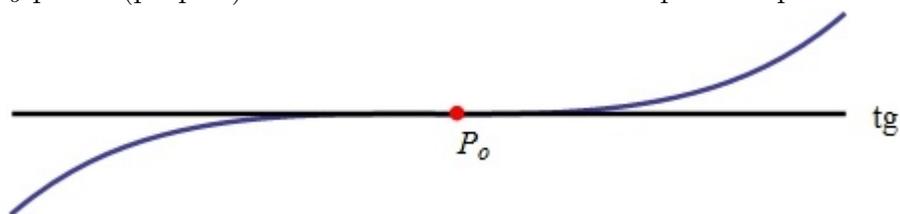
(1) P_o punto (proprio) semplice ordinario o flesso di specie pari:



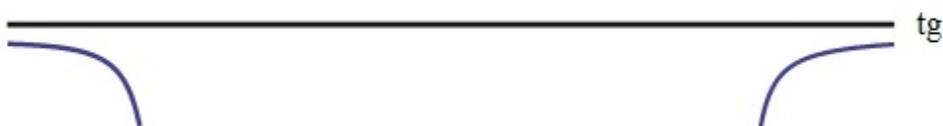
(2) P_o punto (improprio) semplice ordinario o flesso di specie pari:



(3) P_o punto (proprio) di flesso ordinario o flesso di specie dispari:



(4) P_o punto (improprio) di flesso ordinario o di specie dispari:



Sia P_o un punto semplice (proprio) di $C^n : f(x, y) = 0$. Allora,

P_o punto di flesso \iff il coeff. di t^2 dell'ultima equazione di (6.4.5) è nullo.

Ponendo uguale a zero tale coefficiente e sostituendo (l, m) con $(f_y^o, -f_x^o)$, si ottiene

$$f_{xx}^o (f_y^o)^2 - 2f_{xy}^o f_x^o f_y^o + f_{yy}^o (f_x^o)^2 = 0. \quad (6.4.13)$$

Pertanto:

$$P_o \text{ punto di flesso} \iff \begin{vmatrix} f_{xx}^o & f_{xy}^o & f_x^o \\ f_{yx}^o & f_{yy}^o & f_y^o \\ f_x^o & f_y^o & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Sia ora P_o un punto semplice (proprio o improprio) di $\mathcal{C}^n : F(x_1, x_2, x_3) = 0$. Poniamo

$$\mathcal{H}(x_1, x_2, x_3) := \det(F_{ij}) = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}$$

Allora, $\mathcal{H}(x_1, x_2, x_3)$ è un polinomio omogeneo di grado $3(n-2)$, detto **Hessiano** di $F(x_1, x_2, x_3)$ (si ottiene dalla matrice precedente passando in coordinate omogenee).

La curva algebrica $\mathcal{H} : \mathcal{H}(x_1, x_2, x_3) = 0$ si chiama **curva Hessiana** associata alla \mathcal{C}^n .

Sia $P_o \in \mathcal{C}^n$ un punto semplice. Allora, risulta

$$P_o \text{ è flesso} \iff P_o \in \mathcal{H} \text{ (curva Hessiana di } \mathcal{C}^n \text{)}.$$

Di conseguenza (come applicazione del teorema di Bézout), si ha subito la seguente

Proposizione 6.4.13 *Il massimo numero di flessi di una \mathcal{C}^n (irriducibile) è $3n(n-2)$.*

Per trovare i flessi di una \mathcal{C}^n , si deve risolvere il sistema

$$\mathcal{C}^n \cap \mathcal{H} : \begin{cases} F(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ \mathcal{H}(x_1, x_2, x_3) = 0 \end{cases}$$

e scartare eventuali punti singolari dalle $3n(n-2)$ soluzioni.

Osservazione 6.4.14 *Siano \mathcal{C}^n una curva irriducibile e $P_o \in \mathcal{C}^n$ un punto semplice. Allora:*

$$2 \leq I(\mathcal{C}^n, t_{P_o}, P_o) \leq n.$$

In particolare:

- *Una conica irriducibile non ha punti di flesso.*
- *Una cubica irriducibile può avere soltanto flessi ordinari, e se la curva è liscia i flessi sono esattamente 9.*

Osservazione 6.4.15 *Condizione sufficiente per l'irriducibilità di una \mathcal{C}^n è che la curva abbia un punto semplice P_o con $I(\mathcal{C}^n, t_{P_o}, P_o) = n$. In particolare, una \mathcal{C}^3 con un flesso (ordinario) è irriducibile.*

Osservazione 6.4.16 *Le nozioni di punto semplice, di flesso di specie k , di punto r -uplo sono invarianti **proiettivi**.*

6.4.3 Punti multipli

Iniziamo con la seguente

Proposizione 6.4.17 *Una \mathcal{C}^n irriducibile può avere punti multipli di ordine r , con $2 \leq r \leq n - 1$.*

DIM. Supponiamo per assurdo che esista $P_o \in \mathcal{C}^n$, punto (almeno) n -uplo per \mathcal{C}^n . Fissato un altro $P_1 \in \mathcal{C}^n$ diverso da P_o , la retta $[P_o, P_1]$ avrebbe almeno $n + 1$ intersezioni con \mathcal{C}^n . Ma ciò equivale a dire che \mathcal{C}^n è riducibile (applicando la Proposizione 6.3.1 o il teorema di Bézout), il che è assurdo. \square

Osservazione 6.4.18

- Una \mathcal{C}^2 irriducibile non può avere punti doppi.
- Una \mathcal{C}^3 irriducibile può avere al più punti doppi.
- Una \mathcal{C}^4 irriducibile può avere al più punti tripli.

Proposizione 6.4.19 *Una \mathcal{C}^n irriducibile con un punto $(n - 1)$ -uplo non possiede altri punti multipli.*

DIM. Sia $P_o \in \mathcal{C}^n$ punto $(n - 1)$ -uplo di \mathcal{C}^n irriducibile. Supponiamo per assurdo che esista un altro punto multiplo (almeno doppio) $P_1 \in \mathcal{C}^n$. Allora, la retta $[P_o, P_1]$ avrebbe almeno $(n - 1) + 2 = n + 1$ intersezioni con \mathcal{C}^n . Ciò equivale a dire che $r \subset \mathcal{C}^n$, contrariamente all'ipotesi che \mathcal{C}^n è irriducibile. \square

Osservazione 6.4.20

- Una \mathcal{C}^3 irriducibile ha al più un punto doppio.
- Una \mathcal{C}^4 irriducibile con un punto triplo non ammette altri punti singolari.

Proposizione 6.4.21 *Una \mathcal{C}^n irriducibile ha al più $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppi.*

DIM. Per $n = 2$ e per $n = 3$ la proposizione segue dall'Osservazione precedente. Supponiamo allora che $n > 3$, e supponiamo per assurdo che esista \mathcal{C}^n irriducibile con $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ punti doppi. Scegliamo su \mathcal{C}^n altri $(n - 3)$ punti semplici. Allora, gli $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ punti doppi e gli $(n - 3)$ punti semplici sono in totale $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ punti.

Per tali punti passa (almeno) una \mathcal{C}^{n-2} (per la Proposizione 6.2.11).

Gli $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ punti sono comuni alla \mathcal{C}^n e alla \mathcal{C}^{n-2} . Nei punti doppi sono assorbite $2 \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 \right)$ intersezioni, mentre nei punti semplici sono assorbite $(n - 3)$ intersezioni. Complessivamente, le intersezioni tra \mathcal{C}^n e \mathcal{C}^{n-2} sono (almeno)

$$(n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1 = n(n - 2) + 1 > n(n - 2).$$

Dal Teorema di Bézout, si conclude che \mathcal{C}^n è riducibile, il che è contrario all'ipotesi. \square

Osservazione 6.4.22

- Una \mathcal{C}^3 irriducibile ha al più un punto doppio.
- Una \mathcal{C}^4 irriducibile ha al più 3 punti doppi.

6.5 Studio di una \mathcal{C}^n in O, X_∞, Y_∞

Fissato un sistema di riferimento cartesiano $RC(O, x, y)$ nel piano euclideo, i punti O, X_∞, Y_∞ (l'origine e le direzioni degli assi coordinati) vengono chiamati **vertici del triangolo fondamentale**. Vediamo ora come si può studiare in modo particolarmente semplice la natura di questi punti in una curva algebrica.

Consideriamo $\mathcal{C}^n : F(x_1, x_2, x_3) = 0$. Ordiniamo i termini di F secondo le potenze decrescenti di x_3 :

$$\mathcal{C}^n : a_{00}x_3^n + \varphi_1(x_1, x_2)x_3^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1}(x_1, x_2)x_3 + \varphi_n(x_1, x_2) = 0,$$

dove, per ogni indice i , $\varphi_i(x_1, x_2)$ è un polinomio omogeneo di grado i nelle variabili x_1, x_2 . In coordinate non omogenee:

$$\mathcal{C}^n : a_{00} + \underbrace{(a_{10}x + a_{01}y)}_{\varphi_1(x,y)} + \underbrace{(a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2)}_{\varphi_2(x,y)} + \underbrace{(a_{30}x^3 + \dots)}_{\varphi_3(x,y)} + \dots + \underbrace{(\dots)}_{\varphi_n(x,y)} = 0.$$

Allora, si ha:

$$(1) \quad O(0, 0, 1) \in \mathcal{C}^n \iff a_{00} = 0 \iff \left(\begin{array}{c} \text{manca il termine noto} \\ \text{nell'equazione in} \\ \text{coordinate non omogenee} \end{array} \right).$$

$$(2) \quad O \text{ è un punto semplice} \iff (f_x^o, f_y^o) \neq (0, 0).$$

Inoltre, $t_O : f_x^o x + f_y^o y = 0$. Ma

$$f_x^o = a_{10}, \quad f_y^o = a_{01}$$

e quindi,

$$t_O : a_{10}x + a_{01}y = \varphi_1(x, y) = 0.$$

Quindi, O è semplice se non è presente il termine noto ed è presente almeno uno dei due termini di primo grado.

La tangente alla curva nell'origine si ottiene uguagliando a 0 il complesso dei termini di primo grado $\varphi_1(x, y)$.

(3) O è doppio $\iff f_x^o = f_y^o = 0$ e $(f_{xx}^o, f_{xy}^o, f_{yy}^o) \neq (0, 0, 0)$.

Inoltre, $t_O : f_{xx}^o x^2 + 2f_{xy}^o xy + f_{yy}^o y^2 = 0$. Ma

$$f_{xx}^o = 2a_{20}, \quad f_{xy}^o = a_{11}, \quad f_{yy}^o = 2a_{02},$$

per cui

$$t_O : a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 = \varphi_2(x, y) = 0.$$

Pertanto, O è un punto doppio se mancano il termine noto e i termini di primo grado, mentre sono presenti quelli di secondo grado.

L'equazione delle tangenti principali si ottiene uguagliando a 0 il complesso dei termini di secondo grado $\varphi_2(x, y)$.

(4) In generale:

$O \in \mathcal{C}^n$ è r -uplo se $a_{00} = \varphi_1(x, y) = \dots = \varphi_{r-1}(x, y) = 0$ e $\varphi_r(x, y) \neq 0$.

L'equazione delle r tangenti principali in O è $\varphi_r(x, y) = 0$.

Si procede in maniera analoga per lo studio di $X_\infty(1, 0, 0)$. Ordiniamo i termini di F secondo le potenze decrescenti di x_1 :

$$\mathcal{C}^n : b_{00}x_1^n + \psi_1(x_2, x_3)x_1^{n-1} + \psi_2(x_2, x_3)x_1^{n-2} + \dots + \psi_{n-1}(x_2, x_3)x_1 + \psi_n(x_2, x_3) = 0.$$

In coordinate non omogenee:

$$\mathcal{C}^n : b_{00}x^n + \psi_1(y, 1)x^{n-1} + \psi_2(y, 1)x^{n-2} + \dots + \psi_{n-1}(y, 1)x + \psi_n(y, 1) = 0.$$

Allora:

(1) $X_\infty(1, 0, 0) \in \mathcal{C}^n \iff b_{00} = 0 \iff \left(\begin{array}{c} \text{manca il termine di grado} \\ \text{massimo in } x \text{ (o in } x_1) \end{array} \right)$.

(2) X_∞ semplice $\iff b_{00} = 0$ e $\psi_1 \neq 0$ (coefficiente di x^{n-1}).

L'equazione della tangente è:

$$t_{X_\infty} : \psi_1(x_2, x_3) = 0 \quad (\text{o } \psi_2(y, 1) = 0).$$

(3) X_∞ doppio $\iff b_{00} = 0, \psi_1 = 0$ e $\psi_2 \neq 0$ (coefficiente di x^{n-2}).

L'equazione delle tangenti principali è:

$$t_{X_\infty} : \psi_2(x_2, x_3) = 0 \quad (\text{o } \psi_2(y, 1) = 0).$$

- (4) X_∞ r -uplo $\iff b_{00} = \psi_1 = \dots = \psi_{r-1} = 0$ e $\psi_r \neq 0$ (coefficiente di x^{n-r})
L'equazione delle tangenti principali è:

$$\psi_r(x_2, x_3) = 0 \quad (\text{o } \psi_r(y, 1) = 0)$$

Lo studio per Y_∞ è del tutto analogo a quello per X_∞ : è sufficiente scambiare il ruolo di x con quello di y .

Esempio 6.5.1 Per la curva $\mathcal{C}^3 : x(y-1)^2 + y = 0$, considerata nell'Esempio 6.4.11, ora possiamo concludere immediatamente che $O \in \mathcal{C}^3$ (manca il termine noto), è un punto semplice (ci sono termini di I grado), e la tangente a \mathcal{C}^3 in O si ottiene annullando il complesso dei termini di I grado: $t_O : x + y = 0$.

Per quanto riguarda $X_\infty \in \mathcal{C}^3$ (manca il termine in x^3), non è semplice (manca il termine in x^2), è doppio (esiste il termine in x), e l'eq. complessiva delle tangenti principali in X_∞ (ottenuta annullando il coefficiente di x) è $t_{X_\infty} : (y-1)^2 = 0$.

Esempio 6.5.2 Consideriamo $\mathcal{C}^4 : x^2y^2 + 2yx^2 - 2xy^3 - x + 5y = 0$. Allora, $O \in \mathcal{C}^4$ (manca il termine noto), ed è un punto semplice (ci sono termini di I grado). La tangente a \mathcal{C}^4 in O ha equazione $t_O : 5y - x = 0$.

Riscrivendo la curva in coordinate omogenee ed ordinando secondo le potenze decrescenti di x_1 :

$$\mathcal{C}^4 : x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_2x_3 - 2x_1x_2^3 - x_1x_3^3 + 5x_2x_3^3 = 0,$$

concludiamo che $X_\infty \in \mathcal{C}^4$ (manca il termine x_1^4), non è semplice (manca il termine x_1^3), è doppio (esiste il termine x_1^2) e l'eq. complessiva delle tangenti principali in X_∞ è $x_2^2 + 2x_2x_3 = 0$, ossia, $y(y+2) = 0$.

Analogamente, analizzando le potenze di y nell'equazione di \mathcal{C}^4 , concludiamo che $Y_\infty \in \mathcal{C}^4$ (manca il termine x_2^4), è semplice (esiste il termine x_2^3), e la tangente in Y_∞ è $2x_1 = 0$, ossia, $x = 0$.

6.6 Parabole osculatrici

Definizione 6.6.1 Una curva algebrica del tipo

$$y = y_o + a_1(x - x_o) + a_2(x - x_o)^2 + \dots + a_h(x - x_o)^h$$

oppure

$$x = x_o + a_1(y - y_o) + a_2(y - y_o)^2 + \dots + a_h(y - y_o)^h$$

si dice **parabola di ordine h di punto iniziale $P_o(x_o, y_o)$** .

Definizione 6.6.2 Siano \mathcal{C}^n una curva algebrica e $P_o(x_o, y_o) \in \mathcal{C}^n$ un punto semplice.

Una parabola di ordine h e di punto iniziale P_o si chiama **parabola osculatrice** di ordine h di \mathcal{C}^n in P_o se essa ha con \mathcal{C}^n (almeno) $(h + 1)$ intersezioni in P_o .

Un **ramo lineare** di origine P_o è una successione di parabole osculatrici $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_h, \dots$ di origine P_o , che si può prolungare senza fine. Tale ramo si indica con $y = y_o + a_1(x - x_o) + \dots + a_h(x - x_o)^h + \dots$.

Proposizione 6.6.3 Ogni punto semplice di una \mathcal{C}^n è origine di un ramo lineare.

DIM. Siano $\mathcal{C}^n : f(x, y) = 0$ e $P_o \in \mathcal{C}^n$ punto semplice. Supponiamo per comodità che $P_o = O$ (esiste sempre una trasformazione proiettiva che porti P_o in O ; per un punto proprio P_o esiste un movimento). Allora,

$$\mathcal{C}^n : (a_{10}x + a_{01}y) + (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + (a_{30}x^3 + \dots) + \dots + (\dots) = 0, \quad (6.6.14)$$

dove $a_{10} = f_x^o$ e $a_{01} = f_y^o$. Inoltre, essendo P_o semplice, si ha $(a_{10}, a_{01}) \neq (0, 0)$. Supponiamo senza perdere di generalità che $a_{01} \neq 0$, e consideriamo una generica parabola \mathcal{P}_1 , di ordine 1 ed origine $P_o = O$. Tale parabola ha equazione della forma $y = \lambda x$. Cerchiamo λ per cui \mathcal{P}_1 risulta essere osculatrice, ovvero per cui risulta $\mathcal{I}(\mathcal{C}^n, \mathcal{P}_1, P_o) \geq 2$. Poiché

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{C}^n : \\ & \begin{cases} y = \lambda x \\ (a_{10} + \lambda a_{01})x + (a_{20} + a_{11}\lambda + a_{02}\lambda^2)x^2 + (\dots)x^3 + \dots + (\dots)x^n = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

\mathcal{P}_1 è osculatrice se almeno 2 intersezioni cadono in $P_o = O$, ovvero se $a_{10} + \lambda a_{01} = 0$, da cui $\lambda = -\frac{a_{10}}{a_{01}}$. Quindi

$$\mathcal{P}_1 \text{ osculatrice ha equazione } y = -\frac{a_{10}}{a_{01}}x,$$

ovvero, è la retta tangente in P_o .

Sia ora \mathcal{P}_2 la generica parabola di ordine 2 originata da \mathcal{P}_1 osculatrice, ossia,

$$\mathcal{P}_2 : y = \lambda_1 x + \mu x^2,$$

dove $\lambda_1 = \frac{-a_{10}}{a_{01}}$, e consideriamo $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{C}^n$, ovvero

$$\begin{cases} y = \lambda_1 x + \mu x^2, \\ \underbrace{a_{10}x + a_{01}(\lambda_1 x + \mu x^2)}_{=0 \text{ per } \lambda_1 = \frac{-a_{10}}{a_{01}}} + [a_{20}x^2 + a_{11}x(\lambda_1 x + \mu x^2) + a_{02}(\lambda_1 x + \mu x^2)^2] + \dots = 0. \end{cases}$$

\mathcal{P}_2 è osculatrice se si hanno almeno 3 intersezioni in P_o , ovvero se il coefficiente $(a_{01}\mu + a_{20} + a_{11}\lambda_1 + \lambda_1^2 a_{02})$ di x^2 è nullo. Quindi, tenendo conto del fatto che $a_{01} \neq 0$,

$$\lambda_2 := \mu = \frac{(-\lambda_1^2 a_{02} - a_{11} \lambda_1) - a_{20}}{a_{01}}$$

determina

$$\mathcal{P}_2 : y = \lambda_1 x + \lambda_2 x^2, \quad \text{parabola osculatrice di ordine 2.}$$

Analogamente si considera $\mathcal{P}_3 : y = \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \mu x^3$, e si determina μ imponendo che sia osculatrice, cioè, $\mathcal{I}(\mathcal{C}^n, \mathcal{P}_3, P_o) \geq 4$.

Così procedendo, si determina una parabola osculatrice di ordine h per ogni h , e quindi un ramo lineare. \square

Proposizione 6.6.4 *Ogni nodo è origine di 2 rami lineari.*

DIM. Sia $P_o \in \mathcal{C}^n$ un nodo (reale o punto doppio isolato), e come prima ci riconduciamo per semplicità al caso $P_o = O$. Allora:

$$O \text{ doppio} \iff \varphi_1(x, y) = 0.$$

Inoltre supponiamo che le tangenti principali in O siano le rette $x = 0$ e $y = 0$ (esiste una trasformazione affine che porti le tangenti (distinte) in O negli assi). Pertanto, $\varphi_2(x, y) = xy$, e l'equazione (6.6.14) diventa:

$$\mathcal{C}^n : xy + \underbrace{(a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}xy^3)}_{\varphi_3(x,y)} + (a_{40}x^4 + \dots) + \dots = 0$$

A partire dalle due tangenti $t_1 : x = 0$ e $t_2 : y = 0$, si costruiscono 2 rami lineari:

$$\begin{aligned} y &= \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 + \dots + \lambda_h x^h + \dots \\ x &= \mu_2 y^2 + \mu_3 y^3 + \dots + \mu_h y^h + \dots \quad \square \end{aligned}$$

Classificazione dei nodi. Un nodo P_o può risultare *un punto di flesso per il ramo lineare*, quando una delle sue tangenti (o entrambe) ha più di 3 intersezioni con la curva che ricadono in P_o stesso. Ciò porta a classificare i nodi sulla base del numero di intersezioni delle tangenti t_1, t_2 con \mathcal{C}^n :

- (1) $t_1 \cap \mathcal{C}^n = 3$ (o $2k + 1$) intersez. in P_o
 $t_2 \cap \mathcal{C}^n = 3$ (o $2k + 1$) intersez. in P_o $\implies P_o$ **nodo ordinario**
- (2) $t_1 \cap \mathcal{C}^n = 3$ (o $2k + 1$) intersez. in P_o
 $t_2 \cap \mathcal{C}^n = 4$ (o $2h + 2$) intersez. in P_o $\implies P_o$ **flecnode**
- (3) $t_1 \cap \mathcal{C}^n = 4$ (o $2k + 2$) intersez. in P_o
 $t_2 \cap \mathcal{C}^n = 4$ (o $2h + 2$) intersez. in P_o $\implies P_o$ **biflecnode**

Si rimanda all'Appendice A per la descrizione dei diversi nodi, propri ed impropri.

6.7 Studio di un punto cuspidale

Siano \mathcal{C}^n una curva algebrica e $P_o \in \mathcal{C}^n$. Supponiamo che P_o sia una *cuspidale*, ovvero un punto doppio con tangenti principali $t_1 = t_2$ coincidenti. Come nella precedente sezione, ci riconduciamo senza perdere di generalità al caso $P_o = O$, e sia $y^2 = 0$ l'equazione delle tangenti principali. Allora, l'equazione di \mathcal{C}^n è data da

$$\mathcal{C}^n : \underbrace{a_{02}y^2}_{\varphi_2(x,y)} + \underbrace{(a_{03}y^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{30}x^3)}_{\varphi_3(x,y)} + \underbrace{(a_{40}x^4 + \dots)}_{\varphi_4(x,y)} + \dots + \underbrace{(\dots)}_{\varphi_n(x,y)} = 0.$$

L'equazione $\mathcal{P}_1 : y = 0$ della tangente rappresenta la parabola osculatrice del primo ordine. Consideriamo ora una generica parabola del secondo ordine originata da \mathcal{P}_1 osculatrice, ossia, $\mathcal{P}_2 : y = 0 + \lambda x^2$. Determiniamo, se esiste, $\lambda \neq 0$ per cui \mathcal{P}_2 è osculatrice (4 delle sue intersezioni con \mathcal{C}^n cadono in P_o). Quindi, consideriamo

$$\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{C}^n : \begin{cases} y = \lambda x^2 \\ a_{30}x^3 + (a_{02}\lambda^2 + a_{21}\lambda + a_{40})x^4 + (\dots)x^5 + \dots = 0 \end{cases} \quad (6.7.15)$$

Distinguiamo ora 2 casi:

- (I) $a_{30} \neq 0$. Allora, **non esiste** λ per cui \mathcal{C}^n e \mathcal{P}_2 abbiano 4 intersezioni ricadenti in P_o . Pertanto, non esiste una parabola osculatrice di ordine 2, e quindi neanche un ramo lineare. In questo caso:

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{C}^n : \begin{cases} y = 0 \text{ (tg. in } P_o = O) \\ f(x, y) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ x^3(a_{30} + a_{40}x + \dots) = 0, \end{cases}$$

quindi la tangente ha esattamente 3 intersezioni in $P_o = O$ con \mathcal{C}^n . In tal caso, P_o è detto **cuspidale di 1^a specie**.

- (2) $a_{30} = 0$. Ciò vuol dire che, per l'equazione (6.7.15), la tangente cuspidale ha (almeno) 4 intersezioni in $P_o = O$ con \mathcal{C}^n . In questo caso esistono due parabole osculatrici del secondo ordine, ottenute in corrispondenza delle soluzioni λ_1, λ_2 dell'equazione

$$a_{02}\lambda^2 + a_{21}\lambda + a_{40} = 0.$$

Distinguiamo i seguenti sottocasi:

- (a) Se λ_1, λ_2 sono distinte, il punto P_o si dice **tacnodo** (o **doppio nodo**). In particolare, Se λ_1, λ_2 sono complesse coniugate, il punto P_o si dice **tacnodo isolato**. Se λ_1, λ_2 sono reali, il punto P_o si dice **tacnodo reale**.

(b) $\lambda_1 = \lambda_2$. In tal caso, esiste una e una sola parabola osculatrice del secondo ordine \mathcal{P}_2 , la quale ha almeno 5 intersezioni in P_o con \mathcal{C}^n .

Se $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{C}^n$ ha esattamente 5 intersezioni in P_o , allora P_o si chiama **cuspidi di 2^a specie** o **becco**. In tal caso, non esiste una parabola osculatrice del terzo ordine, e quindi neanche un ramo lineare.

Se $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{C}^n$ ha più di 5 intersezioni che ricadono in $P_o = O$, si considera una generica parabola di ordine 3, $\mathcal{P}_3 : y = \lambda_1 x^2 + \mu x^3$ originata da \mathcal{P}_2 , e si determina μ per cui \mathcal{P}_3 è osculatrice (avendo almeno 7 intersezioni con \mathcal{C}^n che ricadono in $P_o = O$). In tal caso si possono avere due ulteriori casi:

- $\mu_1 \neq \mu_2$. Ciò vuol dire che esistono 2 parabole osculatrici distinte del terzo ordine, e il punto P_o si chiama **oxnodo** (o **triplo nodo**). In tal caso, esistono 2 rami lineari originati in P_o .
- $\mu_1 = \mu_2$. In questo caso esiste una e una sola parabola osculatrice \mathcal{P}_3 . Se tale parabola ha esattamente 7 intersezioni in P_o , allora P_o si dice **cuspidi di 3^a specie**.

Se \mathcal{P}_3 ha più di 7 intersezioni in P_o , si considera una parabola di ordine 4 originata da \mathcal{P}_3 , e si continua il procedimento...

Osservazione 6.7.1 *Il massimo numero di punti doppi di una \mathcal{C}^n irriducibile è $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Nel computo dei punti doppi:*

- Una cuspidi di 1^a specie vale un punto doppio;
- Un tacnodo vale 2 punti doppi;
- Una cuspidi di 2^a specie vale 2 punti doppi;
- Un oxnodo vale 3 punti doppi;
- Una cuspidi di 3^a specie vale 3 punti doppi.

Se \mathcal{C}^n irriducibile è priva di punti multipli (liscia), allora il numero i dei suoi flessi è $i = 3n(n-2)$.

Ora supponiamo che \mathcal{C}^n irriducibile possieda punti multipli. Risulta:

- In un **nodo** (punto doppio con tangenti distinte) sono assorbite **6** delle intersezioni tra \mathcal{C}^n e la sua hessiana \mathcal{H} .
- In una **cuspidi di 1^a specie** sono assorbite **8** intersezioni tra \mathcal{C}^n e \mathcal{H} .

Di conseguenza, vale la seguente

Proposizione 6.7.2 (Formula di Plücker) *Se \mathcal{C}^n (irriducibile) ammette solo nodi e cuspidi di 1^a specie, allora il numero i dei suoi flessi è dato da*

$$i = 3n(n-2) - 6\delta - 8k$$

dove δ è il numero di nodi, mentre k è il numero di cuspidi di 1^a specie. Tale formula si chiama formula di Plücker.

6.8 Genere di una \mathcal{C}^n e curve razionali

Sia \mathcal{C}^n una curva algebrica di ordine n irriducibile. Sappiamo già che il massimo numero di punti doppi è $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Sia d il numero di punti doppi che effettivamente ha la curva \mathcal{C}^n .

Definizione 6.8.1 L'intero $g := \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d \geq 0$ si chiama **genere** di \mathcal{C}^n . Le curve di genere $g = 0$ sono le curve che ammettono il massimo numero di punti doppi. Le curve di genere 1 sono dette **curve ellittiche**.

Osservazione 6.8.2 Il genere di una \mathcal{C}^n è un invariante proiettivo.

Definizione 6.8.3 Una curva piana \mathcal{C} si dice **razionale** se si può esprimere con equazioni parametriche del tipo

$$\begin{cases} x = \frac{\alpha_1(t)}{\alpha_2(t)}, \\ y = \frac{\beta_1(t)}{\beta_2(t)}, \end{cases} \quad (6.8.16)$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sono polinomi in t . Il sistema (6.8.16) si chiama **rappresentazione parametrica razionale di \mathcal{C}** .

Se \mathcal{C} è razionale, eliminando t da (6.8.16) si ottiene un'equazione del tipo $f(x, y) = 0$, dove $f(x, y)$ è un polinomio algebrico. Quindi *una curva razionale è necessariamente algebrica*, e si può dimostrare che è necessariamente *irriducibile*. Osserviamo che ogni retta è una curva razionale.

Osservazione 6.8.4 La proprietà “ \mathcal{C} è razionale” è una proprietà proiettiva.

Proposizione 6.8.5 Una \mathcal{C}^n irriducibile con un punto $(n-1)$ -uplo è una curva razionale.

DIM. Siano $\mathcal{C}^n : f(x, y) = 0$ una curva irriducibile e $P_o \in \mathcal{C}^n$ un punto $(n-1)$ -uplo. Come di consueto, ci riconduciamo al caso $P_o = O$. Allora,

$$\mathcal{C}^n : \varphi_{n-1}(x, y) + \varphi_n(x, y) = 0,$$

dove φ_{n-1} è un polinomio omogeneo di grado $(n-1)$, mentre φ_n è un polinomio omogeneo di grado n . Consideriamo $C^n \cap r_{P_o}$, dove $r_{P_o} : y = tx$ è la generica retta per $P_o = O$. Risulta:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = tx \\ \varphi_{n-1}(x, tx) + \varphi_n(x, tx) = 0 \end{cases} \\ \implies & \begin{cases} y = tx \\ x^{n-1}\varphi_{n-1}(1, t) + x^n\varphi_n(1, t) = 0 \end{cases} \\ \implies & \begin{cases} y = tx \\ x^{n-1}((\varphi_{n-1}(1, t) + x\varphi_n(1, t)) = 0 \end{cases} \\ \implies & \begin{cases} y = tx \\ x^{n-1} = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = tx \\ \varphi_{n-1}(1, t) + x\varphi_n(1, t) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Dal primo degli ultimi due sistemi si ottiene O con molteplicità $(n-1)$. Il secondo sistema diventa:

$$\begin{cases} x = -\frac{\varphi_{n-1}(1, t)}{\varphi_n(1, t)}, \\ y = -t\frac{\varphi_{n-1}(1, t)}{\varphi_n(1, t)} \end{cases}$$

e quindi, C^n è razionale. \square

Esempio 6.8.6 *Proviamo che la curva $C^3 : y^2(x-3) + x(x-1)^2 = 0$ è razionale, e ne determiniamo una rappresentazione parametrica.*

Considerato il polinomio $f(x, y) = y^2(x-3) + x(x-1)^2$, determiniamo i punti singolari di C^3 , risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 0 = f_x = y^2 + 3x^2 - 4x + 1, \\ 0 = f_y = 2y(x-3) \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1, \\ y = 0 \end{cases} \implies A(1, 0).$$

Avendo la C^3 un punto $(3-1) = 2$ -plo (doppio), essa ammette una rappresentazione parametrica razionale. Procedendo come nella precedente Proposizione, consideriamo $\mathcal{F}_A : y = \lambda(x-1)$, il fascio di rette passanti per A , ed intersechiamolo con C^3 . Otteniamo

$$\begin{cases} y = \lambda(x-1), \\ y^2(x-3) + x(x-1)^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = \lambda(x-1), \\ (x-1)^2[\lambda^2(x-3) + x] = 0 \end{cases}$$

da cui ritroviamo due intersezioni in $A(1, 0)$, e

$$\begin{cases} y = \lambda(x - 1), \\ (\lambda^2 + 1)x - 3\lambda^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{3\lambda^2}{\lambda^2 + 1}, \\ y = \lambda(x - 1) = \frac{\lambda(2\lambda^2 - 1)}{\lambda^2 + 1}. \end{cases}$$

Corollario 6.8.7

- Le coniche irriducibili sono curve razionali, poiché ammettono punti $(n - 1) = 1$ -upli, ovvero semplici.
- Le cubiche irriducibili con un punto doppio sono curve razionali, poiché ammettono punti $(n - 1) = 2$ -upli, ovvero punti doppi.

Si osservi che le curve del precedente Corollario sono di genere 0, essendo di ordine n con un punto $(n - 1)$ -uplo. Vale in effetti il seguente risultato generale, di cui riportiamo solo l'enunciato.

Proposizione 6.8.8 *Ogni curva algebrica C^n irriducibile di genere $g = 0$ è una curva razionale.*

Osservazione 6.8.9 *Nel caso di una curva algebrica C^n di genere 0, una rappresentazione parametrica razionale si può ottenere intersecando C^n con un fascio di curve di ordine $(n - 2)$ passanti per gli $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punti doppi di C^n .*

6.9 Studio di una curva algebrica

Assegnata una curva algebrica $C^n : f(x, y) = 0$, lo **studio** di tale curva si articola nei punti indicati di seguito:

- (1) Condizioni di realtà: determinare le regioni del piano in cui la curva esiste, studiando la realtà della funzione $f(x, y)$ come una funzione di x e di y .
- (2) Simmetrie: stabilire se la curva è simmetrica rispetto ad uno degli assi o all'origine.
- (3) Intersezioni della curva con gli assi (se possibile, anche comportamento agli estremi del dominio).
- (4) Studio nei vertici del triangolo fondamentale.
- (5) Determinazione dei punti singolari.
- (6) Parabole osculatrici nei punti doppi e classificazione degli stessi.
- (7) Punti impropri della curva e relativi asintoti.

- (8) Determinazione dei flessi e delle tangenti di flesso (se possibile).
- (9) Grafico qualitativo della curva.
- (10) Stabilire se la curva ammette una rappresentazione parametrica razionale.
Se espressamente richiesto, determinare una tale rappresentazione.

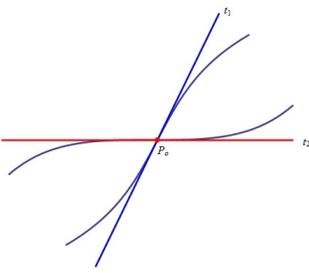
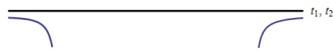
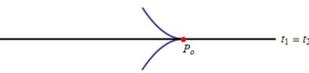
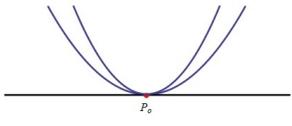
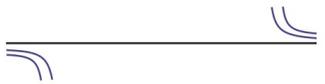
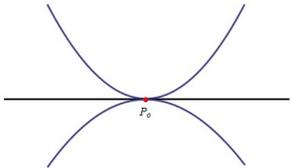
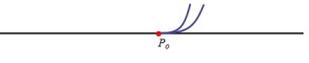
Esercizi 6.9.1 Studiare le seguenti curve algebriche piane.

1. $\mathcal{C}^3 : y^2(x - 2) + x(x - 1)^2 = 0.$
2. $\mathcal{C}^3 : y^2 - x^3 = 0.$
3. $\mathcal{C}^3 : x(y - 1)^2 + y = 0.$
4. $\mathcal{C}^3 : (x^2 + y^2)y - x^2 = 0.$
5. $\mathcal{C}^4 : (x^2 + y^2)^2 + 2x(y^2 - x^2) = 0.$
6. $\mathcal{C}^4 : y^2(x - 1)^2 + x^4 - 2x^3 = 0.$
7. $\mathcal{C}^4 : x^4 - x^2y^2 - 3x^2y + y^2 = 0.$
8. $\mathcal{C}^4 : x^2y^2 - 3xy - x^2 + 2 = 0.$
9. $\mathcal{C}^4 : y^2(x - 1)^2 - 2xy + 1 = 0.$
10. $\mathcal{C}^4 : x^2 - 3xy^2 - x^2y^2 + 2y^4 = 0.$
11. $\mathcal{C}^4 : (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$ (lemniscata).
12. $\mathcal{C}^4 : x^4 - 2x^3 + y^2 = 0$ (quartica piriforme).
13. $\mathcal{C}^4 : x^4 + x^2y^2 - y^2 = 0.$
14. $\mathcal{C}^4 : x^2y^2 - 6x^2y + 5x^2 - 1 = 0.$
15. $\mathcal{C}^3 : y^2(x - 1) - 2y(x + 1) + 1 = 0.$
16. $\mathcal{C}^4 : (x^2 - 2y)^2 - y^3 = 0.$
17. $\mathcal{C}^4 : y^2(x^2 - 4) + x^2(x + 1)^2 = 0.$
18. $\mathcal{C}^4 : y^4 - x^3y - 2xy^2 + x^2 = 0.$
19. $\mathcal{C}^4 : (x^2 + y^2)^2 + 4x(x - y^2) = 0.$
20. $\mathcal{C}^4 : x^2 - 3xy^2 - x^2y^2 + 2y^4 = 0.$
21. $\mathcal{C}^4 : (y - x^2)^2 - 3yx^3 = 0.$

Appendice A:

Tabella del grafico dei punti notevoli di una C^n

P_o	Punto proprio	Punto improprio
semplice ordinario o flesso di specie pari		
flesso ordinario o flesso di specie dispari		
nodo ordinario		
flecnodo		

<p>biflecnodo</p>		
<p>cuspidi di 1^a specie</p>		
<p>tacnodo reale con λ_1, λ_2 concordi</p>		
<p>tacnodo reale con λ_1, λ_2 discordi</p>		
<p>cuspidi di 2^a specie (o becco)</p>		

Appendice B: Selezione di Prove Scritte di Geometria II

Prova Scritta di Geometria II - 8 Gennaio 2019

1) **Forme bilineari.** Data l'applicazione bilineare

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\longmapsto 3x_1y_1 + 4x_2y_2 + 5x_3y_3 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 \\ &\quad + x_1y_3 + x_3y_1 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 \end{aligned}$$

- Verificare che ψ è un prodotto scalare su \mathbb{R}^3 .
 - determinare il complemento ortogonale rispetto a ψ del sottospazio $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 3x_2 = 0\}$.
 - determinare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 rispetto a ψ , contenente una base di U .
- 2) **Endomorfismi simmetrici.** In \mathbb{R}^4 , munito del prodotto scalare standard, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad (x, y, z, t) \longmapsto (4z, 5y - t, 4x + \alpha t, -y + 5t).$$

- Determinare il valore di α per cui f è un endomorfismo simmetrico.
 - Per tale valore di α , determinare una base ortonormale di autovettori.
 - Per tale valore di α , determinare la segnatura della forma quadratica corrispondente ad f .
- 3) **Coniche.** Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri la conica $C_k : x^2 + 2kxy + y^2 + 2ky + 1 = 0$.
- Classificare C_k dal punto di vista proiettivo e affine.
 - Studiare la conica per $k = 1$.
 - Determinare la retta polare di $A(0, -1)$ rispetto a C_1 .
- 4) **Curve algebriche piane.** Data la curva $\mathcal{C}^4 : x^2y^2 - y - 1 = 0$,

- Studiarne condizioni di realtà, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi coordinati.
- Determinarne e studiarne i punti singolari ed i punti impropri.
- Tracciarne un grafico qualitativo.

N.B.: Tutti i procedimenti devono essere brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Prova Scritta di Geometria II - Settembre 2018

1) **Forme bilineari.** Data l'applicazione bilineare

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\longmapsto 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + y_1y_2 + 4x_3y_3, \end{aligned}$$

- a) Verificare che ψ è un prodotto scalare su \mathbb{R}^3 .
 b) determinare la proiezione ortogonale rispetto a ψ del vettore $\vec{w} = (1, 0, 0)$ sul sottospazio

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = x_2 + x_3 = 0\}.$$

- c) determinare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 rispetto a ψ , contenente una base di U .

2) **Trasformazioni ortogonali.** In \mathbb{R}^3 , munito del prodotto scalare standard, si consideri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}z, (\alpha - 1)x + y, \frac{4}{5}x + \frac{\sqrt{3}}{5}z \right).$$

- a) Determinare il valore di α per cui f è una trasformazione ortogonale.
 b) Per tale valore di α , determinare i punti fissi di f ed interpretarla geometricamente.

3) **Coniche.** Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri la conica $C_k : 2x^2 - 2y^2 + 4kxy - 4ky + 3 = 0$.

- a) Classificare C_k dal punto di vista proiettivo e affine.
 b) Studiare la conica per $k = 1$.
 c) Per $k = 1$, determinare la retta polare di $A(2, 0)$ rispetto a C_1 .

4) **Curve algebriche piane.** Data la curva $C^4 : x^2(y - 1)^2 + y^4 - 2y^3 = 0$,

- a) Studiarne condizioni di realtà, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi coordinati.
 b) Determinarne e studiarne i punti singolari ed i punti impropri.
 c) Tracciarne un grafico qualitativo.

N.B.: Tutti i procedimenti devono essere brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.

Prova Scritta di Geometria II - Giugno 2018

1) **Forme bilineari.** Data l'applicazione bilineare

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\longmapsto 4x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 \\ &\quad + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 \end{aligned}$$

- a) Verificare che ψ è un prodotto scalare su \mathbb{R}^3 .
 b) determinare il complemento ortogonale rispetto a ψ del sottospazio

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 3x_1 - x_2 = 0\}.$$

- c) determinare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 rispetto a ψ , contenente una base di U .

2) **Trasformazioni ortogonali.** In \mathbb{R}^3 , munito del prodotto scalare standard, si consideri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \longmapsto \left(x + \alpha z, \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}z, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z \right).$$

- a) Determinare il valore di α per cui f è una trasformazione ortogonale.
 b) Per tale valore di α , determinare i punti fissi di f ed interpretarla geometricamente.

3) **Coniche.** Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri la conica $C_k : x^2 - 2kxy + y^2 - 2ky + 1 = 0$.

- a) Classificare C_k dal punto di vista proiettivo e affine.
 b) Studiare la conica per $k = -1$.
 c) Determinare la retta polare di $A(0, 1)$ rispetto a C_{-1} .

4) **Curve algebriche piane.** Data la curva $\mathcal{C}^4 : x^2y^2 - x - 1 = 0$,

- a) Studiarne condizioni di realtà, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi coordinati.
 b) Determinarne e studiarne i punti singolari ed i punti impropri.
 c) Tracciarne un grafico qualitativo.

N.B.: Tutti i procedimenti devono essere brevemente giustificati. Sarà elemento di valutazione anche la chiarezza espositiva.