

Meccanica Quantistica Relativistica

Paolo Ciafaloni

A.A. 2018 - 2019

Contents

1	Simmetrie - Gruppi - Richiami di MQ	3
1.1	Rotazioni - $SO(3)$	4
1.2	Rotazioni e Meccanica Quantistica	6
2	Invarianza di Lorentz e Teoria dei campi classica	8
2.1	Notazioni	8
2.2	Trasformazioni di Lorentz	9
2.3	Teoria dei campi classica	12
2.4	Equazioni del moto per particelle libere	14
2.4.1	Particelle scalari: l'equazione di Klein-Gordon	14
2.4.2	Il campo di spin 1/2: equazioni di Weyl e di Dirac	15
2.4.3	Bosoni di gauge: campo elettromagnetico e vettori massivi	18
3	Quantizzazione dei campi	20
3.1	Oscillatore armonico	20
3.2	Quantizzazione del campo scalare	21
3.3	Quantizzazione del campo fermionico	23
3.4	Quantizzazione del campo elettromagnetico	25
3.5	Propagatori (o funzioni di Green)	26
3.6	Simmetrie e correnti conservate	29
3.7	Campi in interazione: la Lagrangiana di QED	30
3.8	Simmetrie discrete: C,P,T	31
4	Matrice S, sezioni d'urto, decadimenti al primo ordine perturbativo	32
4.1	Teoria delle perturbazioni dipendente dal tempo	32
4.2	Esempi in MQ nonrelativistica	35
4.2.1	Scattering da potenziale	35
4.2.2	Emissione spontanea da un atomo	37
4.3	Esempi in teoria dei campi relativistica	39
4.3.1	Matrice S, sezioni d'urto e decadimenti	39
4.3.2	Assorbimento ed emissione di un fotone	43
4.3.3	Scattering in $\lambda\phi^4$	45
4.4	Unitariet�	46
5	Matrice S agli ordini superiori al primo	47
5.1	Teorema di Wick, scattering in teoria $\lambda\phi^3$	47
5.2	Sezione d'urto per diffusione elettrone muone	49
5.3	Sezione d'urto per diffusione elettrone elettrone	51
5.4	Propagatori fermionici	51
5.5	Un esempio di decadimento	52

A.1 Matrici di Dirac e loro tracce	53
A.2 Regole di Feynman per la QED	54

1 Simmetrie - Gruppi - Richiami di MQ

Per simmetria in fisica si intende *invarianza delle equazioni che descrivono le leggi della fisica sotto certe trasformazioni*. Le trasformazioni hanno di norma la struttura di gruppo. Questo perché se le leggi viste dall'osservatore B siano le stesse di quelle viste dall'osservatore A e quelle viste dall'osservatore C sono le stesse di quelle viste da B, richiediamo anche che quelle viste da C siano le stesse di quelle viste da A. Le simmetrie comportano leggi di conservazione.

In MQ le simmetrie vengono implementate con operatori U unitari (o antiunitari, un caso che non discuto qui) tali che il ket trasformato sia $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$. Invarianza significa che l'evoluzione di $|\psi'\rangle$ è determinata dalla stessa hamiltoniana H che governa l'evoluzione di $|\psi\rangle$. Siccome $id_t|\psi\rangle = H|\psi\rangle$ comporta $id_tU|\psi\rangle = UHU^\dagger|U\psi\rangle$, l'hamiltoniana che governa l'evoluzione di $|\psi'\rangle$ è $H' = UHU^\dagger$ e invarianza significa $H = H'$ cioè $[H, U]=0$. Se il gruppo è continuo, si può scrivere $U = e^{iT}$ dove T è generatore delle trasformazioni infinitesime, matrice hermitiana corrispondente a un'osservabile (ad es. momento angolare). Siccome per una generica osservabile si ha $id_t o(t) = \langle\psi|[O, H]|\psi\rangle$ e siccome T commuta con H , l'osservabile connessa con T è conservata. Inoltre, se $H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ si ha $HT|\psi\rangle = TH|\psi\rangle = ET|\psi\rangle$ cioè anche $T\psi$ è autostato di H con lo stesso valore E ; questo significa che, in caso di degenerazione, T è una matrice nel sottospazio degli autostati ad un dato valore di E e può consentire di rimuovere la degenerazione. Ad esempio nel caso dell'atomo di idrogeno gli autostati si classificano con il valore del momento angolare quadro $|\mathbf{L}|^2$; gli autovalori di L_3 consentono di rimuovere la degenerazione. Questo, fra l'altro, semplifica il problema di trovare gli autostati in quanto la parte angolare è già classificata e nota.

Se una data trasformazione corrisponda ad una simmetria dipende dal sistema. Se ad esempio abbiamo un insieme di atomi posti in punti casuali, la simmetria per traslazioni è evidentemente rotta in quanto il sistema (l'Hamiltoniana) visto da un punto traslato è in generale diverso dal sistema (Hamiltoniana) vista dal punto originario. Nel caso di un reticolo l'invarianza per traslazioni ci sarà ma solo per traslazioni discrete corrispondenti a multipli del passo reticolare. In modo analogo ci saranno simmetrie solo sotto alcune rotazioni e il gruppo di simmetria delle rotazioni sarà discreto, e non continuo e così via. Nella fisica delle interazioni fondamentali, oggetto di queste dispense, il gruppo continuo delle traslazioni è una buona simmetria. Questo perché si ritiene che le leggi (equazioni) che regolano le interazioni fondamentali siano le stesse qui ed ora come un anno fa su Marte, in cima all'Everest eccetera. E' chiaro che se faccio cadere una palla ottengo un risultato diverso qui rispetto a quello che ottengo su un satellite in orbita oppure sulla luna. Ma il punto è che *le leggi che descrivono le componenti fondamentali della materia e le loro interazioni sono le stesse qui come sulla luna o su un satellite*. E' chiaro che tutto dipende da cosa trasformo e cosa non trasformo. Consideriamo ad esempio un atomo in cui ipotizziamo sia presente nell'Hamiltoniana un termine proporzionale a $\mathbf{S}_n \cdot \mathbf{S}_e$, dove $\mathbf{S}_{e(n)}$ è lo spin dell'elettrone (nucleo). Se studio i livelli energetici dell'elettrone immerso in un potenziale esterno, l'invarianza per rotazione è rotta perché ruotando il sistema ruota solo lo spin dell'elettrone e non quello del nucleo. Però se ruotiamo sia

il nucleo che l'eltrone e le loro interazioni, allora l'Hamiltoniana è invariante perché il prodotto scalare è invariante. In questo secondo caso l'invarianza del sistema non dà informazioni perché tautologica. Nel caso delle interazioni fondamentali invece, *l'invarianza per certe trasformazioni, come vedremo più avanti, pone restrizioni sul tipo di equazioni possibili, eliminando equazioni che non sono covarianti in forma.*

Per riassumere, possiamo affermare che le simmetrie

- pongono restrizioni sulla forma delle equazioni che descrivono le leggi della natura;
- sono collegati a leggi di conservazione di quantità fisiche (e come tali forniscono anche le cosiddette regole di selezione)
- facilitano la risoluzione di equazioni come l'equazione di Schroedinger

1.1 Rotazioni - SO(3)

Le rotazioni agiscono sullo spazio R^3 trasformando le componenti cartesiane di un vettore x_1, x_2, x_3 come $x'_i = R_{ij}x_j$ dove R è una matrice ortogonale (lascia invariata la norma) a determinante 1 (come l'identità, escludo la parità che ha det -1), alias $R \subset SO(3)$. Si ha $R_\theta = \exp(-i\theta_a T^a)$ dove $\hat{\theta}$ definisce l'asse di rotazione e $\theta = |\boldsymbol{\theta}|$ l'angolo. Le matrici hermitiane, generatrici del gruppo, T^a sono date da $T_{ij}^a = -i\epsilon_{ij}$ da cui è facile verificare che per una trasformazione infinitesima $1 - iT^a\theta^a$ si ha $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{x}$. Questa è la rappresentazione fondamentale di SO(3).

Possiamo costruire le rappresentazioni di ordine più elevato dal prodotto diretto di rappresentazioni fondamentali. Per prima cosa consideriamo due vettori $p_i, q_i, i=1, 2, 3$ che vivono nella rappresentazione fondamentale di SO(3). Con essi costruiamo il tensore $T_{ij} = p_i q_j$. La traccia $T_{ii} = \sum_i p_i q_i$ è invariante. Inoltre il carattere di (anti)simmetria è invariante rispetto alle rotazioni di SO(3), cioè se $T_{ij} = \pm T_{ji}$ vale anche $T'_{ij} = \pm T'_{ji}$ dove T' è il trasformato di T (Esercizio: dimostrarlo!). Quindi i multipletti appartengono a elementi del tensore con simmetria definita. Quanti gradi di libertà ha il tensore simmetrico? Ha elementi T_{ij} con $i \leq j$. Con $i=1$ ho tre possibilità, con $i=2$ ne ho 2 e con $i=3$ ne ho una sola, in tutto 6 elementi. Il tensore antisimmetrico ha $i < j$ e quindi $2+1=3$ componenti, che esauriscono le $3 \times 3 = 9$ componenti. La decomposizione è:

$$3 \otimes 3 = 5 \oplus 3 \oplus 1 \quad (1)$$

Eliminando la traccia, che è invariante, dal tensore simmetrico, otteniamo le 5 componenti del multipletto di spin 2. La parte antisimmetrica ha le tre componenti di spin 1 e la traccia ha spin 0:

$$T_{ij} = \left[\frac{p_i q_j + p_j q_i}{2} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_k p_k q_k \right] + \left[\frac{p_i q_j - p_j q_i}{2} \right] + \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_k p_k q_k = S[T_{ij}] + A[T_{ij}] + Tr \quad (2)$$

avendo indicato con S l'operazione di simmetrizzazione e sottrazione della traccia.

Consideriamo ora il prodotto diretto di tre vettori p, q, r . La decomposizione è:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = [5 \oplus 3 \oplus 1] \otimes 3 = (7 \oplus 5 \oplus 3) \oplus (5 \oplus 3 \oplus 1) \oplus 3 \quad (3)$$

per un totale di $3^3 = 27$ gradi di libertà. Di nuovo, la rappresentazione di spin più elevato (spin 3 in questo caso) è legata al tensore completamente simmetrico ripetuto allo scambio dei tre indici. In

questo caso il numero di componenti è dato dalle scelte $i \leq j \leq k$. E' facile vedere che se scelgo $i = 1$ ho 6 possibili scelte per j, k . se scelgo $i = 2$ ne ho 3 e per $i = 3$ una sola. In totale ho 10 componenti. Tuttavia anche in questo caso ho dei termini di traccia: Tutti i tensori ottenuti contraendo due indici appartengono alla rappresentazione di spin 1. Ho tre possibili scelte $\delta_{ij}T_{ijk}, \delta_{ik}T_{ijk}, \delta_{kj}T_{ijk}$. In totale ho $10-3=7$ componenti per il tensore totalmente simmetrico a traccia nulla, che corrisponde allo spin 3.

Cerchiamo ora di formalizzare e generalizzare a tensori con n componenti. Possiamo formare i tensori invarianti ($R \in SO(3)$):

$$\delta_{ij} \rightarrow R_{ii'}R_{jj'}\delta_{i'j'} = \delta_{ij} \quad \varepsilon_{ijk} \rightarrow R_{ii'}R_{jj'}R_{kk'}\varepsilon_{i'j'k'} = \varepsilon_{ijk}\det[R] = \varepsilon_{ijk} \quad (4)$$

Combinando questi tensori con un tensore di rango n possiamo abbassare il rango rispettivamente a n-2 e n-1*:

$$\delta_{ab}T_{ab} \rightarrow \delta_{ab}R_{aa'}R_{bb'}T_{a'b'} = \delta_{a'b'}T_{a'b'} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{abc}T_{bc} \rightarrow \varepsilon_{abc}R_{bb'}R_{cc'}T_{b'c'} = \varepsilon_{a'b'c'}R_{a'l}R_{al}R_{bb'}R_{cc'}T_{b'c'} = R_{al}\varepsilon_{ab'c'}T_{b'c'} \quad (6)$$

Sottraiamo ora il termine di traccia e il termine antisimmetrico:

$$S[T]_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}[\delta_{ab}T_{ab}] - \frac{1}{2}\varepsilon_{ijl}[T_{ab}\varepsilon_{abl}] \quad (7)$$

E' Facile verificare che $S[T]$ è simmetrico e a traccia nulla rispetto agli indici ij . Possiamo ora ripetere l'operazione di simmetrizzazione e sottrazione di traccia per tutti gli indici. Otteniamo il giusto numero di gradi di libertà, che è $2n + 1$ per uno spin n? Siccome il tensore è completamente simmetrico, possiamo contarne le componenti indipendenti mettendo tutti gli 1 a sinistra, i 3 a destra e i 2 fra gli 1 e i 3. Possiamo pensare di identificare un elemento del tensore mettendo due separatori A e B fra i tre gruppi di numeri. Ad esempio A=3, B=5 con n=7 corrisponde a 1123333 mentre A=4, B=8 con n=10 corrisponde a 1112223333. Il numero di componenti indipendenti dipende quindi dal numero di modi diversi in cui posso sistemare A e B. Se A=1 B può essere messo in n+1 modi diversi (il numero totale di oggetti compresi A e B è n+2). Se A=2 B ha n possibilità ecc. In totale ho la somma degli interi da 1 a n+1, cioè $(n+2)(n+1)/2$. Adesso passiamo a richiedere traccia nulla su tutte le coppie di indici. Data la simmetria, posso sempre mettere i due indici su cui richiedo traccia nulla a sinistra. Dopodiché il conteggio procede come prima solo che il numero di indici è sceso di due unità. Ottengo quindi $n(n-1)/2$ condizioni, e il numero di gradi di libertà è:

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n + 1 \quad (8)$$

Spesso anziché la base cartesiana si usa la base sferica, cioè quella degli autovettori di T_3 . Siccome in base cartesiana $T_{ij}^3 = -i\varepsilon_{3ij}$, è facile verificare che $T_3x_{\pm} = \pm x_{\pm}$ con $x_{\pm} = 1/\sqrt{2}(x \pm iy)$. Si ottengono facilmente le armoniche sferiche dal prodotto diretto di vettori di spin 1:

$$T_+ = \frac{x+iy}{\sqrt{2}} = \frac{e^{i\phi}\sin\theta}{\sqrt{2}} \quad T_3 = z = \cos\theta \quad T_- = \frac{x-iy}{\sqrt{2}} = \frac{e^{-i\phi}\sin\theta}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

*si sottintende che la contrazione ad esempio avviene sui primi due indici mentre i restanti n-2 indici restano invariati

Ad esempio le componenti del tensore di spin 2, ordinati dal valore +2 al valore 0 di T_3 , sono:

$$\begin{aligned} S[T]_{++} &= T_{++} = \frac{x^2 - y^2 + 2ixy}{2} = \frac{1}{2}e^{2i\phi} \sin^2 \theta \\ S[T]_{+3} &= \frac{T_{+3} + T_{3+}}{2} = \frac{z(x + iy)}{\sqrt{2}} = e^{i\phi} \sin \theta \cos \theta \\ S[T]_{33} &= T_{33} - \frac{1}{3}(T_{+-} + T_{-+} + T_{33}) = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{3} = \frac{1 + 3 \cos(2\theta)}{6} \end{aligned}$$

con le componenti con T_3 negativo ottenute dallo scambio di + con - ovvero $\phi \rightarrow -\phi$.

Alle rappresentazioni di spin intero fin qui analizzate occorre aggiungere quelle di spin semiintero, che descrivono ad esempio come trasforma lo spin dell'elettrone*. Ad esempio un oggetto di spin 1/2, s_α , ha due componenti $\alpha = 1, 2$ e trasforma sotto una rotazione definita da $\boldsymbol{\theta}$ come $s \rightarrow \exp[-i\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\theta}]s$ dove $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}/2$ e $\sigma_a, a = 1, 2, 3$ sono le matrici di Pauli. E' facile verificare che le τ_a soddisfano la stessa algebra di Lie di SO(3) $[\tau_i, \tau_j] = i\epsilon_{ijk}\tau_k$. Componendo spinori si possono creare oggetti di qualunque spin, in maniera analogo a quanto visto per gli spin interi.

I gruppi SO(3) e SU(2) sono localmente isomorfi perchè hanno la stessa algebra di Lie, ma non sono isomorfi "in grande". Consideriamo infatti una rotazione di 2π intorno all'asse z. Un vettore viene ovviamente ruotato in se stesso, ma non è così per uno spinore. Infatti:

$$\exp[-i\pi\sigma_3] = 1 - i\sigma_3 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{3!}i\pi^3\sigma_3 + \frac{1}{4!}\pi^4 + \dots = \cos(-\pi) + i\sigma_3 \sin(-\pi) = -1$$

e lo spinore non va in se stesso, bensì in - se stesso. Generalizzando, nella base sferica una rotazione intorno all'asse z viene descritta da $\exp[-iS_3\theta]$ dove S_3 è una matrice diagonale con gli autovalori della componente 3 dello spin. Se l'autovalore di S_3 è intero una rotazione di 2π vale 1, se è semiintero vale -1.

Possiamo esplicitare la relazione fra SU(2) e S(3) tramite la relazione:

$$x'_i\sigma_i = Ux_i\sigma_iU^\dagger; \quad i = 1, 2, 3 \quad U = \exp[-i\frac{\sigma_a}{2}\theta^a] \quad i, a = 1, 2, 3 \quad (10)$$

Data questa relazione si dimostra che $x' = R(\boldsymbol{\theta})x$. Infatti moltiplicando questa identità per se stessa e facendo la traccia si ottiene:

$$Tr\{x'_i\sigma_i x'_j\sigma_j\} = Tr\{Ux_i\sigma_iU^\dagger Ux_j\sigma_jU^\dagger\} = Tr\{x_i\sigma_i x_j\sigma_j\} \Rightarrow x'_i x'_i = x_i x_i$$

inoltre per una rotazione infinitesima è facile vedere che la (10) implica $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\theta} \wedge \boldsymbol{x}$ (Esercizio: dimostrarlo).

1.2 Rotazioni e Meccanica Quantistica

Quali sono gli operatori che implementano le rotazioni sugli spazi di Hilbert della MQ? Per capirlo cominciamo con l'osservare che, facendo una serie di Taylor:

$$\psi(t + T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n d_t^n \psi(t) = e^{-i(Tid_t)} \psi(t) \quad (11)$$

*Per maggiori dettagli sull'algebra spinoriale, si rimanda a [4].

Poichè $i\hbar d_t \psi = H\psi$ possiamo dire che l'hamiltoniana genera le traslazioni temporali, nel senso che $\psi(t+T) = \exp(-iHT)\psi(t)$. Allo stesso modo, l'impulso genera le traslazioni spaziali. E per le rotazioni? Consideriamo il momento angolare $\mathbf{L} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$. Da questa definizione si verifica direttamente che $[\frac{L_i}{\hbar}, \frac{L_j}{\hbar}] = i\epsilon_{ijk} \frac{L_k}{\hbar}$ per cui viene naturale ipotizzare

$$\psi(Rx) = \psi(e^{i\mathbf{T}\cdot\boldsymbol{\theta}}x) = e^{i\frac{\mathbf{L}}{\hbar}\cdot\boldsymbol{\theta}}\psi(x)$$

Questa relazione si può verificare facendo una serie di Taylor come nel caso della traslazione temporale. In effetti però basta verificare per una rotazione infinitesima, visto che una rotazione finita è composizione di rotazioni infinitesime.

Adesso immaginiamo di fare un cambio di coordinate, passando a un nuovo sistema di riferimento "primato", definito da $x \rightarrow x' = R(x)$; come si trasformano le funzioni d'onda in MQ? E' evidente che il valore della funzione d'onda è lo stesso nei due sistemi di riferimento perchè x nel sistema iniziale e x' nel nuovo sistema si riferiscono allo stesso punto materiale, per cui:

$$\psi'(x') = \psi(x) \Rightarrow \psi'(Rx) = \psi(x) \Rightarrow \psi'(x) = \psi(R^{-1}x) = e^{-i\frac{\mathbf{L}}{\hbar}\cdot\boldsymbol{\theta}}\psi(x) \quad (12)$$

In MQ ci sono anche oggetti di spin 1/2 (elettrone) e spin 1 (fotone); in generale ho:

$$\psi'(x') = \mathcal{R}\psi(x) \Rightarrow \psi'(x) = \mathcal{R}\psi(R^{-1}x) \quad (13)$$

dove \mathcal{R} è una matrice unitaria che fornisce una rappresentazione del gruppo SO(3). L'"usuale" funzione d'onda è uno scalare, oggetto di spin 0 con 1 componente, e \mathcal{R} è la rappresentazione banale fornita dall'identità. Nel caso di un elettrone $\psi_\alpha, \alpha = 1, 2$ descrive uno spin 1/2 a due componenti, che si trasforma nella rappresentazione che ha come generatori le matrici di Pauli; quindi $\mathcal{R} \subset \text{SU}(2)$. Nel caso di una funzione d'onda vettore, \mathcal{R} coincide con R , eccetera. In generale possiamo scrivere $\mathcal{R} = \exp[-i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{S}/\hbar]$ dove la matrice \mathbf{S} agisce sull'opportuno multipletto di spin, per cui mettendo insieme con le (12,13) si ottiene:

$$\psi'(x) = \mathcal{R}\psi(R^{-1}x) = \mathcal{U}_R\psi(x) \quad R = e^{-i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{T}}, \mathcal{U}_R = e^{-i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\mathbf{J}}{\hbar}}, \mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$$

L'invarianza per rotazioni, cioè il fatto che l'Hamiltoniana commuta con il momento angolare totale \mathbf{J} significa che $\mathbf{J}|\psi_E\rangle$ è autostato con energia E come $|\psi_E\rangle$, quindi gli autostati di H si organizzano in multipletti di \mathbf{J} . Nel caso dell'atomo di idrogeno H commuta separatamente con \mathbf{L} e \mathbf{S} , per cui gli autostati sono autovettori separatamente di L_3 e S_3 , ovvero sono prodotto diretto di funzione delle coordinate e funzione di spin. L'atomo di elio nel livello fondamentale ha due elettroni con la stessa autofunzione delle coordinate per cui, dovendo la funzione complessiva essere antisimmetrica, gli elettroni stanno nello stato di spin totale 0 che è antisimmetrico.

Per finire, l'implementazione del momento angolare nella Meccanica Quantistica include tutta la trattazione che coinvolge i coefficienti di Clebsch-Gordon e il teorema di Wigner-Eckart che si trova in tutti i libri di MQ. In particolare, il teorema di Wigner-Eckart semplifica il calcolo degli elementi di matrice di operatori con momento angolare definito.

2 Invarianza di Lorentz e Teoria dei campi classica

2.1 Notazioni

Per i quadri e trivettori uso le notazioni: \mathbf{p} è un trivettore e $p = (p_0, \mathbf{p}) = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ un quadrivettore. Analogamente $x = (x_0, \mathbf{x})$. In linea generale uso le lettere greche $\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots$ per gli indici di Lorentz che vanno da 0 a 3: $\mu = 0, 1, 2, 3$. Per gli indici spaziali che vanno da 1 a 3 uso invece i, j, k ; ad esempio $i = 1, 2, 3$. Indico i versori con $\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. Inoltre $g_{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)^*$. Le matrici di Pauli sono date da:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad \gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} + \frac{[\gamma_\mu, \gamma_\nu]}{2} \quad (15)$$

Sono qui omesse le matrici identità; ad esempio con $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + \dots$ si intende $\sigma_i \sigma_j = I \delta_{ij} + \dots$ dove I è la matrice identità 3×3 . Analogamente, $\gamma_\mu \gamma_\nu = I g_{\mu\nu} + \dots$ dove I è la matrice identità 4×4 . In fisica delle alte energie si usa un sistema di unità di misura in cui $\hbar = c = 1$. In questo modo si evita di portarsi dietro \hbar e c nei calcoli. Massa ed energia, essendo $c = 1$, si misurano entrambe in unità di energia eV . Per tornare a unità di misura usuali occorrono due costanti fisiche dimensionate, ad esempio:

$$c \approx 3 \cdot 10^8 m/s \quad \hbar c \approx 200 \text{ MeV fm} \quad 1 \text{ fm} = 10^{-15} m \quad (16)$$

Esempi (definiamo le dimensioni di massa $[M]$, lunghezza $[L]$, energia $[E]$ ecc):

- Una velocità $v = 0.3$ corrisponde a $0.3 c \approx 9 \cdot 10^7 m/s$
- Le energie si misurano in eV . Siccome $\hbar c = [E][L] = 1$, le lunghezze si misurano in eV^{-1} , e siccome $c = 1$ il tempo si misura in eV^{-1} .
- Una massa di 1 GeV come quella del protone corrisponde a $\frac{1 \text{ GeV}}{(3 \cdot 10^8 m/s)^2} = \frac{1.6 \cdot 10^{-10} J}{(3 \cdot 10^8 m/s)^2} \approx 1.7 \cdot 10^{-27} kg$. Quando espressa in grammi questa massa è compatibile con il numero di Avogadro: $1/(6 \times 10^{23}) \approx 1.7 \times 10^{-24}$.
- Il raggio di azione delle interazioni nucleari forti è collegato alla massa del pione, $m_\pi \sim 140$ MeV, che corrisponde a $\hbar c/m_\pi \approx 1 \text{ fm}$; questo è il raggio tipico di un nucleo atomico. Poiché la massa dell'elettrone è $m \sim 0.5$ MeV, il rapporto fra raggio del nucleo e raggio atomico è $m\alpha/m_\pi \approx 3 \times 10^{-5}$.

Quanto vale la carica di un elettrone in unità naturali? Per capirlo occorre prendere un sistema fisico, come ad esempio l'atomo di idrogeno; utilizziamo le unità di misura S.I. Uguagliando l'accelerazione centripeta alla forza di Coulomb e aggiungendo la quantizzazione del momento angolare si ottiene per la velocità v dell'elettrone (Esercizio: ricavarlo!):

$$\frac{v}{c} = \frac{e^2}{4\pi\hbar\epsilon_0\hbar c} \equiv \alpha \approx \frac{1}{137} \quad \text{e anche} \quad r_B = \frac{\hbar c}{\alpha m c^2}$$

*La notazione $\text{Diag}(a,b,c,\dots)$ indica una matrice diagonale con gli elementi specificati in parentesi sulla diagonale. Il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ è quindi una matrice 4×4 diagonale con gli elementi $(1,-1,-1,-1)$ sulla diagonale.

dove i valori delle costanti sono ricavati da <http://pdg.lbl.gov>. La costante α , detta di struttura fine perché parametrizza le correzioni relativistiche ai livelli dell'idrogeno, in unità naturali si scrive $\alpha = e^2/(4\pi)$. Di conseguenza si ha $\epsilon_0 = 1$, e siccome $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-\frac{1}{2}}$, anche $\mu_0 = 1$. Le equazioni di Maxwell quindi assumono una forma particolarmente semplice:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad \nabla \wedge \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (17)$$

Essendo α adimensionale, anche la carica dell'elettrone lo è: $e = \sqrt{\frac{4\pi}{137}}$.

2.2 Trasformazioni di Lorentz

Una trasformazione di Lorentz lungo l'asse delle x è definita da (v è la velocità relativa dei sistemi di riferimento):

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(x - vt) \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(t - vx) \quad y' = y \quad z' = z \quad (18)$$

ed è tale che $t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Più in generale, definito un quadrivettore (x_0, x_1, x_2, x_3) , le trasformazioni di Lorentz sono tutte quelle che lasciano invariante la norma $x^2 \equiv x_0^2 - \mathbf{x}^2 = x^t g x$, avendo definito la matrice diagonale (tensore metrico) $g = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)$. Le trasformazioni di Lorentz sono lineari a coefficienti reali, e sono quindi definite da matrici 4x4 reali Λ che formano un gruppo; la richiesta di invarianza della norma $x'^t g x' = x^t g x$ con $x' = \Lambda x$ si traduce in $\Lambda^t g \Lambda = g$. Il gruppo di Lorentz si indica anche con $\text{SO}(3,1)$ per differenziarlo da $\text{SO}(4)$ per il quale $g = 1$. Ad esempio le usuali rotazioni spaziali $x'_0 = x_0, \mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}$ con $\mathbf{R}^t \mathbf{R} = 1$ appartengono ovviamente al gruppo di Lorentz, così come la (18) e le sue generalizzazioni lungo altre direzioni. La notazione che si usa però è diversa da quella qui utilizzata. Si scrivono esplicitamente gli indici: $x^2 = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$ e si introducono gli indici in basso $x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu$ di modo che $x^2 = x^\mu x_\mu$. Con questa notazione, le matrici Λ sono tali che:

$$x^2 = x'^2 \Rightarrow x_\alpha g^{\alpha\beta} x_\beta = g^{\mu\nu} \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta x_\alpha x_\beta \quad \forall x \Rightarrow g^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \quad (19)$$

Un tensore a n indici si trasforma come $T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \Lambda_{i_1}^{j_1} \Lambda_{i_2}^{j_2} \dots \Lambda_{i_n}^{j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n}$. Per la (19) quindi, le matrici Λ devono lasciare invariato il tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Il tensore metrico si può utilizzare per abbassare il rango di un tensore, cioè se $T_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ha rango n (cioè trasforma con n matrici Λ), allora $T^{i_2}_{i_2 i_3 \dots i_n} \equiv g^{i_1 i_2} T_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ha rango $n - 2$ (Esercizio: dimostrarlo).

Notare che i quadrivettori con indici in basso trasformano in maniera diversa da quelli con indici in alto. Dalle definizioni sopra è infatti facile vedere che $x_\mu \rightarrow \Lambda_\mu^\nu x_\nu \Rightarrow x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ con $\Lambda^\mu_\nu = g^{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \Lambda_\alpha^\beta$. Le matrici Λ^μ_ν e Λ_μ^ν non sono uguali: $\Lambda_i^j = \Lambda^j_i$ ma $\Lambda_0^i = -\Lambda^i_0$. In concreto, se prendiamo ad esempio la (18) si ha ($\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$):

$$x_1 \rightarrow \gamma(x_1 - vx_0), x_0 \rightarrow \gamma(x_0 - vx_1) \Rightarrow x^1 \rightarrow \gamma(x^1 + vx^0), x^0 \rightarrow \gamma(x^0 + vx^1) \\ x_0 x^0 + x_1 x^1 \rightarrow x_0 x^0 + x_1 x^1$$

La trasformazione inversa si trova riscrivendo la (19) come $g^\alpha_\beta = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda_\mu^\beta$ per cui $x'^\mu = \Lambda^\mu_\alpha x^\alpha$ implica $x'^\mu \Lambda_\mu^\nu = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda_\mu^\nu x^\alpha = x^\nu$. La derivata $\frac{\partial}{\partial x'^\mu} \equiv \partial_\mu$ trasforma con gli indici in basso in quanto:

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Lambda_\mu^\alpha$$

Lo studio dettagliato delle trasformazioni infinitesime (vedi ad esempio [1]) permette di concludere che:

- una trasformazione infinitesima di Lorentz è data da $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \epsilon^\mu_\nu$, dove $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$ è una matrice infinitesima antisimmetrica e $\delta^\mu_\nu = g^{\mu\alpha}g_{\alpha\nu} = \text{Diag}(1,1,1,1)$.
- una trasformazione finita è data da $\Lambda = \exp[i(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{J} - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K})]$ con $\mathbf{J}_i, i = 1, 2, 3$ matrici 4x4 antisimmetriche che descrivono le rotazioni, e $\mathbf{K}_i, i = 1, 2, 3$ matrici 4x4 simmetriche che descrivono i boost.

Anche se le matrici \mathbf{K}, \mathbf{J} hanno una chiara interpretazione fisica, per discutere le rappresentazioni del gruppo di Lorentz è conveniente definire le matrici $\mathbf{J}^\pm = \frac{\mathbf{J} \pm i\mathbf{K}}{2}$, in termini delle quali $\Lambda = \exp[i(\mathbf{J}_+ \boldsymbol{\theta}_+ + \mathbf{J}_- \boldsymbol{\theta}_-)]$ dove $\boldsymbol{\theta}_+ = \boldsymbol{\alpha} - i\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_- = \boldsymbol{\theta}_+^* = \boldsymbol{\alpha} + i\boldsymbol{\beta}$. Gli operatori \mathbf{J}_\pm soddisfano l'algebra di SU(2) commutando fra loro, cioè $[J_i^-, J_j^-] = i\epsilon_{ijk}J_k^-, [J_i^+, J_j^+] = i\epsilon_{ijk}J_k^+, [J_i^+, J_j^-] = 0$. Il gruppo di Lorentz è quindi isomorfo a $\text{SU}(2) \otimes \text{SU}(2)$.

Allo stato attuale delle conoscenze, le interazioni fondamentali sono invarianti sotto il gruppo di trasformazioni $x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu + a_\mu$ con a_μ quadrivettore costante; queste trasformazioni costituiscono il gruppo di Poincarè. Le particelle elementari sono “rappresentazioni irriducibili del gruppo di Poincarè”, costituito da trasformazioni di Lorentz (Λ) e traslazioni (a). In altre parole, esattamente come in Meccanica quantistica, gli autostati sono classificabili come rappresentazioni irriducibili del gruppo di simmetria dell'hamiltoniana: vedi ad esempio il momento angolare per l'atomo di idrogeno. Rimandando a [2] per una descrizione dettagliata delle rappresentazioni, mi limito a dire alcune caratteristiche fondamentali:

- Le particelle sono classificate con un indice continuo p , l'impulso, e con un indice discreto di spin s . L'invarianza per traslazione ha come conseguenza che la dipendenza spaziotemporale per una particella libera è quella di onda piana $\sim e^{-ipx}$.
- L'indice di spin assume valori $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. Una particella massiva ha, come ci si aspetterebbe, $2s + 1$ gradi di libertà. Tuttavia una particella di massa nulla ha due soli gradi di libertà qualunque sia il valore di $s \geq \frac{1}{2}$; questi gradi di libertà sono detti elicità.

In questo corso tratteremo solo particelle di spin 0 (scalari), spin $\frac{1}{2}$ (fermioni), spin 1 (bosoni vettori), le cui funzioni d'onda, a meno di una costante di normalizzazione, sono:

$$\text{scalare } e^{-ipk} \quad \text{fermione } u_\alpha(p)e^{-ipx} \quad \alpha = 1, 2 \quad \text{vettore } \epsilon_\mu(p)e^{-ipx} \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (20)$$

con le seguenti proprietà sotto trasformazioni di Lorentz:

$$u_\delta \rightarrow M_{\delta\gamma}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) u_\gamma \quad \epsilon_\mu \rightarrow \Lambda_\mu^\nu(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \epsilon_\nu \quad (21)$$

Le trasformazioni di Lorentz sono descritte dall'operatore $\Lambda = \exp[i(\mathbf{J}_+ \boldsymbol{\theta}_+ + \mathbf{J}_- \boldsymbol{\theta}_-)]$ dove gli operatori \mathbf{J}_\pm soddisfano l'algebra di SU(2) commutando fra loro, e inoltre $\boldsymbol{\theta}_+ = \boldsymbol{\alpha} - i\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_- = \boldsymbol{\theta}_+^* = \boldsymbol{\alpha} + i\boldsymbol{\beta}$; i parametri $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$, reali, descrivono rispettivamente le rotazioni e i boost*. Il gruppo è quindi

* $\boldsymbol{\alpha}$ definisce la rotazione nel modo usuale, $\boldsymbol{\beta}$ definisce direzione e modulo della velocità del sistema di riferimento trasformato

isomorfo a $SU(2) \otimes SU(2)$ e la rappresentazione fondamentale è descritta da spinori di Weyl a due componenti $\psi_L = (\frac{1}{2}, 0)$ e $\psi_R = (0, \frac{1}{2})$ che trasformano come:

$$\psi_L \rightarrow e^{i\frac{\sigma}{2}\alpha + \frac{\sigma}{2}\beta} \psi_L \quad \psi_R \rightarrow e^{i\frac{\sigma}{2}\alpha - \frac{\sigma}{2}\beta} \psi_R \quad (22)$$

Chiamando $M = e^{i\frac{\sigma}{2}\alpha + \frac{\sigma}{2}\beta}$ si ha $\psi_L \rightarrow M\psi_L, \psi_R \rightarrow M^{-1\dagger}\psi_R$. Gli spinori che trasformano come sopra sono detti avere "chiralità di tipo left" e "chiralità di tipo right". La chiralità è una proprietà comune in Natura, e riguarda le proprietà sotto trasformazioni di parità, $\mathbf{x} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\mathbf{x}$. Ad esempio la mano sinistra, quando vista allo specchio, non rimane mano sinistra ma assume le proprietà della mano destra. Così per una vite (sono tutte uguali per standard e rompono la simmetria di parità), alcune molecole e certi tipi di conchiglie. Fra l'altro, molte proteine sono più comuni in Natura nella chiralità left che in quella right, rompendo quindi la simmetria di parità; non mi risulta che sia noto il motivo. Anche le interazioni fondamentali rompono la parità, trattando in maniera diversa le due chiralità; si tratta di un effetto legato alle interazioni deboli che non vengono trattate in queste dispense. Dimostriamo ora che effettivamente la parità manda uno spinore di tipo left in uno di tipo right. Sotto trasformazioni di Lorentz:

$$\mathcal{P}\psi_L \rightarrow \mathcal{P}e^{i\frac{\sigma}{2}\alpha + \frac{\sigma}{2}\beta}\mathcal{P}^{-1}\psi_L = e^{i\frac{\sigma}{2}\alpha - \frac{\sigma}{2}\beta}\mathcal{P}\psi_L \quad (23)$$

in quanto sotto parità $\beta \rightarrow -\beta, \alpha \rightarrow \alpha$. In effetti $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}, \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$ e quindi $\beta \sim d\mathbf{x}/dt$ va in meno se stesso, e α va in se stesso perchè $\delta\mathbf{x} \approx \alpha \wedge \mathbf{x} \Rightarrow \delta(-\mathbf{x}) \approx \alpha \wedge (-\mathbf{x})$; ci si può rendere conto di questo anche ragionando su come cambia geometricamente $-\mathbf{x}$ per una rotazione finita. α viene detto pseudovettore a causa del cambio di segno sotto parità.

Il coniugato di carica di uno spinore di Weyl si trasforma con chiralità opposta, introducendo il tensore metrico reale antisimmetrico $\varepsilon \equiv i\sigma_2, \varepsilon^2 = -1$. Infatti, utilizzando $\sigma_2\sigma_i^*\sigma_2 = -\sigma_i$:

$$\psi_L \rightarrow e^{i\frac{\sigma}{2}\alpha + \frac{\sigma}{2}\beta} \psi_L \Rightarrow \psi_L^c \equiv i\sigma_2\psi_L^* \rightarrow i\sigma_2e^{-i\frac{\sigma}{2}\alpha + \frac{\sigma}{2}\beta}(-i\sigma_2)(i\sigma_2)\psi_L^* = e^{i\frac{\sigma}{2}\alpha - \frac{\sigma}{2}\beta} \psi_L^c \quad (24)$$

Notare che se M è una matrice di $SU(2)$, $M = e^{i\frac{\sigma}{2}}$, ψ ψ^c trasformano nella stessa maniera; questa proprietà è importante nella costruzione del settore elettrodebole del Modello Standard. Gli scalari di Lorentz si possono scrivere usando due spinori di tipo left secondo la decomposizione $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (\frac{1}{2}, 0) = (0, 0) + (1, 0)$ oppure in maniera analoga con due spinori tipo right. La combinazione giusta è $\psi_L\varepsilon\psi_L, \psi_R\varepsilon\psi_R$. Infatti la relazione fra le matrici di Pauli si può anche scrivere $\sigma_i^t\sigma_2 = -\sigma_2\sigma_i$ da cui

$$\psi_L^t\sigma_2\psi_L \rightarrow \psi_L^te^{i\frac{\sigma}{2}\alpha + \frac{\sigma}{2}\beta}\sigma_2e^{i\frac{\sigma}{2}\alpha + \frac{\sigma}{2}\beta}\psi_L = \psi_L^t\sigma_2e^{-i\frac{\sigma}{2}\alpha - \frac{\sigma}{2}\beta}e^{i\frac{\sigma}{2}\alpha + \frac{\sigma}{2}\beta}\psi_L = \psi_L^t\sigma_2\psi_L \quad (25)$$

Siccome poi abbiamo visto che $i\sigma_2\psi_L^* = \psi_R$ trasforma come uno spinore right, possiamo scrivere gli scalari anche come $i\psi_L^t\sigma_2\psi_L = (i\sigma_2\psi_L^*)^\dagger\sigma_2\psi_L = \psi_R^\dagger\psi_L$ e $\psi_L^\dagger\psi_R$.

Per vedere esplicitamente la relazione fra il gruppo di Lorentz e $SU(2) \otimes SU(2)$, ricordiamo che i trivettori spaziali A_a trasformano sotto rotazioni come

$$A'_a\sigma_a = UA_a\sigma_aU^\dagger \quad U = e^{i\frac{\sigma}{2}\alpha} \Rightarrow A'_aA'_a = \text{Tr}\{A'_a\sigma_aA'_b\sigma_b\} = \text{Tr}\{UA_a\sigma_aU^\dagger UA_b\sigma_bU^\dagger\} = A_aA_a \quad (26)$$

Si può verificare direttamente con l'algebra delle matrici di Pauli che effettivamente $A'_a = (\mathcal{R}A)_a$ con \mathcal{R} matrice ortogonale che descrive la rotazione di parametri α . Siccome $\psi^\dagger\sigma_aA_a\psi$ è invariante se

$\psi \rightarrow U\psi$, $\psi^\dagger \sigma_a \psi$ deve trasformarsi come un vettore. D'altra parte questo è implicito nella (26) che si può scrivere

$$UA_a\sigma_aU^\dagger = (\mathcal{R}A)_a\sigma_a = \mathcal{R}_{ab}A_b\sigma_a = A_a(\mathcal{R}^{-1}\sigma)_a \Rightarrow U\sigma_aU^\dagger = (\mathcal{R}^{-1}\sigma)_a \quad (27)$$

avendo usato $\mathcal{R}^t = \mathcal{R}^{-1}$.

Nel caso dei quadrivettori, la metrica complica le cose. Sembra logico estendere la (26) a*:

$$A'^\mu\sigma_\mu = MA^\mu\sigma_\mu M^\dagger \quad \sigma_\mu = (1, \sigma_i) \quad M = \exp[i\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\beta}] \quad (28)$$

Però occorre fare attenzione perchè $M^{-1} \neq M^\dagger$ e perchè $\text{Tr}\{\sigma_\mu\sigma_\nu\} \neq g_{\mu\nu}$; occorre definire $\bar{\sigma} = (1, -\sigma_i)$ di modo che $\text{Tr}\{\sigma_\mu\bar{\sigma}_\nu\} = g_{\mu\nu}$. Se $A'^\mu\sigma_\mu = MA^\mu\sigma_\mu M^\dagger$ equivale a $A'^\mu\bar{\sigma}_\mu = M^{-1\dagger}A^\mu\bar{\sigma}_\mu M^{-1}$ siamo a posto in quanto avrei

$$A'_\mu A'^\mu = \text{Tr}\{(A'\sigma)(A'\bar{\sigma})\} = \text{Tr}\{M(A\sigma)M^\dagger M^{\dagger-1}(A\bar{\sigma})M^{-1}\} = \text{Tr}\{(A\sigma)(A\bar{\sigma})\} = A_\mu A^\mu \quad (29)$$

In effetti questo è il caso, in quanto $\sigma_2\sigma_i^t\sigma_2\sigma_2 = \sigma_2\sigma_i^*\sigma_2\sigma_2 = -\sigma_i$ cioè $\sigma_2\sigma_\mu^*\sigma_2 = \bar{\sigma}_\mu$ per cui:

$$\begin{aligned} M(A\sigma)M^\dagger &= (A'\sigma) \Rightarrow M^*(A\sigma^*)M^t = (A'\sigma^*) \Rightarrow \\ \sigma_2 M^* \sigma_2 (A\sigma_2 \sigma^* \sigma_2) \sigma_2 M^t \sigma_2 &= (A'\sigma_2 \sigma^* \sigma_2) \Rightarrow A'^\mu \bar{\sigma}_\mu = M^{-1\dagger} A^\mu \sigma_\mu M^{-1} \end{aligned}$$

Infine, $\psi_L^\dagger (A^\mu \bar{\sigma}_\mu) \psi_L$ con $\psi_L \rightarrow M\psi_L$ e $\psi_R^\dagger (A^\mu \sigma_\mu) \psi_R$ con $\psi_R \rightarrow M^{-1\dagger} \psi_R$ sono invarianti, per cui $\psi_L^\dagger \bar{\sigma}_\mu \psi_L, \psi_R^\dagger \sigma_\mu \psi_R$ trasformano come quadrivettori. Infatti, ad esempio:

$$\psi_L^\dagger (A'^\mu \bar{\sigma}_\mu) \psi_L' = \psi_L^\dagger M^\dagger (M^{-1\dagger} A^\mu \bar{\sigma}_\mu M^{-1}) M \psi_L = \psi_L^\dagger (A^\mu \bar{\sigma}_\mu) \psi_L$$

e analogamente per ψ_R .

2.3 Teoria dei campi classica

E' utile ricordare il teorema della divergenza in R^n . Dato un campo vettoriale \mathbf{K} con n componenti, si ha:

$$\int_{\Omega} (\partial_i K_i) dV = \oint_{\partial\Omega} (K_i n_i) dS$$

Questo teorema comprende praticamente tutti i teoremi sugli integrali: ad esempio il teorema fondamentale del calcolo integrale (banale, $K = \frac{df}{dx}$), il teorema di Stokes (altamente non banale, $K_i = \epsilon_{ijk} f_j n_k$ dove \mathbf{n} è il versore ortogonale alla superficie) eccetera.

La meccanica classica si può formalizzare tramite il principio di azione:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt \quad \delta S_{\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0} = 0$$

dove si immagina di fare una variazione delle coordinate δq con le q costanti ai bordi, cioè in questo caso a $t = t_1$ e $t = t_2$. Dal principio variazionale si ottiene:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 \quad (30)$$

*notare che $\sigma_\mu = \sigma_\mu^\dagger$ per cui $A'^\mu \sigma_\mu = MA^\mu \sigma_\mu M^{-1}$ non andrebbe bene in quanto $M^{-1} \neq M^\dagger$

che, data l'arbitrarietà delle funzioni $\delta q(t)$, implica le equazioni del moto $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$. Nella (30) ci sono due passaggi che meritano un'approfondimento. Il primo è relativo alla "commutazione" $\delta d_t q = d_t \delta q$. Ci possiamo convincere della correttezza discretizzando il tempo su intervalli t_i separati da Δt . Allora $\delta \dot{q}_i = \delta \left(\frac{q_{i+1} - q_i}{\Delta t} \right) = \frac{\delta q_{i+1} - \delta q_i}{\Delta t} = d_t \delta q_i$. Nel passaggio dal secondo a terzo membro della (30) inoltre si è fatto un integrale per parti omettendo il termine di superficie. Il motivo è che quest'ultimo risulta della forma $[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q]_{t_1}^{t_2}$ e si ha $\delta q = 0$ a t_1 e a t_2 . Analogamente se aggiungo alla Lagrangiana la derivata rispetto al tempo di una qualunque funzione di q , le equazioni del moto non cambiano perchè l'azione viene modificata da un termine di superficie che è costante rispetto alle variazioni δq . L'Hamiltoniana si ottiene come $H = p\dot{q} - L$ con $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

La teoria dei campi si sviluppa a partire dalle equazioni di Maxwell fino ad includere modernamente, non solo il campo elettromagnetico e le altre interazioni fondamentali nucleare debole e forte, ma anche la materia che viene descritta da campi di spin 1/2. In teoria dei campi (per ora ci limitiamo a quella classica, poi vediamo la quantistica) la lagrangiana è ottenuta a partire dalla densità di Lagrangiana: $L = \int d^3x \mathcal{L}$. Inoltre i gradi di libertà non sono le q, \dot{q} ma i campi, funzioni della coordinata $x = (t, \mathbf{x})$ e delle loro derivate: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))^*$. Corrispondentemente, si definisce il principio di azione:

$$S = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad \delta S = 0 \text{ con } \delta \phi(x) = 0 \text{ per } x \subset \partial \Omega \quad (31)$$

In maniera analoga a quanto visto per la usuale Lagrangiana, si ricavano le equazioni del moto:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad (32)$$

La corrispondente Hamiltoniana (poco usata in teoria dei campi, visto che \mathcal{L} è invariante di Lorentz ma \mathcal{H} no) si ottiene nel modo usuale, definendo il momento canonico e facendo la trasformata di Legendre:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} \quad \mathcal{H} = \pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L} \quad (33)$$

Cerchiamo ora di capire come si esprime una simmetria (o invarianza) nel formalismo Lagrangiano. Supponiamo di definire una trasformazione nelle coordinate e nei campi $x \rightarrow x', \phi(x) \rightarrow \phi'(x')$. Possiamo scrivere:

$$S = \int \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) d^4x = \int \mathcal{L}'(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x')) d^4x' \stackrel{INV}{=} \int \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x')) d^4x' \quad (34)$$

In questa equazione la prima uguaglianza è semplicemente la definizione di cambiamento di coordinate e campi, e quindi è sempre vera. In pratica \mathcal{L}' si ottiene tramite la sostituzione dei "vecchi" campi in funzione dei "nuovi" campi nella Lagrangiana: $\mathcal{L}'(\phi', x') = \mathcal{L}(\phi(\phi'), x(x'))$. La seconda uguaglianza invece stabilisce la simmetria: la Lagrangiana che definisce l'azione nei "nuovi" campi ha la stessa forma di quella di partenza, e quindi ad esempio le equazioni del moto sono le stesse. Il teorema di Noether assicura che ad ogni simmetria continua corrisponde una corrente conservata. Per "simmetria continua" intendo una trasformazione infinitesima sui campi:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta \phi(x) \quad \alpha \text{ parametro continuo infinitesimo} \quad (35)$$

*In casi più generale ci possono essere derivate di ordine superiore, dipendenza esplicita da x ecc., ma le teorie fisiche rientrano in questa definizione.

che lascia inalterate le equazioni del moto, ovvero l'azione; la Lagrangiana deve essere quindi invariante a meno di una quadri divergenza:

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \alpha \partial_\mu K^\mu; \quad j_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \Delta \phi - K^\mu \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (36)$$

Difatti si ha:

$$\Delta \mathcal{L} = \alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \Delta \phi + \alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \Delta \phi = \alpha \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \Delta \phi \right] = \alpha \partial_\mu K^\mu$$

avendo utilizzato le equazioni del moto.

L'esistenza di una corrente conservata, $\partial_\mu J^\mu = 0$ implica anche una carica conservata, $Q = \int d^3x J_0$. Difatti per il teorema della divergenza:

$$\frac{d}{dt} \int d^3x J_0(\mathbf{x}, t) = - \frac{d}{dt} \int d^3x \partial_i J^i = - \frac{d}{dt} \int dS (\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (37)$$

avendo assunto che, nel limite di volume di integrazione infinito, il flusso coinvolga regioni dello spazio in cui i campi vanno a 0.

2.4 Equazioni del moto per particelle libere

2.4.1 Particelle scalari: l'equazione di Klein-Gordon

La relazione fra energia e impulso per una particella relativistica di massa m è data da $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. In altre parole, $p = (E, \mathbf{p})$ si trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz come un quadrivettore di norma invariante $p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 \equiv m^2$. Se vogliamo implementare questa relazione come una equazione per la funzione d'onda di uno scalare $\phi(x)$, ricordandosi che in Meccanica Quantistica $\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla$, $E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$, otteniamo l'equazione di Klein-Gordon:

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = m^2 \phi \Rightarrow (\square + m^2)\phi = 0 \quad \square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (38)$$

Le soluzioni dell'equazione di Klein-Gordon sono onde piane, cioè funzioni del tipo $\phi = e^{-ipx}$ con $p^2 - m^2 = 0$ cioè $p_0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ e \mathbf{p} qualsiasi. Per convenzione le soluzioni ad energia negativa, cioè quelle con $p_0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ che sono del tipo $\exp i(+\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}x_0 + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})$ vengono associate all'impulso $-\mathbf{p}$ anziché \mathbf{p} e diventano $\exp i(+\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}x_0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}) = \exp ipx$ con $p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$.

Una generica soluzione di questa equazione omogenea è combinazione lineare delle soluzioni appena discusse, per cui:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2p_0}} \left[a(\mathbf{p}) e^{-ipx} + a^*(\mathbf{p}) e^{ipx} \right] \quad \text{con } p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \quad (39)$$

dove $a(\mathbf{p})$ è una generica funzione. Alcuni commenti:

- Nell'equazione compare a^* come coefficiente delle soluzioni ad energia negativa, e non una generica funzione di \mathbf{p} : questo è dovuto al fatto che al momento stiamo considerando ϕ come funzione reale;
- Lo strano fattore $1/[(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2p_0}]$ è convenzionale e semplifica alcune manipolazioni algebriche, come vedremo descrivendo i campi quantizzati;

- Avrei potuto ottenere la stessa soluzione (39) utilizzando la trasformata di Fourier $\phi(p) = \int d^4x e^{-ipx}$ in termini della quale

$$(p^2 - m^2)\phi(p) = 0 \Rightarrow \phi(p) = a(p)\delta(p^2 - m^2) \Rightarrow \\ \phi(x) = \int d^4p a(p)\delta(p^2 - m^2)e^{-ipx} = \int \frac{d^3p}{p_0} a(\mathbf{p})e^{-ipx} + c.c.$$

dove c.c. sta per complesso coniugato, e che coincide con la (39) a meno della (arbitraria) normalizzazione.

Infine, la Lagrangiana da cui si ricava l'equazione di KG è $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2$; verificiamo che è invariante di Lorentz. Una trasformazione di Lorentz è $x \rightarrow x' = \Lambda x$ mentre, essendo ϕ uno scalare, si ha $\phi'(x') = \phi(x)$. Per trovare la Lagrangiana nelle variabili primarie, sostituisco $\mathcal{L}'(\phi'(x')) = \mathcal{L}(\phi(x))$ e devo trovare $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$. Il termine di massa è ovviamente invariante in quanto $[\phi(x)]^2 = [\phi'(x')]^2$; per il termine cinetico abbiamo, usando la chain rule delle derivate, $\partial_\mu\phi(x) = \partial_\mu\phi'(x') = \Lambda_\mu^\nu\partial'_\nu\phi'(x')$, cioè la derivata si comporta come un vettore come ci si aspetta. Quindi anche per il termine cinetico $\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) = \partial'_\mu\phi'(x')\partial'^\mu\phi'(x')$ e la Lagrangiana è invariante in forma.

Passiamo ora ad un campo di KG complesso; come vedremo, la principale differenza è che si può definire una carica. Il campo di KG complesso descrive quindi una particella scalare carica. La Lagrangiana e le equazioni del moto, che si ottengono trattando $\text{Re}(\phi)$ e $\text{Im}(\phi)$ come indipendenti oppure ϕ e ϕ^* come indipendenti, sono:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi \Rightarrow (\square + m^2)\phi = (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = 0 \quad (\square + m^2)\phi^* = 0 \quad (40)$$

La nuova feature è la simmetria U(1) della Lagrangiana $\phi \rightarrow e^{iq\theta}\phi, \phi^* \rightarrow e^{-iq\theta}\phi^*$ alla quale corrispondono corrente di Noether e carica conservate:

$$j_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*}\delta\phi^* = -iq(\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi) \text{ con } \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi \equiv \phi^*\partial_\mu\phi - (\partial_\mu\phi^*)\phi \quad (41)$$

Dopo quantizzazione, q verrà interpretata come la carica della particella descritta da ϕ .

2.4.2 Il campo di spin 1/2: equazioni di Weyl e di Dirac

Come abbiamo visto nel par. 2.2, a partire dagli spinori left e right possiamo costruire scalari e vettori di Lorentz; a partire da questi building blocks costruiamo le possibili Lagrangiane che descrivono oggetti di spin 1/2. Ad esempio, $\psi_L^\dagger \bar{\sigma}_m u \psi_L$ è un vettore, a partire dal quale possiamo costruire un termine cinetico saturando con ∂^μ che pure si comporta come vettore*. Si ottiene quindi:

$$\mathcal{L}_{Weyl} = i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}_\mu \partial^\mu \psi_L$$

dove il fattore i è stato introdotto per rendere la Lagrangiana hermitiana. Le equazioni del moto, variando la Lagrangiana rispetto a ψ_L^\dagger , producono le equazioni del moto:

$$\bar{\sigma}_\mu \partial^\mu \psi_L = (\partial^0 - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nabla})\psi_L = 0 \Rightarrow \square\psi_L = 0 \quad (42)$$

*Il termine cinetico in una Lagrangiana è quello che contiene le derivate temporali e spaziali (impulsi), e detta la variazione spaziotemporale dei campi, vedi ad es. equazione di D'alembert.

che è detta equazione di Weyl. La seconda equazione nella (42) è stata ottenuta derivando l'equazione di Weyl rispetto al tempo e utilizzando le proprietà delle matrici di Pauli (Esercizio: dimostrarlo). Derivando questa equazione, e in trasformata di Fourier $\psi_L(x) = u_L e^{-ipx}$ danno $(p^0 + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})u_L = 0$ cioè, tenuto conto che $\square\psi_L = 0$ comporta $p^0 = |\mathbf{p}|$:

$$\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{p}} u_L = -\frac{1}{2} u_L \Rightarrow u_L = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos\theta)}} \begin{pmatrix} -\sin\theta e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ (1 + \cos\theta) e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \text{ dove } \hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad (43)$$

dove l'operatore di spin 1/2 è dato da $\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma}/2$. (Esercizio: dimostrare che effettivamente $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{p}} u_L = -\frac{1}{2} u_L$ è risolto dalla u_L data nella (43)). L'elicità di un fermione di Weyl dunque, cioè la proiezione dello spin lungo l'asse dell'impulso, è -1/2. Come vedremo, nel caso di fermioni massivi cioè di Dirac, elicità e chiralità non coincidono cioè gli autostati di elicità sono combinazione lineari di stati con chiralità definita.

I fermioni di Weyl, allo stato attuale delle conoscenze, non esistono in Natura. Tuttavia i neutrini hanno massa piccolissima e in molte situazioni fisiche si può trascurare la loro massa; in tal caso possono essere descritti dall'equazione di Weyl.

L'equazione di Weyl viola la simmetria di Parità, cioè la trasformazione $\mathbf{x} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\mathbf{x}$. Difatti la parità trasforma un vettore di tipo left in uno di tipo right (vedi 23) e $\partial_i \rightarrow -\partial_i$; di conseguenza $\psi_L^\dagger \bar{\sigma}_\mu \partial^\mu \psi_L \xrightarrow{\mathcal{P}} \psi_R^\dagger \sigma_\mu \partial^\mu \psi_R$. Tuttavia la parità è una buona simmetria in natura: le violazioni sono piccolissimi, dovute alle interazioni deboli. Ad ogni modo in questo corso trattiamo le interazioni elettromagnetiche, che sono simmetriche per parità. Mettiamo ora insieme gli elementi per costruire un'equazione invariante per Lorentz e parità che descrive i fermioni massivi. La Lagrangiana che ne risulta è la Lagrangiana di Dirac:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = i(\psi_L^\dagger \bar{\sigma}_\mu \partial^\mu \psi_L + \psi_R^\dagger \sigma_\mu \partial^\mu \psi_R) - m(\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L)$$

Non ci sarebbe nulla di male a continuare con questa notazione, ma lo standard è diverso: si usano spinori a 4 componenti ottenuti mettendo insieme parte left e right: $\psi^t = (\psi_L^t, \psi_R^t)$ e si introducono le matrici di Dirac:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \text{ con } \sigma^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma}); \text{ inoltre } \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

Le matrici di Dirac soddisfano l'algebra:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad (45)$$

In questa notazione la Lagrangiana di Dirac si scrive, definendo $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\partial - m)\psi \text{ dove } \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 \quad \partial \equiv \partial_\mu \gamma^\mu$$

L'equazione del moto che si ottiene da questa Lagrangiana variando rispetto a $\bar{\psi}$ è $(i\partial - m)\psi = 0$. Variando rispetto a ψ si ottiene l'equazione apparentemente diversa $-i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0$. Tuttavia, facendo l'hermitiano coniugato di questa equazione e moltiplicando a sinistra per la matrice non-singolare γ^0 si ottiene $i\gamma_0 \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 \partial^\mu \psi - m\psi = 0$, e siccome $\gamma_0 \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 = \gamma_\mu$ (Esercizio: verificarlo), si

ottiene di nuovo $(i\hat{p} - m)\psi = 0$. Questa è l'equazione che descrive l'elettrone, dovuta a Dirac, ed è composta da due equazioni accoppiate che coinvolgono ψ_L e ψ_R . Le soluzioni, sempre in notazione quadrispinoriale, sono date da:

$$\psi_\alpha(x) = \int d^4p e^{-ipx} \psi_\alpha(p); \quad (\not{p} - m)\psi(p) = 0 \Rightarrow \psi(p) = u(p)\delta(p^2 - m^2) \text{ dove } (\not{p} - m)u(p) = 0$$

le soluzioni hanno la forma $\psi(x) \sim e^{-ipx}u(p)$ dove $u(p)$ è un quadrispinore che soddisfa $(\not{p} - m)u(p) = 0$ e $p_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Si preferisce per convenzione scrivere le soluzioni con energia negativa come $\psi(x) = e^{ipx}v(p)$, $(\not{p} + m)v(p) = 0$, $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Vediamo per prime le soluzioni ad energia positiva. si ha $\psi(x) = \int d^4p e^{-ipx}u(p)$ dove $u(p)$ è un quadrispinore che soddisfa $(\not{p} - m)u(p) = 0$. Scrivendo $u(p)$ in termini di due bispinori (o spinori di Weyl) si ottiene:

$$u = \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix} \quad \begin{cases} (p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})u_R - mu_L = 0 \\ (p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})u_L - mu_R = 0 \end{cases} \quad (46)$$

che ha soluzione:

$$\begin{cases} p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 = 0 \\ u_R = \frac{p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}}{m} u_L \end{cases} \quad (47)$$

Possiamo verificare la covarianza dell'equazione di Dirac supponendo che u_L trasformi come ψ_L , $u_L \rightarrow u'_L = Mu_L$ con $M = \exp[i\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\sigma}]$ e u_R trasformi come ψ_R , $u_R \rightarrow u'_R = M^{\dagger-1}u_R$. L'equazione di Dirac diventa:

$$M^\dagger u'_R = \frac{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}{m} M^{-1} u'_L \Rightarrow u'_R = M^{\dagger-1} \frac{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}{m} M^{-1} u'_L \Rightarrow u'_R = \frac{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}{m} u'_L$$

La (47) ammette due soluzioni per i due possibili spin. Conviene scegliere l'asse di quantizzazione dello spin lungo l'impulso, cioè scegliere la base $\mathbf{S}\hat{\mathbf{p}}\eta_\pm = \pm\frac{1}{2}\eta_\pm$, $\mathbf{S} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$. Esplicitamente si ha:

$$\hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \sin\phi \cos\theta \\ \sin\phi \sin\theta \\ \cos\phi \end{pmatrix} \Rightarrow \eta_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} \sqrt{1 + \cos\phi} \\ e^{i\frac{\theta}{2}} \sqrt{1 - \cos\phi} \end{pmatrix} \quad \eta_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -e^{-i\frac{\theta}{2}} \sqrt{1 - \cos\phi} \\ e^{i\frac{\theta}{2}} \sqrt{1 + \cos\phi} \end{pmatrix}$$

Per convenzione si normalizza a $u_r^\dagger u_s = 2p_0 \delta_{rs}$, $\bar{u}_r u_s = 2m \delta_{rs}$. Con questa normalizzazione:

$$u_+ = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|} \eta_+ \\ \sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|} \eta_+ \end{pmatrix}, \quad u_- = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|} \eta_- \\ \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|} \eta_- \end{pmatrix}; \quad u_\pm = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 - \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}} \eta_\pm \\ \sqrt{p_0 + \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}} \eta_\pm \end{pmatrix}, \quad (48)$$

dove ho tenuto conto che $\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}\eta_\pm = \pm|\mathbf{p}|\eta_\pm$ e che $m = \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|}\sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|}$. Poiché $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \eta_+\eta_+^\dagger - \eta_-\eta_-^\dagger$, $1 = \eta_+\eta_+^\dagger + \eta_-\eta_-^\dagger$, definisco:

$$P_\pm = \eta_\pm \eta_\pm^\dagger = \frac{1}{2}(1 \pm \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}) \quad P_+ \eta_+ = u_+, P_+ \eta_- = 0 \quad [P_\pm, p] = [P_\pm, \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}] = 0$$

*Storicamente, Dirac fu il primo a notare che la richiesta di invarianza relativistica comporta l'esistenza di soluzioni ad energia negativa. Nel 1930 interpretò (correttamente) le soluzioni ad energia negativa come descriventi l'antimateria. L'antiparticella dell'elettrone da lui predetta, il positrone, venne scoperta nei raggi cosmici da Anderson nel 1932.

Si ha allora

$$u_+ \bar{u}_+ = \begin{pmatrix} m\eta_+ \eta_+^\dagger & (p_0 - |\mathbf{p}|)\eta_+ \eta_+^\dagger \\ (p_0 + |\mathbf{p}|)\eta_+ \eta_+^\dagger & m\eta_+ \eta_+^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} \\ p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix} \\ = (\not{p} + m)P_+ = P_+(\not{p} + m)$$

Analogamente $u_- \bar{u}_- = (\not{p} + m)P_-$ per cui si ha $\sum_r u_r \bar{u}_r = (\not{p} + m)$ Questa identità riveste particolare importanza per il calcolo delle sezioni d'urto, come vedremo. Un caso particolare si ha se $m=0$, $p_0 = \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}$:

$$u_+ \bar{u}_+ = \begin{pmatrix} 0 & p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} \\ p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} \\ p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = \not{p}P_L = P_R \not{p} \quad ; \quad u_- \bar{u}_- = \not{p}P_R = P_L \not{p}$$

In questo caso gli autostati di elicità coincidono con gli autostati di chiralità:

$$u_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2p_0} \eta_+ \end{pmatrix}, \quad u_- = \begin{pmatrix} \sqrt{2p_0} \eta_- \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni ad energia negativa sono $\psi(x) = v(p)e^{ipx}$ con $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ e quindi $(\not{p} + m)v(p) = 0$. Calcoli analoghi a quelli per le $u(p)$ conducono a:

$$v_- = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|} \eta_+ \\ -\sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|} \eta_+ \end{pmatrix}, \quad v_+ = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|} \eta_- \\ -\sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|} \eta_- \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}\eta_\pm = \pm\eta_\pm, \quad \sum_{+,-} v\bar{v} = \not{p} - m \quad (49)$$

Notare che elicità + delle soluzioni a energia negativa corrisponde a spinori di tipo -. Questo è dovuto alla nostra scelta delle soluzioni : $u(p)e^{-ipx}$ diventa, per le soluzioni con $E < 0$, $v(p)e^{ipx}$ cioè viene invertito, oltre al segno dell'energia, anche quello del triimpulso. Il che significa che uno stato a elicità + è allineato a $-\mathbf{p}$: $\boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{p})\eta = \eta \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\eta = -\eta$ cioè elicità + per v corrisponde un bispinore η_- .

In conclusione, la soluzione per l'equazione di Dirac si scrive:

$$\psi(x) = \sum_{s=+,-} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2p_0}} \left[a_s(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p}) e^{-ipx} + b_s^*(\mathbf{p}) v_s(\mathbf{p}) e^{ipx} \right]_{p_0=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} \quad (50)$$

con $(\not{p} - m)u_s(\mathbf{p}) = (\not{p} + m)v_s(\mathbf{p}) = 0$.

Per finire, la Lagrangiana di Dirac (2.4.2) è simmetrica sotto la trasformazione di U(1) $\psi \rightarrow e^{i\theta}\psi$ alla quale corrisponde la corrente conservata $j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$.

2.4.3 Bosoni di gauge: campo elettromagnetico e vettori massivi

Cerchiamo ora una forma esplicitamente covariante per le equazioni di Maxwell per il campo elettromagnetico libero (17). A tale scopo definiamo i potenziali scalare (A_0) e vettore (\mathbf{A}) tali che $\mathbf{E} = -\nabla A_0 - \partial_t \mathbf{A}$, $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}^{***}$. Per scrivere queste relazioni in forma covariante, introduciamo il tensore elettromagnetico $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Si ha $E^i = -\frac{\partial A_0}{\partial x^i} - \partial_0 A^i = +\partial^i A^0 - \partial^0 A^i = F^{i0}$; inoltre $F^{12} = B^3$ e cicliche per cui:

***Il termine forse poco familiare, $\partial_t \mathbf{A}$, nella definizione di \mathbf{E} è introdotto per soddisfare l'ultima delle (17).

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}$$

e i campi elettromagnetici trasformano come le componenti di un tensore antisimmetrico*. A questo punto le equazioni $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, $\nabla \wedge \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ sono automaticamente soddisfatte tramite la relazione che lega i potenziali e i campi elettrici e magnetici, mentre le altre due si ricavano da $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$: infatti da $\partial^\mu F_{\mu 0} = 0$ si ricava $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ e da $\partial^\mu F_{\mu i} = 0$ si ricava $\nabla \wedge \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{E}$. Notiamo che la trasformazione $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$ dove χ è una funzione arbitraria delle coordinate, non cambia $F_{\mu\nu}$ cioè non altera i campi \mathbf{E} , \mathbf{B} e quindi non cambia gli effetti fisici. Tale trasformazione si chiama trasformazione di gauge e l'invarianza corrispondente si chiama *invarianza di gauge*. Nel caso particolare in cui χ non dipenda da \mathbf{x} , essa corrisponde al ben noto fatto che cambiare il potenziale A_0 per una costante (cioè indipendente da \mathbf{x}) non altera la fisica. Da qui il nome *gauge*, che significa misura.

Le equazioni per A_μ (lascio come esercizio la derivazione) si possono ottenere dalla Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_\mu F^{\mu\nu} + j_\mu A^\mu \Rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (51)$$

dove $j = (\rho, \mathbf{j})$ è una corrente esterna (cioè fissata).

Le equazioni di Maxwell nel vuoto si scrivono $\partial_\nu F^{\nu\mu} = \square A^\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu = 0$. Possiamo far uso dell'invarianza di gauge scegliendo χ in modo tale che $\partial_\mu A^\mu = 0$; si parla in questo caso di gauge di Lorentz e le equazioni del moto diventano $\square A_\mu = 0$, del tutto simili alle KG per massa nulla. Procedendo nel modo usuale otteniamo:

$$A^\mu(x) = \sum_p \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2k_0}} \left[\varepsilon_p^\mu(k) e^{-ikx} + \varepsilon_p^{\mu*}(k) e^{ikx} \right]_{k_0=|\mathbf{k}|} \quad (52)$$

L'indice p ricorda che ci sono diverse polarizzazioni possibili, ma quante? In linea di principio sono 4, tante quanti i possibili vettori di una base che posso scegliere come:

$$\varepsilon_0 = (1, \mathbf{0}) \quad \varepsilon_1 = (0, \boldsymbol{\epsilon}_1) \quad \varepsilon_2 = (0, \boldsymbol{\epsilon}_2) \quad \varepsilon_3 = (0, \hat{\mathbf{k}}) \quad \mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon}_{1,2} = 0, \boldsymbol{\epsilon}_{1,2}^2 = 1 \quad (53)$$

Infatti ogni quadrivettore si può scrivere come $v^\mu = \sum_{i=0,1,2,3} c_i \varepsilon_i^\mu$ con $c_0 = v_0 = (v\varepsilon_0)$, $c_i = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_i = -(v\varepsilon_i)$. Notare il segno - nella metrica, per cui $g^{\mu\nu} v_\nu = v^\mu = (v\varepsilon_0)\varepsilon_0^\mu - \sum_{i=1,2,3} (v\varepsilon_i)\varepsilon_i^\mu = v_\nu (\varepsilon_0^\mu \varepsilon_0^\nu - \varepsilon_i^\mu \varepsilon_i^\nu)$ da cui $\varepsilon_0^\mu \varepsilon_0^\nu - \varepsilon_i^\mu \varepsilon_i^\nu = g^{\mu\nu}$ come si può verificare esplicitamente dalla (53). Le 4 polarizzazioni della (53) vengono chiamate scalare (ε_0), trasverse ($\varepsilon_{1,2}$), longitudinale (ε_3). Ma la scelta di gauge di Lorentz impone $k\varepsilon = 0$; questo elimina un grado di libertà e mi consente di scegliere la combinazione $\varepsilon_0 + \varepsilon_3 \equiv \varepsilon_L$ eliminando la combinazione $\varepsilon_0 - \varepsilon_3$:

$$\varepsilon_{1,2} = (0, \boldsymbol{\epsilon}_{1,2}); \mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon}_{1,2} = 0; \boldsymbol{\epsilon}_{1,2}^2 = 1 \quad \varepsilon_L^\mu = (\varepsilon_0 + \varepsilon_3)^\mu = k^\mu/k_0 \quad (54)$$

Tuttavia ho ancora la libertà di una variazione di gauge (ristretta) $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$ purchè $\partial^\mu \partial_\mu \chi = 0$. Scegliendo $\chi = \exp[-i\alpha kx]$ questo corrisponde per le polarizzazioni a $\varepsilon^\mu \rightarrow \varepsilon^\mu - \alpha k^\mu$, $k^2 = 0$; in

*Si tratta del tensore antisimmetrico, cioè la parte di spin 1 della composizione $1 \otimes 1 = 0 \oplus 1 \oplus 2$, vedi (7)

definitiva posso scegliere la gauge in modo da eliminare l'ultima delle (54), che è non fisica. Infine, ricordando che $k = \omega(1, \hat{\mathbf{k}})$ e introdotto un vettore $n = \omega(1, -\hat{\mathbf{k}})$ è facile verificare che:

$$\sum_{1,2} \epsilon_i^\mu \epsilon_i^\nu \equiv P_T^{\mu\nu} = \delta^{ij} - \hat{\mathbf{k}}^i \hat{\mathbf{k}}^j = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu}{(nk)} \quad (55)$$

Veniamo infine al caso di un bosone vettore massivo. Lagrangiana ed equazioni del moto si scrivono:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - M^2 A_\mu A^\mu \Rightarrow \partial_\nu F^{\nu\mu} + M^2 A^\mu = (\square + M^2) A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 0 \quad (56)$$

Per l'antisimmetria di $F^{\nu\mu}$ si ha anche $\partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} + M^2 \partial_\mu A^\mu = 0 \Rightarrow \partial_\mu A^\mu = 0$ e le equazioni del moto diventano $(\square + M^2) A^\mu = 0^*$. Le soluzioni sono di tipo onda piana:

$$A^\mu(x) = \epsilon_p^\mu(k) e^{-ikx} + \epsilon_p^{\mu*}(k) e^{ikx} \quad k^2 = M^2 \quad (57)$$

si ha quindi che $k\varepsilon(k) = 0$ e che $k_0 = \sqrt{M^2 + |\mathbf{k}|^2}$.

Per trovare una base, cioè scrivere esplicitamente le possibili polarizzazioni di un bosone vettore, partiamo dai 4 vettori di base (53). Nel caso $M \neq 0$ i vettori $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ soddisfano $k\varepsilon = 0$ come imposto dalle equazioni del moto, ma $\varepsilon_3, \varepsilon_0$ no. Tuttavia è facile trovare una combinazione di questi ultimi che soddisfa $k\varepsilon_L = 0$:

$$k = (k_0, \mathbf{k}); k^2 \equiv M^2 \quad \varepsilon_{1,2} = (0, \boldsymbol{\epsilon}_{1,2}); \mathbf{k}\boldsymbol{\epsilon}_{1,2} = 0; \boldsymbol{\epsilon}_{1,2}^2 = 1 \quad \varepsilon_L = \frac{1}{M}(|\mathbf{k}|, k_0 \hat{\mathbf{k}}) \quad (58)$$

E' facile fare le somme sulle polarizzazioni. Infatti:

$$\sum_{1,2} \varepsilon_p^i \varepsilon_p^j = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2} \quad \varepsilon_L^i \varepsilon_L^j = \frac{k_0^2}{M^2} \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2} \quad \sum_{1,2} \varepsilon_p^0 \varepsilon_p^0 = 0 \quad \varepsilon_L^0 \varepsilon_L^0 = \frac{|\mathbf{k}|^2}{M^2} \quad (59)$$

da cui, considerando anche le componenti miste $0i$, si ricava:

$$\sum_{T,L} \varepsilon_p^\mu \varepsilon_p^{\nu*} = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M^2} \quad (60)$$

3 Quantizzazione dei campi

3.1 Oscillatore armonico

I campi, che sono funzioni della coordinata x cioè c- numeri nella teoria dei campi classica, vengono quantizzati come operatori in rappresentazione di interazione nella teoria dei campi. Le particelle emergono come eccitazioni dei campi, e la cosa sorprendente è che non solo il campo elettromagnetico viene descritto in questo modo (le eccitazioni del campo sono i fotoni), ma anche una particella di materia come l'elettrone viene descritta come eccitazione di un campo. Per introdurre l'argomento ricordiamo l'oscillatore armonico:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 = \frac{\hbar\omega}{2} (a^\dagger a + a a^\dagger) = \hbar\omega (a^\dagger a + \frac{1}{2}); \quad a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2\hbar m\omega}}; \quad [a, a^\dagger] = 1 \quad (61)$$

*Notare la differenza: nel caso massless (fotone) $\partial_\mu A^\mu = 0$ è una scelta di gauge, nel caso massivo è automatica conseguenza delle equazioni del moto

Introdotta l'operatore $N = a^\dagger a$, dalle regole di commutazione si ottiene che, se $|n\rangle$ è autostato di N cioè $N|n\rangle = n|n\rangle$ allora $Na^\dagger|n\rangle = (n+1)|n\rangle$, $Na|n\rangle = (n-1)|n\rangle$. Inoltre $|n\rangle$ è anche autostato dell'hamiltoniana con valore $\hbar\omega(n+1/2)$. N è definito positivo in quanto $\langle\psi|a^\dagger a|\psi\rangle = |a|\psi\rangle|^2$. L'operatore $a^\dagger(a)$ è detto operatore di salita (discesa) perché agendo sull'autostato di una data energia lo trasforma in autostato di energia più alta (più bassa). Lo stato di minima energia soddisfa $a|n_0\rangle = 0$ perché non ci sono livelli più bassi, e soddisfa $a^\dagger a|n_0\rangle = n_0|n_0\rangle$ per definizione. Si ottiene quindi $n_0 = 0$ e di conseguenza gli n sono interi (Esercizio: usando $a|0\rangle = 0$ trovare esplicitamente $\langle x|0\rangle$). Notare che lo stato di minima energia, detto anche stato di vuoto, non ha energia 0 bensì $\hbar\omega/2$; nell'oscillatore classico l'energia minima è 0 e corrisponde a $x = p = 0$. Nell'oscillatore quantistico questa configurazione è impossibile per via del principio di indeterminazione di Heisenberg. Nello stato di minima energia minima vale $\Delta x \Delta p = \hbar/2$, valore minimo, e variando l'hamiltoniana rispetto ad esempio a Δx con $\Delta p = \hbar/(2\delta x)$ si ottiene l'energia minima $\hbar\omega/2$. (Esercizio: dimostrarlo, e verificare che effettivamente lo stato $\langle x|0\rangle$ verifica il minimo dell'indeterminazione di Heisenberg. Dimostrare che nello stato $|n\rangle$ vale $\Delta x \Delta p = \hbar(n+1/2)$). È facile verificare* che $\langle a^n a^{n\dagger} \rangle = n \langle a^{n-1} a^{(n-1)\dagger} \rangle$ per cui gli stati normalizzati a 1 sono $|n\rangle = 1/\sqrt{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle$.

Infine, nella rappresentazione di Heisenberg:

$$i\hbar d_t a(t) = [H, a] = -\hbar\omega a(t) \Rightarrow a(t) = e^{-i\omega t} a(0), a^\dagger(t) = e^{+i\omega t} a^\dagger(0)$$

e le regole di commutazione, se imposte al tempo 0, sono preservate dall'evoluzione temporale.

Nell'oscillatore armonico l'operatore a^\dagger aumenta di 1 il valore dell'operatore N ; il nuovo stato corrisponde al livello successivo di energia. Nella teoria dei campi crea una eccitazione elementare, che si interpreta come una particella. L'applicazione dell'operatore $a^\dagger(\mathbf{p})$ crea una particella libera di quadrimpulso $p = (\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}, \mathbf{p})$ e dunque aumenta l'energia del sistema di una quantità p_0 . Altri esempi: modi di vibrare di una corda, fononi (in questi casi si parla di quasiparticelle).

3.2 Quantizzazione del campo scalare

Nella teoria di campi c'è un oscillatore armonico per ogni punto dello spazio tempo; per quantizzare i campi è conveniente immaginare prima che lo spazio sia discreto. Suddivido quindi, all'istante t , lo spazio in volumetti Δ_i a cui associo il valore del campo ϕ_i mediato su Δ_i . La Lagrangiana del campo di Klein-Gordon diventa:

$$L = \int d^3x \mathcal{L} = \int d^3x \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + \partial_i \phi \partial^i \phi) = \frac{1}{2} \sum_i \dot{\phi}_i^2 \Delta_i + \frac{1}{2} \int d^3x \partial_i \phi \partial^i \phi$$

dove ho isolato i termini con le derivate rispetto al tempo delle coordinate canoniche $\dot{\phi}_i$ per ricavare i momenti coniugati $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_i} = \dot{\phi}_i \Delta_i$. A questo punto impongo le regole di commutazione canoniche pensando a un insieme discreto di oscillatori armonici indipendenti:

$$[\phi_i, \phi_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad [\phi_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij} \Rightarrow [\phi_i, \dot{\phi}_j] = \frac{i\hbar \delta_{ij}}{\Delta_i}$$

Passiamo ora di nuovo al continuo, tenendo presente che $\delta_{ij}/\Delta_i \rightarrow \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$. Infatti per una funzione discreta f_j si ha $\sum_j \Delta_j f_j \frac{\delta_{ij}}{\Delta_i} = f_i$ che corrisponde a $\int d^3y f(\mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = f(\mathbf{x})$. In definitiva

*a volte uso la notazione $\langle 0|Operatore|0\rangle = \langle Operatore \rangle$.

i campi sul continuo devono soddisfare:

$$[\phi(x_0, \mathbf{x}), \dot{\phi}(y_0, \mathbf{y})]_{x_0=y_0} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad [\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] = [\dot{\phi}(t, \mathbf{x}), \dot{\phi}(t, \mathbf{y})] = 0 \quad (62)$$

dove la richiesta di equal times $x_0 = y_0$ deriva dall'aver quantizzato gli oscillatori a $t = 0$ ovvero a un qualsiasi istante x_0 dato che, come abbiamo visto, l'evoluzione temporale preserva le commutazioni canoniche.

La quantizzazione del campo di Klein-Gordon si effettua sostituendo le funzioni $a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p})$ con degli operatori in modo che venga soddisfatta la (62):

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} [a(\mathbf{p})e^{i(\mathbf{p}\mathbf{x} - \omega t)} + h.c.] \Rightarrow \\ \Rightarrow [a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] &= \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), [a(\mathbf{p}), a(\mathbf{p}')] = [a^\dagger(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = 0 \end{aligned} \quad (63)$$

dove l'ultimo passaggio deriva dall'aver imposto la (62). Infatti:

$$\begin{aligned} [\phi(x), \dot{\phi}(y)]_{e.t.} &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2p_0}} \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2p'_0}} [a(\mathbf{p})e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} + a^\dagger(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\mathbf{y}}, -ip'_0 a(\mathbf{p}')e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{y}} + ip'_0 a^\dagger(\mathbf{p}')e^{i\mathbf{p}'\mathbf{y}}]_{x_0=y_0} = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}d^3\mathbf{p}'}{2(2\pi)^3} \frac{ip'_0}{\sqrt{p_0p'_0}} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') (e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{p}'\mathbf{y}} + e^{i\mathbf{p}'\mathbf{y}} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}) = i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2(2\pi)^3} (e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + e^{i\mathbf{p}(\mathbf{y}-\mathbf{x})}) = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned}$$

ed è facile verificare che anche gli altri commutatori (62) sono soddisfatti. Appare chiaro che le normalizzazioni sono scelte in maniera da semplificare l'algebra dei commutatori a, a^\dagger .

Possiamo esprimere l'Hamiltoniana in termini di operatori di creazione a^\dagger e distruzione a ; il calcolo è straightforward:

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \mathcal{L} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{|\nabla\phi|^2}{2}; \quad H = \int d^3x \mathcal{H}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int d^3p p_0 (a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{p}) + a(\mathbf{p})^\dagger a(\mathbf{p})) \quad (64)$$

Usando le regole di commutazione possiamo anche scrivere:

$$H = \int d^3p p_0 a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) + \frac{1}{2}\delta^3(0) \int d^3p p_0 \quad (65)$$

Il secondo termine diverge ma siccome nelle applicazioni conta la differenza di energie, il c-numero (cioè non operatore perchè non dipende da a, a^\dagger) divergente si può di solito trascurare. Fa eccezione la costante cosmologica discussa in [5]. Per sbarazzarsi degli infiniti costanti si conviene di usare il normal order, cioè gli operatori vengono trattati come se il commutatore svanisse e con tutti gli a^\dagger a sinistra, a a destra: $: a^\dagger a := a^\dagger a, : a a^\dagger := a^\dagger a, : a a^\dagger a^\dagger a a := a^\dagger a^\dagger a a a$ ecc. In questo modo il valore di aspettazione sul vuoto (v.e.v.) è sempre zero.

Usando le regole di commutazione è facile rendersi conto che lo stato $a^\dagger(p_1) \cdots a^\dagger(p_n)|0\rangle$ è autostato di $: H :$ con autovalore $p_1^0 + \cdots p_n^0$. Viene quindi naturale tale stato come stato di n particelle con impulsi $p_1 \cdots p_n$. Come si vede anche dalla forma dell'hamiltoniana, l'operatore $N_p \equiv a^\dagger(p)a(p)$ rappresenta il numero di particelle di impulso \mathbf{p} . La causalità* impone che misure effettuate su

*l'argomento è affrontato in grande dettaglio in [1]

distanze di tipo spazio siano indipendenti, cioè corrispondano a operatori commutanti; in definitiva richiediamo che $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ per $(x - y)^2 < 0$. Nel caso particolare $x_0 = y_0$, questo è già imposto dalle regole di commutazione canoniche (62); occorre generalizzare a $x_0 \neq y_0$. Si potrebbe argomentare che il nostro formalismo è covariante e quindi per invarianza di Lorentz il commutatore è zero nel caso più generale; un calcolo esplicito è da preferire e lo svolgo nel paragrafo dedicato ai propagatori.

Ritornando alla (65), possiamo tentare di dare un significato all'energia del vuoto quantizzando su un volume V . In questo caso l'energia è la somma delle energie minime di tutti gli oscillatori*:

$$E_0 = \sum_{p^i} \frac{p_0^i}{2} \approx \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}}{2} \quad (66)$$

Nel limite di volume infinito diverge lo stesso, ma potremmo pensare che la *densità* di energia sia finita, dividendo per V . In realtà neanche la densità di energia è infinita, perchè l'integrale è dominato dai $|\mathbf{p}| \gg m$ e l'integrando si comporta come $|\mathbf{p}|^3 d|\mathbf{p}|$. Se mettiamo un cutoff UV pensando a un reticolo con passo Δx ovvero a frequenze massime di ordine $1/\Delta x \equiv \Omega$, la densità di energia si comporta come $\rho = E_0/V \approx \int_0^\Omega \omega^3 d\omega \sim \Omega^4$. Come discuto in [5], ogni tentativo da parte della comunità scientifica di dare un significato a questa divergenza così forte è finora naufragato.

Un campo carico è descritto dall'operatore ($dk \equiv \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}$):

$$\phi(x) = \int d[k] [a(\mathbf{k})e^{-ikx} + b^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}] \quad [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (67)$$

con tutti gli altri commutatori nulli. Da queste, oltre alla commutazione canonica $[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}^\dagger(\mathbf{x}', t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ si ricava $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ e $[\phi(x), \dot{\phi}^\dagger(y)] = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega} \sin k(x - y)$. Quest'ultima espressione è 0 per $(x - y)^2 < 0$ (causalità). Infatti se $x_0 = y_0$ vale 0 perchè l'integrando è dispari per $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$; per invarianza di Lorentz questo vale per tutti i punti di tipo spazio. La Lagrangiana ha in questo caso una simmetria di Noether U(1) e la corrente conservata, come si è visto, è $j_\mu = ie\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi$. L'integrale di volume di j_0 è la carica conservata $Q = ie \int d^3\mathbf{x} : \phi(x)\dot{\phi}^\dagger(x) - \dot{\phi}(x)\phi^\dagger(x) :$, che espressa in termini di operatori di creazione e distruzione diventa $Q = e \int d^3\mathbf{k} [a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})]$. Da questa espressione si ottiene $[Q, \phi(x)] = e\phi(x)$ e $[Q, H] = 0$ (esercizio: ricavare H con il procedimento standard, esprimerla in funzione di operatori di creazione e distruzione, e verificare che $[Q, H] = 0$). La trasformazione generata da Q è quindi una buona simmetria. Come si vede, l'operatore di carica "conta" le particelle con carica positiva (relative ad a^\dagger) sottraendo il numero di particelle con carica negativa (relativa a b^\dagger). Inoltre Q è il generatore della simmetria U(1) corrispondente alla conservazione della carica, nel senso che $[Q, \phi(x)] = e\phi(x)$ per una trasformazione infinitesima corrisponde a $\phi \rightarrow e^{iQ\theta}\phi e^{-iQ\theta} = e^{ie\theta}\phi$ per una trasformazione finita. Uno stato $|\psi\rangle$ con N_a particelle di carica e e N_b particelle di carica negativa $-e$ viene trasformato in $|\psi\rangle \rightarrow e^{iQ\theta}|\psi\rangle = e^{ie(N_a - N_b)\theta}|\psi\rangle$. Esercizio: dimostrarlo utilizzando $|\psi\rangle = a^\dagger(p_1)\dots a^\dagger(p_{N_a})b^\dagger(k_1)\dots b^\dagger(k_{N_b})|0\rangle$

3.3 Quantizzazione del campo fermionico

Esiste un teorema, detto spin-statistica (Fierz 1939), che asserisce che la funzione d'onda di un sistema di particelle di spin intero (detti bosoni) deve essere simmetrica quando gli indici (posizione, spin) di

*Si ottiene lo stesso risultato facendo direttamente la sostituzione $\delta^3(0) \rightarrow V/(2\pi)^3$, come vedremo nella (158)

qualsiasi coppia di particelle vengono scambiati fra loro. Invece nel caso di fermioni la funzione d'onda deve essere antisimmetrica. Questo teorema deriva dalla combinazione di meccanica quantistica e relatività ristretta, ma non ne conosco una dimostrazione elementare e quindi lo assumerò per valido in questo corso. Inutile dire che il teorema è di enorme importanza, date le conseguenze ad esempio per le proprietà statistiche di insiemi di particelle.

Come conseguenza di questo teorema, i campi fermionici vengono quantizzati per anticommutatori anziché commutatori; vediamo perché prendendo come esempio gli operatori di creazione di un elettrone con spin up (a_+^\dagger) e spin down (a_-^\dagger). Definiamo lo stato di minima energia (vuoto) tale che $a_+|0\rangle = a_-|0\rangle = 0$ e imponiamo le regole di anti-commutazione:

$$\{a_r, a_s^\dagger\} = \delta_{rs} \quad \{a_r, a_s\} = \{a_r^\dagger, a_s^\dagger\} = 0 \quad (68)$$

Conseguenza immediata di queste regole è che $(a_+^\dagger)^2 = (a_-^\dagger)^2 = 0$ cioè due elettroni non possono avere lo stesso spin (up o down). Altra conseguenza è che la funzione d'onda è antisimmetrica; ad esempio:

$$|+-\rangle - |-+\rangle = (a_+^\dagger a_-^\dagger - a_-^\dagger a_+^\dagger)|0\rangle = (-a_-^\dagger a_+^\dagger + a_+^\dagger a_-^\dagger)|0\rangle = -(|-+\rangle - |+-\rangle) \quad (69)$$

Posso definire due operatori di numero di particelle $N = \sum_{r=+,-} a_r^\dagger a_r$ e si verifica facilmente che $N|0\rangle = 0$, $N a_+^\dagger|0\rangle = a_+^\dagger|0\rangle$, $N a_-^\dagger|0\rangle = a_-^\dagger|0\rangle$ mentre come già detto non esistono stati con due particelle identiche o più. Notare che, diversamente dall'oscillatore quantistico nel caso dei bosoni, non esiste per i fermioni nessun esempio di MQ a cui riferirsi.

Adesso quantizziamo il campo di Dirac imponendo le regole di **anticommutazione** canoniche.

$$\Psi(x) = \int dk [a_{\mathbf{k},r} u_r(k) e^{-ikx} + b_{\mathbf{k},r}^\dagger v_s(k) e^{ikx}] \quad \{a_{\mathbf{k},r}, a_{\mathbf{k}',s}^\dagger(\mathbf{k}')\} = \{b_{\mathbf{k},r}, b_{\mathbf{k}',s}^\dagger(\mathbf{k}')\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^\delta \delta_{rs} \quad (70)$$

con tutti gli altri anticommutatori pari a 0. Il formalismo del numero di occupazione funziona anche con gli anticommutatori; ad esempio se $N = \int d^3\mathbf{k} a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})$ ho $N a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle = \int d^3\mathbf{k} a^\dagger(\mathbf{k}) a_{\mathbf{p}}^\dagger a(\mathbf{k})|0\rangle + \int d^3\mathbf{k} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle = a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle$ e in generale $N(a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^i (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^j|0\rangle = (i+j)(a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^i (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^j|0\rangle$. E' essenziale qui il fatto che N è un operatore bosonico: $[a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{p}}] = 0$ se $\mathbf{k} \neq \mathbf{p}$. Si ottiene

$$\begin{aligned} & \{\Psi(\mathbf{x}, t), \bar{\Psi}(\mathbf{x}', t)\} = \\ & \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p_0}(2\pi)^3} \frac{d^3p'}{\sqrt{2p'_0}(2\pi)^3} \left\{ \sum_s u_{s,\mathbf{p}} a_{s,\mathbf{p}} e^{-ipx} + v_{s,\mathbf{p}} b_{s,\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx}, \sum_s \bar{u}_{s,\mathbf{p}} a_{s,\mathbf{p}}^\dagger e^{ip'x'} + \bar{v}_{s,\mathbf{p}} b_{s,\mathbf{p}} e^{-ip'x'} \right\} \\ & = \int \frac{d^3p}{2p_0} \frac{1}{(2\pi)^3} \left[\sum_s u_{\mathbf{p},s} \bar{u}_{\mathbf{p},s} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} + \sum_s v_{\mathbf{p},s} \bar{v}_{\mathbf{p},s} e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \right] \\ & = \int \frac{d^3p}{2p_0} \frac{1}{(2\pi)^3} \left[(\not{p} - m) e^{i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} + (\not{p} + m) e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \right] = \gamma_0 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio si è tenuto conto che gli integrali in $d^3\mathbf{p}$ di $m(e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} - e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')})$ e di $\not{p}\gamma(e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} + e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')})$ sono 0 perché gli integrandi sono dispari per $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$). Dalle regole di anticommutazione si ricava anche

$$\{\Psi^\alpha(\mathbf{x}, t), \Psi^{\dagger\beta}(\mathbf{y}, t)\} = i\delta^{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \{\Psi^\alpha(t, \mathbf{x}), \Psi^\beta(t, \mathbf{y})\} = 0 \quad (71)$$

3.4 Quantizzazione del campo elettromagnetico

Nella quantizzazione della Lagrangiana del campo elettromagnetico (51) sorgono problemi in quanto la generalizzazione della (62) sarebbe $[A_\mu(\mathbf{x}, t), \pi_\nu(\mathbf{x}', t)] = ig_{\mu\nu}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Tuttavia questo è incompatibile con:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu \Rightarrow \pi_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\dot{A}_i} = \dot{A}_i - \partial_i A_0 \quad \pi_0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\dot{A}_0} = 0 \quad ; \quad \partial_i \pi_i = -J_0 \quad (72)$$

dove l'ultima equazione è conseguenza delle equazioni del moto. Quindi delle 4 commutazioni canoniche, 1 salta perchè $\pi_0 = 0$ e l'altra salta perchè $\partial_i \pi_i = -J_0$ è una relazione fra gli operatori di A_μ e quelli, che dovrebbero essere indipendenti, dei campi fermionici ad esempio. I gradi di libertà dinamici che posso quantizzare sono quindi in realtà solo 2. Però se procedo così perdo ovviamente l'invarianza manifesta di Lorentz: $\pi_0 = 0$.

Le difficoltà nella quantizzazione sono legate alla invarianza di gauge: data $A_\mu(\mathbf{x}, 0)$ l'evoluzione temporale non dà una soluzione univoca $A_\mu(\mathbf{x}, t)$ perchè anche $A_\mu(\mathbf{x}, t) + \partial_\mu \Omega(x, t)$ con Ω opportuno è soluzione. Equivalentemente, il propagatore è in realtà un proiettore $D_{\mu\nu}\partial_\nu \Omega = 0$. Una maniera di risolvere è quella di fissare la gauge, eliminando i gradi di libertà spuri e restando solo con quelli fisici che verranno quantizzati. La scelta più semplice è la gauge di Coulomb, $\partial_i A_i = 0$. In questa gauge si ha dunque:

$$\partial_i A_i = 0 \quad ; \quad \partial_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_i A_0} = J_0 \Rightarrow \partial_i \partial^i A_0 = -J_0 \Rightarrow A_0(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{x}' \frac{J_0(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (73)$$

e A_0 non è più un grado di libertà dinamico della teoria.

Quantizziamo adesso i gradi di libertà dinamici, tenendo conto che soddisfano $A_0 = 0, \partial_i A_i = 0$; scriviamo quindi:

$$A_\mu(x) = \sum_{s=1,2} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2k_0}} \left(a_s(\mathbf{k}) \epsilon_\mu^s(\mathbf{k}) e^{-ikx} + a_s^\dagger(\mathbf{k}) \epsilon_\mu^{s*}(\mathbf{k}) e^{ikx} \right)_{k_0=|\mathbf{k}| \equiv \omega} \quad (74)$$

dove le due polarizzazioni trasverse sono date dalle ϵ_1, ϵ_2 della (53). Imponiamo le relazioni di commutazione canonica $[a_{p,s}, a_{k,r}^\dagger] = \delta_{sr}\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k})$, ottenendo:

$$[A_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] = [A_i(\mathbf{x}, t), \dot{A}_j(\mathbf{x}', t)] = -i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right) \quad (75)$$

dopo aver tenuto conto che le condizioni $A_0 = 0, \partial_i A_i = 0$ si tramutano per le polarizzazioni nel requisito che esse siano trasverse, e quindi ricostituiscono il proiettore trasverso. Le (75) sono compatibili con le equazioni del moto:

$$\mathcal{L} = -\frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4} + J_i A^i - J_0(\nabla^2)^{-1}J_0 \quad \Rightarrow \quad \square A_i = (\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2})J_j \equiv J_j^T \quad (76)$$

dove è sottinteso che A_0 che compare in F_{0i} è in realtà $-(\nabla^2)^{-1}J_0$. I campi e il propagatore si scrivono:

$$A_\mu^i(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega} \sum_{i=1}^2 [a e^{-ikx} \epsilon_\mu^i(\mathbf{k}) + h.c.] \quad \int d^4x e^{ikx} \langle \mathcal{T} A_\mu(x) A_\nu(0) \rangle = i \frac{P_{\mu\nu}^T}{k^2} \quad (77)$$

dove le polarizzazioni trasverse soddisfano

$$\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = -\delta_{ij} \quad \sum \varepsilon_\mu^i \varepsilon_\nu^{i*} = P_{\mu\nu}^T \quad P_{ij}^T = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \quad P_{00}^T = P_{0i}^T = P_{i0}^T = 0 \quad (78)$$

La quantizzazione (sia in QED che in QCD) finisce qui: in gauge di Coulomb come nelle altre gauge fisiche (gauge assiale, gauge di radiazione ecc.) si quantizzano solo i gradi di libertà fisici, e non occorre nessun termine aggiuntivo alla Lagrangiana. Tuttavia, l'espressione per il propagatore in gauge di Coulomb non è covariante, e questo tende in generale a complicare i calcoli, per cui di solito non è questa la scelta che si fa. Si preferisce una gauge covariante, quale ad esempio quella definita dalla (114) per $u_R = 1$ (gauge di Feynman). Dalla (55) si ottiene facilmente la seguente relazione fra i numeratori dei propagatori nelle varie gauge:

$$P_{R\mu\nu}^u = P_{\mu\nu}^T + \frac{k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu}{(nk)} + (1 - u_R) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \quad (79)$$

Per verificare l'invarianza di gauge dobbiamo dimostrare che i termini in $k_\mu, k_\nu, k_\mu k_\nu$ nella (79), connessi con polarizzazioni non fisiche, sono irrilevanti oppure possono essere cancellati con opportune interazioni (i ghosts in QCD). Allo stesso tempo, come vedremo, questo garantisce l'unitarietà della teoria.

Regola di Cutkoski $1/(k^2 + i\varepsilon) \rightarrow \pi\delta(k^2)$. Inoltre $d^4k\delta(k^2) = d\Phi_k$.

In QED $e^-(p_1)e^+(p_2) \rightarrow \gamma(k_1)\gamma(k_2)$ l'ampiezza è $\mathcal{A} = A_{\mu\nu}\varepsilon^\mu(k_1)\varepsilon^\nu(k_2)$ con:

$$A_{\mu\nu} = \bar{v}(p_2) \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k}_1} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{1}{\not{k}_1 - \not{p}_2} \gamma_\nu \right\} \quad (80)$$

da cui si ottiene:

$$k_1^\mu A_{\mu\nu} = \bar{v}(p_2) \left\{ \gamma_\nu \left[-1 + \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k}_1} \not{p}_1 \right] + \left[1 + \not{p}_2 \frac{1}{\not{k}_1 - \not{p}_2} \right] \gamma_\nu \right\} u(p_1) = 0 \quad (81)$$

dove l'ultimo passaggio tiene conto delle equazioni del moto $\bar{v}(p_2)\not{p}_2 = \not{p}_1 u(p_1) = 0$. Questa è un'identità di Ward. I termini in k_μ non contribuiscono.

3.5 Propagatori (o funzioni di Green)

In generale le funzioni di Green risolvono le equazioni definite a partire da un operatore differenziale lineare \hat{O} :

$$\hat{O}_x \phi(x) = j(x) \Rightarrow \phi(x) = \int dx' G(x, x') j(x') \quad \hat{O}_x G(x, x') = \delta(x - x') \quad (82)$$

La funzione di Green non è univocamente determinata: posso sempre aggiungere a G una funzione G_0 che soddisfi $\hat{O}_x G_0(x, x') = 0$. Questo corrisponde al fatto che alla soluzione ϕ posso aggiungere una ϕ_0 soluzione dell'equazione omogenea. Per definire univocamente la funzione di Green occorre quindi supplementare l'equazione differenziale con condizioni al contorno. La funzione di Green viene anche detta propagatore, perchè propaga l'effetto della corrente nel punto x' fino alla soluzione ϕ nel punto x .

Vediamo ora le funzioni di Green in meccanica quantistica. Cominciamo con un caso semplice, l'equazione di Schrödinger per la particella libera, nella quale si danno condizioni iniziali a $t = t'$:

$$(i\partial_t + \frac{\partial_x^2}{2m})\Psi(x, t) = 0 \quad \Psi(x, t)|_{t=t'} = \Psi(x, t') \quad (83)$$

Per la trasformata di Fourier $\tilde{\Psi}(k, t) = \int dx e^{-ikx} \Psi(x, t)$, l'equazione si scrive:

$$(i\partial_t - \frac{k^2}{2m})\tilde{\Psi}(k, t) = 0 \quad ; \quad \tilde{\Psi}(k, t)|_{t=t'} = \tilde{\Psi}(k, t') \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Psi}(k, t) = \tilde{\Psi}(k, t') e^{-i\frac{k^2}{2m}(t-t')} \quad (84)$$

Antitrasformando si ottiene:

$$\Psi(x, t) = \int dx' G(x-x', t-t') \Psi(x', t') \quad G(x, t) = \int dk e^{ikx} e^{-i\frac{k^2}{2m}t} = \sqrt{\frac{m}{it}} e^{i\frac{mx^2}{2t}} \quad (85)$$

Questa equazione rende conto del nome "propagatore" in quanto propaga la funzione d'onda dall'istante t' all'istante t (e, se vogliamo, anche dal punto x' al punto x . Notare che prendendo come condizione iniziale $\Psi(x, 0) = \delta(x)$, cosicchè $\tilde{\delta}(k) = 1$, si ottiene $\Psi(x, t) = G(x, t)$. Quindi la funzione di Green risolve:

$$(i\partial_t + \frac{\partial_x^2}{2m})G(x, t) = 0 \quad G(x, 0) = \delta(x) \quad (86)$$

Se definiamo la funzione di Green ritardata $G^+(x, t) = \theta(t)G(x, t)$, dalla (86) si ottiene che G^+ soddisfa:

$$(i\partial_t + \frac{\partial_x^2}{2m})G^+(x, t) = i\delta(t)G(x, t) + (i\partial_t + \frac{\partial_x^2}{2m})G(x, t) = i\delta(t)\delta(x) \quad (87)$$

con la condizione al contorno $G^+(x, t) = 0$ per $t < 0$. Analogamente $G^-(x, t) = -\theta(-t)G(x, t)$ soddisfa la stessa equazione (87) ma con la condizione $G^-(x, t) = 0$ per $t > 0$. Da quanto fin qui visto, è ovvio che G^+ descrive l'evoluzione in avanti e G^- quella indietro:

$$\Psi(x, t) = \int dy G^+(x-x', t-t') \Psi(x', t') \quad \text{se } t > t' \quad \Psi(x, t) = - \int dy G^-(x-x', t-t') \Psi(x', t') \quad \text{se } t < t' \quad (88)$$

Dal punto di vista più formale dei bra e dei ket, le equazioni sopra si riassumono in:

$$(i\partial_t - H)|\Psi(t)\rangle = 0 \Rightarrow |\Psi(t)\rangle = \theta(t-t')U(t-t')|\Psi(t')\rangle \equiv G^+(t-t')|\Psi(t')\rangle \quad ; \quad (89)$$

$$(i\partial_t - H)G^+(t) = \delta(t)e^{-iHt} = \delta(t) \quad (90)$$

In particolare, nella rappresentazione delle x :

$$\langle x|\Psi(t)\rangle = \theta(t-t') \int dy \langle x|U(t-t')|y\rangle \langle y|\Psi(t')\rangle \quad ; \quad (91)$$

$$\langle x|U(t)|y\rangle = \int dp \langle x|e^{-iHt}|p\rangle \langle p|y\rangle = \int dp e^{ipx} e^{-i\frac{p^2}{2m}t} \quad (92)$$

La (88) evidenzia un altro motivo per cui la funzione di Green viene detta anche propagatore: essa propaga la funzione d'onda da un tempo t' ad un tempo t .

Se consideriamo la Lagrangiana che descrive l'interazione di uno scalare reale con una corrente esterna:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + j\phi \quad \Rightarrow \quad (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x) = j(x) \quad (93)$$

la soluzione in trasformata di Fourier $\phi(p) = \int d^4x e^{ipx} \phi(x)$ è data da:

$$\phi(p) = G(p)j(p); \quad G(p) = \frac{1}{p^2 - m^2} \quad (94)$$

L'oggetto $\frac{1}{p^2 - m^2}$, che risolve l'equazione differenziale che descrive il moto, è detto funzione di Green, o propagatore. Nello spazio delle coordinate:

$$\phi(x) = \int d^4x' G(x - x')j(x'); \quad G(x) = \int d^4p e^{-ipx} G(p); \quad (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)G(x) = \delta^4(x) \quad (95)$$

quindi la funzione G propaga l'effetto della corrente j nel punto x' al campo ϕ nel punto x . Notare che la funzione di Green è in realtà mal definita in quanto posso sempre aggiungere a G una funzione G_0 tale che $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)G(x) = 0$; a questo corrisponde il fatto che alla ϕ posso aggiungere una soluzione dell'equazione omogenea. Per risolvere l'ambiguità devo definire il comportamento di $G(p)$ vicino al polo $p^2 = m^2$. Nella teoria di campi il propagatore è descritto dalla prescrizione di Feynman: $p^2 - m^2 \rightarrow p^2 - m^2 + i\varepsilon$. Corrispondentemente si ha :

$$G_F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = -i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0(2\pi)^3} [\theta(x^0)e^{-ipx} + \theta(-x^0)e^{ipx}]_{p_0 = +\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}} \quad (96)$$

Infatti l'integrando ha due radici:

$$p_0^+ = +\sqrt{-} - \frac{i\varepsilon}{2\sqrt{-}} \rightarrow +\sqrt{-} - i\varepsilon \quad p_0^+ = -\sqrt{-} + \frac{i\varepsilon}{2\sqrt{-}} \rightarrow -\sqrt{-} + i\varepsilon; \quad \sqrt{-} \equiv \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2} \quad (97)$$

Ora, se $x_0 > 0$ possiamo integrare in p_0 facendo un cammino in campo complesso che contenga l'asse reale e si chiuda nel semipiano inferiore; tale cammino include la radice p_0^+ e percorre l'asse reale in senso inverso (vedi figura.....) . Con il teorema dei residui, dato che al denominatore dell'integrando compare $(p_0 - p_0^+)(p_0 - p_0^-)$, si ottiene

$$-2\pi i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i(\sqrt{-}t - \mathbf{p}\mathbf{x})}}{2\sqrt{-}} = -i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0(2\pi)^3} e^{-ipx} \Big|_{p_0 = +\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}}$$

Se invece $x_0 < 0$ possiamo chiudere il cammino sul semipiano superiore, ottenendo:

$$2\pi i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i(-\sqrt{-}t - \mathbf{p}\mathbf{x})}}{-2\sqrt{-}} = -i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\sqrt{-}(2\pi)^3} e^{i(\sqrt{-}t - \mathbf{p}\mathbf{x})} = -i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0(2\pi)^3} e^{ipx} \Big|_{p_0 = +\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}}$$

dove il primo passaggio si è fatto con il cambio di variabile $\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$, $d^3\mathbf{p}' = d^3\mathbf{p}$. Abbiamo quindi dimostrato la (96). In termini dei campi quantizzati liberi (63), è facile verificare che il propagatore si scrive tramite l'operatore di ordinamento temporale \mathcal{T} :

$$\langle \mathcal{T}\{\phi(x)\phi(0)\} \rangle \equiv \langle (\theta[x_0]\phi(x)\phi(0) + \theta[-x_0]\phi(0)\phi(x)) \rangle \quad (98)$$

$$= \theta(x^0) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0(2\pi)^3} e^{-ipx} + \theta(-x^0) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0(2\pi)^3} e^{-ipx} = iG_F(x) \quad (99)$$

Tenendo conto che nel caso dei fermioni $\mathcal{T}[\psi(x)\psi(y)] = \theta(x_0 - y_0)\psi(x)\psi(y) - \theta(y_0 - x_0)\psi(y)\psi(x)$ e con calcoli analoghi al caso scalare anche se con qualche elaborazione in più dovuta alla presenza di più indici, si ottiene:

$$\langle \mathcal{T}\{\psi(x)\bar{\psi}(0)\} \rangle = i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4p e^{-ipx}}{(2\pi)^4} \frac{\sum_s u_s(p)\bar{u}_s(p)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4p e^{-ipx}}{(2\pi)^4} \frac{i}{p - m + i\varepsilon} \quad (100)$$

Inoltre dalle regole di commutazione si ottiene anche:

$$\langle \mathcal{T}\{\bar{\psi}(x)\psi(y)\} \rangle \equiv \overline{\psi(x)\psi(y)} = -\langle \mathcal{T}\{\psi(y)\bar{\psi}(x)\} \rangle = -\overline{\psi(y)\bar{\psi}(x)}$$

cioè sotto contrazione è come se $\psi(x)$ e $\bar{\psi}(y)$ anticommutassero (anche se i campi in sé non anticommutano). Inoltre si ha $\overline{\psi(x)\psi(y)} = \overline{\bar{\psi}(x)\bar{\psi}(y)} = 0$, come si capisce anche per via della conservazione della carica.

Per quanto riguarda il fotone, si ottiene:

$$\langle \mathcal{T}\{A^\mu(x)A^\nu(0)\} \rangle = i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p e^{-ipx}}{(2\pi)^4} \frac{\sum_s \epsilon_s^\mu(p) \epsilon_s^\nu(p)}{p^2 + i\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 p e^{-ipx}}{(2\pi)^4} \frac{i P_T^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} \quad (101)$$

con $P_T^{\mu\nu}$ proiettore trasverso dato dalla (78). In altre gauge, come vistone nella discussione che porta alla (114), si aggiunge alla Lagrangiana il termine di gauge fixing, che produce la sostituzione . Quindi ingenerale ($n = \omega(1, -\hat{\mathbf{k}}$):

$$\langle \mathcal{T}\{A^\mu(x)A^\nu(0)\} \rangle = \int \frac{d^4 p e^{-ipx}}{(2\pi)^4} \frac{i P^{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon}; \quad P_\xi^{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}; \quad P_T^{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} + \frac{k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu}{(nk)} \quad (102)$$

In tutti i casi è lecito utilizzare $P^{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}$ in quanto i termini in k_μ, k_ν non contribuiscono per via dell'identità di Ward.

3.6 Simmetrie e correnti conservate

Ora che abbiamo visto come funziona la quantizzazione dei campi possiamo ritornare sulla corrente di Noether per fare alcuni esempi. Come prototipo di Lagrangiana consideriamo quella di un campo scalare carico libero $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$. La prima trasformazione che consideriamo è la traslazione, che agisce sulle coordinate spaziotemporali come $x \rightarrow x' = x - a$ con a quadrivettore costante. Questa è una simmetria della Lagrangiana. infatti $\phi'(x') = \phi(x)$ stabilisce semplicemente che ϕ e ϕ' hanno lo stesso valore nel punto fisico corrispondente. Inoltre $\partial_\mu \phi(x) = \partial_\mu \phi'(x') = \partial'_\mu \phi'(x')$ in quanto le derivate nelle due variabili coincidono essendo a costante. Il punto di vista finora descritto è quello *passivo*, in cui vedo come funzionano le cose nel sistema trasformato primato. Per trovare la corrente di Noether col metodo utilizzato per ottenere la (36) occorre adottare il punto di vista *attivo*, cioè vedere la trasformazione come variazione dei campi nel punto x . Per farlo basta notare che $\phi'(x - a) = \phi(x) \Rightarrow \phi'(x) = \phi(x + a)$ e quindi $\Delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) \approx a_\mu \partial^\mu \phi(x)$. Con il punto di vista attivo però la Lagrangiana non è strettamente invariante bensì cambia per una quadridivergenza. Infatti $\Delta(\phi^* \phi) = \phi^* a_\mu \partial^\mu \phi + c.c. = a_\mu \partial^\mu (\phi^* \phi)$ con espressione analoga per il termine cinetico, per cui $\Delta\mathcal{L} = a_\mu \partial^\mu \mathcal{L}$. L'espressione della corrente di Noether, in base alla (36) diventa quindi:

$$J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} a_\nu \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^*} a_\nu \partial^\nu \phi^* - a_\mu \mathcal{L} = a_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi^*} \partial^\nu \phi^* - \mathcal{L} g_{\mu\nu} \right] \equiv a_\nu T^{\mu\nu} \quad (103)$$

e quindi il tensore $T^{\mu\nu}$, detto energia-impulso per ragioni che ora vedremo, è conservato nel senso che $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Prima di proseguire, è opportuno osservare che il teorema di Noether viene in letteratura

talvolta scritto in maniera diversa: ad esempio [1]:

$$J^\mu = [\mathcal{L}g^{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}] \delta x_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi \quad (104)$$

Il punto di vista è quello *passivo*, e compare $\delta \phi = \phi'(x') - \phi(x)$ anziché $\Delta \phi = \phi'(x) - \phi(x)$. Nel caso delle traslazioni $\delta \phi$ è 0 perché la trasformazione coinvolge solo le coordinate, e solo il primo termine della (104) contribuisce. Sommando su ϕ e ϕ^* otteniamo esattamente la (103). I due punti di vista, attivo e passivo, sono dunque equivalenti.

Le componenti del tensore energia-impulso soddisfano $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$, quindi ho 4 cariche conservate, una per ogni valore di ν , tali che $\partial_0 \int d^3x T^{0\nu} = 0$. Vediamo adesso che queste cariche costituiscono l'operatore di quadriimpulso, che è quindi conservato. Infatti:

$$\int d^3x T^{00} =: \int d^3x [\dot{\phi}^* \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \phi^* + m^2 \phi^* \phi] := \int d^3\mathbf{p} p_0 [a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) + b^\dagger(\mathbf{p})b(\mathbf{p})] \quad (105)$$

$$\int d^3x T^{0i} =: \int d^3x [\partial_0 \phi^* \partial^i \phi + \partial_0 \phi \partial^i \phi^*] := \int d^3\mathbf{p} p_i [a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{p}) + b^\dagger(\mathbf{p})b(\mathbf{p})] \quad (106)$$

Dalle regole di commutazione si ottiene $[P_\mu, a^\dagger(\mathbf{p})] = p_\mu a^\dagger(\mathbf{p})$, e in maniera simile a quanto visto per l'oscillatore armonico, otteniamo come si trasformano gli operatori di creazione e distruzione per una trasformazione finita di traslazione temporale (generata dall'hamiltoniana) e spaziale (generata dall'operatore di triimpulso). Ad esempio:

$$[P_i, a(\mathbf{p})] = -a(\mathbf{p}) \Rightarrow e^{iP_i x} a(\mathbf{p}) e^{-iP_i x} = a(\mathbf{p}) e^{-ip_i x} \quad [P_i, b^\dagger(\mathbf{p})] = b^\dagger(\mathbf{p}) \Rightarrow e^{iP_i x} b^\dagger(\mathbf{p}) e^{-iP_i x} = b^\dagger(\mathbf{p}) e^{ip_i x} \quad (107)$$

Si ottiene quindi anche $\phi(x) = e^{iP_i x} \phi(0) e^{-iP_i x}$.

3.7 Campi in interazione: la Lagrangiana di QED

La QED (Quantum ElectroDynamics) è teoria con invarianza locale U(1). Per ottenere una Lagrangiana con invarianza locale, partiamo da una generica Lagrangiana con invarianza globale U(1):

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad \phi' = U\phi, U = e^{-i\theta} \quad \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') \quad (108)$$

Se adesso rendiamo la trasformazione locale, $\theta \rightarrow \theta(x)$, la Lagrangiana non è più in generale invariante. Per renderla invariante localmente introduciamo un campo di gauge vettoriale A_μ , che si trasforma come $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$. Definiamo la derivata covariante $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ che ha, diversamente dalla derivata semplice, una "buona" proprietà di trasformazione sotto gauge, nel senso che $D_\mu \phi \rightarrow U D_\mu \phi$. Infatti (e è la carica del campo ϕ):

$$\begin{aligned} & (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi \rightarrow (\partial_\mu + ie(A_\mu + \partial_\mu \theta))e^{-ie\theta} \phi \\ & = (\partial_\mu e^{-ie\theta})\phi + e^{-ie\theta} \partial_\mu \phi + ieA_\mu e^{-ie\theta} \phi + ie\partial_\mu \theta e^{-ie\theta} \phi = e^{-ie\theta} (\partial_\mu + ieA_\mu)\phi \end{aligned}$$

Se nella teoria ci sono diversi campi con cariche q diverse, definiamo la trasformazione dei campi come $\phi_q \rightarrow e^{-iq\theta} \phi_q$ e la derivata covariante come $\partial_\mu \phi_q \rightarrow D_\mu \phi_q = (\partial_\mu + iqA_\mu)\phi_q$. Da quanto detto è facile constatare che la seguente lagrangiana è localmente invariante sotto U(1):

$$\mathcal{L}_{U(1)} = \mathcal{L}(\phi, D_\mu \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (109)$$

avendo definito il tensore, invariante di gauge, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Per esempio, consideriamo uno scalare di carica q_1 e un fermione di carica q_2 . Omettendo i termini di massa $-M^2\phi^*\phi - m\bar{\psi}\psi$ che rimangono invariati, dal minimal coupling otteniamo:

$$\mathcal{L}_0 = (\partial_\mu\phi)^*\partial_\mu\phi + i\bar{\psi}\not{\partial}\psi \rightarrow \mathcal{L}_0 + A^\mu[-q_1(i\phi^*\overleftrightarrow{\partial}_\mu\phi) - q_2\bar{\psi}\gamma_\mu\psi] - q_1^2 A_\mu A^\mu \phi^*\phi \quad (110)$$

A questa vanno aggiunti i termini di gauge fixing e di massa. Il termine di gauge fixing è indispensabile per risolvere un'ambiguità nella definizione del propagatore. In effetti se consideriamo un campo vettore accoppiato con una corrente, $\mathcal{L} = -1/4F^2 + jA$, le equazioni del moto:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \Rightarrow \partial_\mu\partial^\mu A_\nu - \partial_\mu\partial^\nu A_\mu = j_\nu \quad (111)$$

si scrivono in trasformata di Fourier:

$$(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu)A^\mu = j_\nu \quad (112)$$

La corrispondente funzione di Green soddisfa, per definizione:

$$A_\mu = G_{\mu\nu}j^\nu \Rightarrow (-k^2 g_{\mu\alpha} + k_\mu k_\alpha)G^{\alpha\nu} = g_\mu^\nu \quad (113)$$

Ma quest'ultima equazione non ha soluzione, come si vede dal fatto che $(-k^2 g_{\mu\alpha} + k_\mu k_\alpha)k^\alpha = 0$, che è collegato all'invarianza di gauge. Per risolvere questa ambiguità si può ad esempio aggiungere alla Lagrangiana un termine $\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$ (ξ -gauge). In questo modo le equazioni del moto cambiano e il propagatore soddisfa:

$$\left(-k^2 g_{\mu\alpha} + k_\mu k_\alpha\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\right)G^{\alpha\nu} = g_\mu^\nu \Rightarrow G_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2}\left((1 - \xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - g_{\mu\nu}\right) \quad (114)$$

Una delle scelte più comuni è la gauge di Feynman $\xi=1$, e il propagatore ha al numeratore il semplice termine $g_{\mu\nu}$.

Per finire scriviamo la Lagrangiana di QED, che coinvolge l'elettrone, fermione di carica $-e$ dove e è il modulo della carica dell'elettrone. Da quanto visto sopra si ha:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{g.f.} + \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi + eA^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad (115)$$

Normalmente utilizzeremo la gauge di Feynman, $\mathcal{L}_{g.f.} = \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2$. Il termine di interazione risulta semplicemente $\mathcal{L}_I = eA^\mu\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$.

3.8 Simmetrie discrete: C,P,T

Non tutte le trasformazioni sono continue: alcune di esse sono discrete, e qui discuto la coniugazione di carica C, la parità P e l'inversione temporale T.

La coniugazione di carica manda una particella nella particella di carica opposta (antiparticella). Così l'elettrone viene trasformato nel positrone con carica $+$, il protone nell'antiprotone con carica $-$ e così via. Considerando prima un campo scalare, la coniugazione di carica manda il campo relativo alla particella (a) nel campo relativo all'antiparticella (b):

$$Ca_{\mathbf{p},s}C^{-1} = b_{\mathbf{p},s} \quad Cb_{\mathbf{p},s}C^{-1} = a_{\mathbf{p},s} \quad (116)$$

dove si è considerata anche la possibilità di un indice di spin s . Il campo ϕ trasforma quindi come:

$$\phi(x) = \int d[p](a_{\mathbf{p}}e^{-ipx} + b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx}) \xrightarrow{\mathcal{C}} \int d[p](b_{\mathbf{p}}e^{-ipx} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ipx}) = \phi^*(x) \quad (117)$$

Come ci si attende dunque, la coniugazione di carica trasforma il campo ϕ che contiene operatori di distruzione di particella e creazione di antiparticella nel campo ϕ^* che contiene operatori di distruzione di antiparticella e creazione di particella. La corrente di carica di Noether conservata si trasforma come $j_\mu = \phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi \rightarrow \mathcal{C}\phi^*\mathcal{C}^{-1} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \mathcal{C}\phi\mathcal{C}^{-1} = \phi \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi^* = -j_\mu$, cioè la corrente cambia segno per coniugazione di carica come ci si attenderebbe.

La trasformazione di carica per un fermione è un pò meno ovvia. Infatti:

$$\psi(x) \xrightarrow{\mathcal{C}} \int d[p](b_{s,\mathbf{p}}u_{s,\mathbf{p}}e^{-ipx} + a_{s,\mathbf{p}}^\dagger v_{s,\mathbf{p}}e^{ipx}) \quad (118)$$

che però non coincide con $\psi^*(x) \sim a_{s,\mathbf{p}}^\dagger u_{s,\mathbf{p}}^*e^{ipx} + b_{s,\mathbf{p}}v_{s,\mathbf{p}}^*e^{-ipx}$. Tuttavia dalle soluzioni esplicite dell'equazione di Dirac si ottiene $u_s = -i\gamma^2 v_s^*$, $v_s = -i\gamma^2 u_s^*$, come conseguenza del fatto che $\eta_\pm = -i\sigma_2 \eta_\mp^*$ (esercizio: dimostrare queste relazioni sulla base delle soluzioni esplicite fornite in 2.4.2; che relazione c'è col fatto che $\psi_c = -i\sigma_2 \psi_L^*$ trasforma come un bispinore R?). Quindi possiamo scrivere $\mathcal{C}\psi(x)\mathcal{C}^{-1} = -i\gamma^2 \psi^*(x)$. (Esercizio: usando la trasformazione appena provata, dimostrare che $\mathcal{C}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi\mathcal{C}^{-1} = -\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$, cioè la corrente cambia segno per coniugazione di carica come ci si attenderebbe).

La parità manda un vettore $x = (x_0, \mathbf{x})$ nel vettore $x^P = (x_0, -\mathbf{x})$. In maniera analoga a quanto visto per la coniugazione di carica, è facile mostrare che se $a(\mathbf{p}) \rightarrow \mathcal{P}a(\mathbf{p})\mathcal{P}^{-1} = a(-\mathbf{p})$, allora il campo scalare si comporta come $\phi(x) \rightarrow \mathcal{P}\phi(x)\mathcal{P}^{-1} = \phi(x^P)$. L'azione è invariante in quanto lo Jacobiano della trasformazione da x a x^P è 1. Per quanto riguarda i fermioni la situazione è più complessa in quanto la parità (vedi eq. (23) manda spinori left in spinori right e viceversa. In notazione quadrispinoriale possiamo quindi dire che $\psi(x) \rightarrow \gamma_0\psi(x^P)$. Si ha:

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \xrightarrow{\mathcal{P}} \bar{\psi}\gamma_0(\gamma_0, \gamma_i)\gamma_0\psi = \bar{\psi}(\gamma_0, -\gamma_i)\psi \quad \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \xrightarrow{\mathcal{P}} \bar{\psi}\gamma_0(\gamma_0\gamma_5, \gamma_i\gamma_5)\gamma_0\psi = \bar{\psi}(-\gamma_0\gamma_5, \gamma_i\gamma_5)\psi \quad (119)$$

Quindi $j_\mu \equiv \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$ si trasforma come un vettore, cioè le componenti spaziali cambiano segno mentre quella temporale non cambia segno. Invece $j_\mu^5 \equiv \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ si trasforma come uno pseudovettore, o vettore assiale: la componente temporale cambia segno mentre quelle spaziali restano invariate. Sotto parità il campo elettromagnetico si comporta come un vettore, $A_\mu \rightarrow A_\mu^P$, per cui la combinazione $j_\mu A^\mu$ che compare nelle interazioni è invariante: $j_\mu A^\mu \rightarrow j_\mu^P A^\mu = j_\mu A^\mu$. Invece $j_{5\mu} A^\mu \rightarrow -j_{5\mu}^P A^\mu = -j_{5\mu} A^\mu$. Nelle interazioni deboli compare ad esempio la combinazione V-A e l'interazione non è invariante: $(j_\mu - j_\mu^5)A^\mu \xrightarrow{\mathcal{P}} (j_\mu + j_\mu^5)A^\mu$.

4 Matrice S, sezioni d'urto, decadimenti al primo ordine perturbativo

4.1 Teoria delle perturbazioni dipendente dal tempo

La rappresentazione più conveniente per la teoria delle perturbazioni è quella di interazione, nella quale L'Hamiltoniana totale viene spezzata nella somma di quella libera (esattamente risolvibile)

e di quella di interazione: $H = H_0 + V$. Gli stati in rappresentazione di interazione sono dati da $\Psi_I = \exp(iH_0t)\Psi_S$ dove Ψ_S è lo stato in rappresentazione di Schrödinger, che soddisfa $i\dot{\Psi}_S = H\Psi_S$. Gli operatori da $O_I = \exp(iH_0t)O_S \exp(-iH_0t)$ ed evolvono quindi con la Hamiltoniana libera: $i\dot{O}_I = [O_I, H_0]$. L'operatore di evoluzione è definito da $\Psi_I(t) = \mathcal{U}_I(t, t_0)\Psi_I(t_0)$. Dalla definizione di Ψ_I si ricava $i\dot{\Psi}_I(t) = H_I(t)\Psi_I(t)$ con $H_I(t) = e^{iH_0t}V e^{-iH_0t}$. L'equazione per l'operatore di evoluzione diventa:

$$i\dot{\Psi}_I(t) = H_I(t)\Psi_I(t) \quad \Psi_I(t = t_0) = \Psi(t_0) \quad \Leftrightarrow \quad i\frac{\partial \mathcal{U}_I(t, t_0)}{\partial t} = H_I(t)\mathcal{U}_I(t, t_0), \quad \mathcal{U}_I(t_0, t_0) = 1 \quad (120)$$

Questa equazione si può risolvere perturbativamente introducendo un parametro "piccolo" g che parametrizza l'interazione: $H_I \rightarrow gH_I$ e sviluppando in serie di g l'operatore di evoluzione: $\mathcal{U}_I(t, t_0) = \mathcal{U}_I^{(0)} + g\mathcal{U}_I^{(1)} + g^2\mathcal{U}_I^{(2)} + \dots$. La speranza è che i primi termini della serie forniscano una buona approssimazione, e che i termini successivi siano man mano più piccoli.

Per risolvere la (120) sostituiamo l'espansione in serie di potenze di g e uguagliamo membro a membro ottenendo:

$$i\frac{\partial \mathcal{U}_I^{(0)}}{\partial t} + ig\frac{\partial \mathcal{U}_I^{(1)}}{\partial t} + ig^2\frac{\partial \mathcal{U}_I^{(2)}}{\partial t} + \dots = gH_I\mathcal{U}_I^{(0)} + g^2H_I\mathcal{U}_I^{(1)} + \dots \Rightarrow i\frac{\partial \mathcal{U}_I^{(0)}}{\partial t} = 0, \quad i\frac{\partial \mathcal{U}_I^{(1)}}{\partial t} = H_I\mathcal{U}_I^{(0)}, \quad \dots \quad (121)$$

La prima equazione all'ultimo membro della (121) comporta che $\mathcal{U}_I^{(0)}(t, t_0) = 1$. La seconda è risolta da $\mathcal{U}_I^{(1)}(t, t_0) = -i \int_{t_0}^t H_I(t') dt'$. All'ordine g^2 si ottiene $i\frac{\partial \mathcal{U}_I^{(2)}}{\partial t} = H_I\mathcal{U}_I^{(1)}$ e quindi $\mathcal{U}_I^{(2)}(t, t_0) = (-i)^2 \int_{t_0}^t H_I(t'') dt'' \int_{t_0}^{t''} dt' H(t')$. In quest'ultima espressione si nota un ordinamento dei tempi: $t_0 < t' < t'' < t$. Procedendo iterativamente, è facile mostrare che:

$$\mathcal{U}_I(t, t_0) = \sum_n (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n H_I(t_n) \dots H_I(t_1) \equiv \mathcal{T} \exp[-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt'] \quad H_I(t) = e^{iH_0t}V e^{-iH_0t} \quad (122)$$

dove \mathcal{T} è l'operatore di ordinamento temporale. Notare però che la (122) è una soluzione puramente formale: a livello di calcolo per osservabili concrete è molto difficile andare oltre i primi termini della serie. Nella pratica, in teorie come la QED, la QCD e le interazioni deboli solo i primi 2 o 3 termini sono stati calcolati, e sono di solito sufficienti.

Possiamo dare una forma alternativa alla (122); ad esempio il secondo termine si scrive:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 H_I(t_2) H_I(t_1) \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 [\theta(t_2 - t_1) H_I(t_2) H_I(t_1) + \theta(t_1 - t_2) H_I(t_1) H_I(t_2)] \equiv \frac{1}{2} \int \mathcal{T}\{H_I(t_1) H_I(t_2)\} \end{aligned}$$

in quanto i due integrali che compaiono nella riga di sotto sono identici per scambio di t_1 con t_2 . Espressioni analoghe valgono per il termine n-esimo, per cui (notare il fattore $1/n!$ rispetto alla (122)):

$$\mathcal{U}_I(t, t_0) = \mathcal{T} \exp[-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt'] = \sum_n \frac{(-i)^n}{n!} \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^t dt_n \mathcal{T}\{H_I(t_1) \dots H_I(t_n)\} \quad (123)$$

Per descrivere un esperimento di scattering, si può pensare che l'interazione sia spenta per tempi molto lontani sia nel futuro che nel passato; si può ad esempio descrivere questa situazione con uno

spegnimento adiabatico $H_I \rightarrow e^{-|\varepsilon t|} H_I$. Gli stati iniziali ($t \rightarrow -\infty$) e finali ($t \rightarrow \infty$) sono quindi autostati dell'Hamiltoniana libera: $H_0|f, i\rangle = E_{f,i}|f, i\rangle$, cioè sono onde piane*. La quantità rilevante è la probabilità di transizione da uno stato che è un'onda piana entrate a $t = -\infty$ ad uno stato di onda piana uscente a $t = \infty$. Questa probabilità è il modulo quadro dell'ampiezza di transizione $\langle f|U_I(-\infty, \infty)|i\rangle \equiv S_{fi}$, detto anche elemento di matrice S. Ad esempio nel caso di scattering da un potenziale esterno $V(\mathbf{x}, t)$ e al primo ordine perturbativo si ha:

$$S_{fi} = \langle f| \left[1 - i \int_{-\infty}^{\infty} e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} dt \right] |i\rangle = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) \langle f|V|i\rangle \quad (124)$$

Il primo termine dell'ultimo membro descrive il “non scattering”, cioè è collegato al processo in cui la particella entrante non viene deviata. Il secondo termine è quello di scattering vero e proprio, ed è quello che analizzeremo in vari casi in questo corso.

Per capire cosa succede agli ordini successivi dello sviluppo in serie, consideriamo l'espansione:

$$\langle f|U(-\infty, \infty)|i\rangle = \langle f|i\rangle - i \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle f|e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}|i\rangle - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t \langle f|dt' e^{iH_0 t} V e^{-iH_0(t-t')} V e^{-iH_0 t'} |i\rangle + \dots \quad (125)$$

dove i puntini indicano ordini superiori in H_I . Per dare un significato all'ultimo integrale, occorre fare la sostituzione $V \rightarrow V e^{-\varepsilon|t|}$ (spegnimento adiabatico) e dopo aver traslato $\tau = t - t'$ si ottiene:

$$- \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(E_i - E_f)t} \int_0^{\infty} d\tau \langle f|V e^{i(E_f - H_0 + i\varepsilon)\tau} V|i\rangle = -2\pi i \delta(E_f - E_i) \langle f|V \frac{1}{E_f - H_0 + i\varepsilon} V|i\rangle \quad (126)$$

Procedendo in maniera analoga per gli ordini successivi della teoria delle perturbazioni, è possibile mostrare che la matrice S soddisfa l'equazione ricorsiva (detta di Lippmann-Schwinger):

$$S = 1 - 2\pi i T \delta(E_f - E_i) \quad T = V + V G_0 T \quad G_0 = \frac{1}{E_f - H_0 + i\varepsilon} \quad (127)$$

Una applicazione diretta della (124) per ottenere quantità fisiche si scontra subito col fatto che le probabilità di transizione si ottengono dal modulo quadro dell'ampiezza, che a sua volta contiene una $\delta(E_f - E_i)$. Che significato dare ad una espressione come $[\delta(E_f - E_i)]^2$? Uso qui un trucco matematico, detto “spegnimento adiabatico del potenziale”, che consiste nella sostituzione $V \rightarrow V e^{-\varepsilon|t|}$, $\varepsilon > 0$. Dal punto di vista fisico, la giustificazione sta nel fatto che il potenziale $V(\mathbf{x})$ responsabile del decadimento non può essere diverso da zero per tempi arbitrariamente lunghi. Il tempo fisico di interazione è qui $T \sim \frac{1}{\varepsilon}$. Alla fine dei calcoli si fa di nuovo il limite $\varepsilon \rightarrow 0$. Dalla (124) la probabilità di transizione dallo stato iniziale a quello finale è ($\Delta \equiv E_f - E_i$):

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \langle f|V|i\rangle e^{-\varepsilon|t|} e^{i\Delta t} dt \right|^2 = |\langle f|V|i\rangle|^2 \left| \frac{i}{\Delta + i\varepsilon} - \frac{i}{\Delta - i\varepsilon} \right|^2 = |\langle f|V|i\rangle|^2 \left(\frac{2\varepsilon}{\Delta^2 + \varepsilon^2} \right)^2 \rightarrow 2\pi T \delta(E_f - E_i) |\langle f|V|i\rangle|^2 \quad (128)$$

Notare che come regola mnemonica si passa dalla (124) alla (128) con la sostituzione $\delta^2(E_f - E_i) = \frac{T}{2\pi} \delta(E_f - E_i)$. L'ultimo passaggio necessita di qualche commento. Si è utilizzato:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(x^2 + 1)^2} dx = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2\varepsilon}{\Delta^2 + \varepsilon^2} \right)^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} 2\pi \delta(E_f - E_i) \quad (129)$$

*Va detto che gli stati fisici in realtà sono pacchetti d'onda, sovrapposizione di onde piane; i risultati che si ottengono in approssimazione di onda piana sono gli stessi se il pacchetto d'onda è molto esteso rispetto alla zona di interazione, approssimazione che vale sempre nei casi qui trattati. Una buona discussione di cosa succede in caso contrario si trova ad es. in [6]

Per ottenere dalla (128) il risultato finale bisogna ricordare che la quantità fisicamente rilevante è la probabilità di transizione per unità di tempo; si pensi ad esempio a un decadimento radiativo in cui si misura il “rate”, cioè il numero di decadimenti al secondo ad esempio. Dividendo per T si ottiene quindi:

$$d\omega_{fi} = 2\pi\delta(E_f - E_i)|\langle f|V|i\rangle|^2 \quad (\text{probabilità di transizione } i \rightarrow f \text{ per unità di tempo}) \quad (130)$$

Consideriamo il caso in cui lo stato finale è costituito da una particella di impulso \mathbf{p}_f . La particella emessa finale è un’onda piana nel continuo $\sim e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}$. Tuttavia, in maniera analoga a quanto fatto per la variabile tempo, consideriamo un volume di interazione finito L^3 , facendo alla fine il limite $L \rightarrow \infty$. Gli impulsi sono allora quantizzati:

$$\mathbf{p}_i^n = \frac{2\pi}{L}n; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2, 3 \quad (131)$$

Per ottenere una quantità fisica dalla (130) consideriamo la probabilità che il sistema faccia una transizione a un piccolo gruppo di stati raggruppati intorno a un dato stato $|\bar{\mathbf{p}}\rangle$. Il numero di stati in un piccolo volume $d^3\mathbf{p}$ intorno a $|\bar{\mathbf{p}}\rangle$ (spazio delle fasi) è $d\phi_{\mathbf{p}} = \frac{L^3}{(2\pi)^3}d^3\mathbf{p} = \frac{V}{(2\pi)^3}d^3\mathbf{p}$. Si ottiene

$$d\Gamma = d\omega d\phi_{\mathbf{p}} = 2\pi\delta(E_f - E_i)|\langle f|V|i\rangle|^2 \frac{V}{(2\pi)^3}d^3\mathbf{p}_f \quad (132)$$

Questa espressione è detta approssimazione di Born, o al primo ordine; l’espressione più generale si ottiene sostituendo V con T dato dalla (127); in generale infatti (Esercizio: dimostrarlo) si ha $S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi iT_{fi}$.

4.2 Esempi in MQ nonrelativistica

4.2.1 Scattering da potenziale

Come prima applicazione della (132) consideriamo lo scattering da potenziale di una particella di massa m . E’ questo il caso ad esempio dell’esperimento di Rutherford, o della diffusione di un elettrone da potenziale Coulombiano; il rinculo del nucleo viene trascurato. La sezione d’urto è data dal numero di particelle finali in un dato angolo solido per unità di tempo diviso per il flusso di particelle iniziali, cioè il numero di particelle in una data area per unità di tempo divisa l’area stessa. La sezione d’urto ha quindi le dimensioni di un’area. Il flusso iniziale si ottiene considerando il numero di particelle che attraversano una data area A nel tempo dt , cioè $\rho Avdt$ dove ρ è la densità e v la velocità delle particelle, e dividendolo per l’area A , ottenendo $\phi_I = \rho v$. Le particelle iniziali e finali sono stati asintoticamente liberi, cioè particelle libere (onde piane) per tempi molto grandi nel passato e nel futuro. v vale 1 per un fotone, e $|\mathbf{p}_i|/m$ per una particella nonrelativistica di massa m , che è il caso che stiamo considerando. ρ è invece $1/V$ per le funzioni d’onda piana con usuale normalizzazione $f_p = 1/\sqrt{V}e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}$, con una particella nel volume V . Si ottiene quindi:

$$d\sigma = \frac{mV}{|\mathbf{p}_i|} 2\pi\delta(E_f - E_i)|\langle f|V|i\rangle|^2 \frac{V}{(2\pi)^3}d^3\mathbf{p}_f \rightarrow d\sigma = \frac{m}{|\mathbf{p}_i|} 2\pi\delta(E_f - E_i)|\langle f|V|i\rangle|^2 \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \quad (133)$$

dove l’ultimo passaggio è conseguenza del fatto che per convenienza si calcola $\langle f|V|i\rangle$ utilizzando $\langle f|\mathbf{x}\rangle = e^{i\mathbf{p}_f\mathbf{x}}$ e analogamente per $|i\rangle$; in questo modo il fattore V^2 scompare. Inoltre in coordinate

polari $d^3\mathbf{p}_f = |\mathbf{p}_f|^2 d|\mathbf{p}_f| d\Omega$ con $d\Omega = d \cos \theta d\phi$, per cui:

$$\delta(E_f - E_i) d^3 p_f = \delta\left(\frac{|\mathbf{p}_f|^2}{2m} - \frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m}\right) |\mathbf{p}_f|^2 d|\mathbf{p}_f| d\Omega = m |\mathbf{p}| d\Omega \Big|_{|\mathbf{p}|=|\mathbf{p}_f|=|\mathbf{p}_i|}$$

L'elemento di matrice dell'ampiezza di transizione è:

$$\langle f|V|i\rangle = \int d^3x \langle f|V|\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}|i\rangle = \int d^3x V(\mathbf{x}) \langle f|\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}|i\rangle = \int d^3x V(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)\mathbf{x}} \equiv \tilde{V}(\mathbf{q}) \quad (134)$$

dove si è definito il momento trasferito $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$. La sezione d'urto dipende dunque dalla trasformata di Fourier del potenziale, calcolata al momento trasferito. Mettendo insieme i vari pezzi, si ottiene:

$$d\sigma = \frac{m^2}{(2\pi)^2} |\tilde{V}(\mathbf{q})|^2 d\Omega; \quad \tilde{V}(\mathbf{q}) = \int d^3x V(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}; \quad (135)$$

Consideriamo ora il caso di un potenziale elettrostatico generato da una distribuzione di carica $\rho(\mathbf{x})$. In trasformata di Fourier l'equazione di Poisson $\nabla^2 V(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$ ha soluzione $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \tilde{\rho}(\mathbf{q})/q^2$. Avendo in mente il campo generato da un nucleo, Nel caso di distribuzione puntiforme, $\rho = e\delta^3(x)$ dove e è il modulo della carica dell'elettrone, per cui $\tilde{V}(\mathbf{q}) = e/q^2$. Nell'Hamiltoniana compare in realtà l'energia potenziale e non il potenziale, per cui nel caso in cui un elettrone diffonda dal campo di un nucleo si ha (con un piccolo abuso di notazione) $\tilde{V}(\mathbf{q}) = -e^2/q^2$. La sezione d'urto risulta quindi:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{m^2}{(2\pi)^2} \frac{e^4}{q^4} = \frac{m^2}{p^4} \frac{\alpha^2}{(1 - \cos \theta)^2} \quad (136)$$

Notare la singolarità per $\theta \rightarrow 0$ che però è non fisica, nel senso che corrisponde a eventi con elettroni molto distanti dal laboratorio (impact parameter enorme) ed è collegata al fatto che il range del potenziale è infinito, anche questo non realistico a causa del neutralizzarsi di cariche (ad es in un atomo).

Supponiamo ora di avere un elettrone con impulso $|p| = 1$ KeV (nonrelativistico quindi, dato che $m \approx .5$ MeV). La sezione d'urto si scrive in questo caso:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(.5MeV)^2}{(1KeV)^4} \left(\frac{1}{137}\right)^2 \frac{1}{(1 - \cos \theta)^2} \approx \frac{1.3 \times 10^7}{MeV^2} \frac{1}{(1 - \cos \theta)^2} \approx 5.3 \times 10^{-15} \frac{1}{(1 - \cos \theta)^2} cm^2 \quad (137)$$

avendo tenuto conto che $\hbar c \approx 200MeV10^{-13}cm$. Come si vede, la sezione d'urto è compatibile con il raggio di Bohr al quadrato che fa $10^{-16}cm^2$.

Supponiamo ora che esista una distribuzione di carica non puntiforme $\rho(\mathbf{x})$ cui corrisponde una trasformata di Fourier $\tilde{\rho}(\mathbf{q})^*$. Supponendo che la carica sia la stessa del caso puntiforme, otteniamo $\tilde{\rho}(0) = 1$. Come è noto dalle proprietà della trasformata di Fourier, se $\rho(\mathbf{x})$ è significativamente diversa da 0 in un intervallo Δx intorno all'origine (con $x = |\mathbf{x}|$), e lo stesso vale per la sua trasformata di Fourier in un intervallo Δq , si ha $\Delta x \cdot \Delta q \sim 1$. Ora, fissata l'energia iniziale del fascio incidente $|\mathbf{p}_i| \equiv |\mathbf{p}|$, $q = |\mathbf{q}|$ varia tra 0 (per $\mathbf{p}_f = \mathbf{p}_i$) e $2|\mathbf{p}|$ (per $\mathbf{p}_f = -\mathbf{p}_i$). Consideriamo prima il caso che $|\mathbf{p}| \ll \Delta q$. In questo caso la particella-sonda "vede" una carica puntiforme. Infatti $\tilde{\rho}(0) = 1$ e rimane 1 per tutto l'intervallo in $|\mathbf{q}|$ esplorato dato che $|\mathbf{p}| \ll \Delta q$. Nel caso-limite opposto, $|\mathbf{p}| \gg \Delta q$, la particella-sonda "vede" una distribuzione centrata nell'origine, ovvero una carica uniforme diffusa: la

*si è supposto che la distribuzione di carica sia $e\rho(\mathbf{x})$ con e carica della particella puntiforme.

diffusione avviene solo in avanti e per piccolissimi angoli intorno a $\theta = 0$. Per finire, se $|\mathbf{p}| \gtrsim \Delta q \sim \frac{1}{\Delta x}$, la particella-sonda "vede" tutti i dettagli della distribuzione $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$ al variare di \mathbf{q} fra 0 e $2|\mathbf{p}|$ (vedi figura.....). Questo è all'origine della necessità di utilizzare acceleratori di particelle sempre più veloci per esplorare distanze sempre più piccole in base al principio di Heisenberg $|\mathbf{p}|\Delta x \gtrsim 1$.

Esercizio: Nell'esperimento di Rutherford, particelle alfa (2 protoni+2 neutroni) con velocità di circa 10^7 m/s bombardano nuclei pesanti. Come si confronta l'impulso delle particelle con le dimensioni tipiche dell'atomo? E del nucleo? Commentare.

4.2.2 Emissione spontanea da un atomo

In questo paragrafo analizziamo il caso di un atomo eccitato che "decade" ad un livello energetico più basso emettendo un fotone. Questo processo non può essere descritto in MQ quantistica relativistica: gli atomi iniziale e finale sono descritti da funzioni d'onda ma la radiazione elettromagnetica viene creata nello stato finale essendo assente in quello iniziale, ed è quindi necessario quantizzare il campo elettromagnetico: i processi di creazione e distruzione di fotoni in questo formalismo vengono descritti dagli operatori a, a^\dagger . Questo è in effetti un caso "misto", nel senso che l'atomo viene trattato col formalismo di MQ nonrelativistica e il fotone col formalismo di teoria dei campi.

Identifichiamo adesso l'Hamiltoniana di interazione radiazione-materia. Un elettrone in un campo elettromagnetico è soggetto alla Forza di Lorentz $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$, dove e è la carica dell'elettrone con segno, e \mathbf{v} la sua velocità. Questa forza si deriva dalla Hamiltoniana:

$$H = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} + eA_0 \quad (138)$$

Difatti le equazioni di Hamilton $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$ si scrivono*:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = (p_j - eA_j)e\partial_i A_j - e\partial_i A_0 \\ \dot{x}_i = \frac{p_i - eA_i}{m} \end{cases} \Rightarrow m \ddot{x}_i = e(-\dot{A}_i + v_j \partial_i A_j - \partial_i A_0) = e(-\partial_t A_i - \partial_i A_0 + v_j \partial_i A_j - v_j \partial_j A_i) \quad (139)$$

Ricordandosi che $E_i = -\partial_i A_0 - \partial_t A_i, B_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$ e utilizzando $\epsilon_{kij} \epsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$, si ottiene che l'ultima espressione è proprio $e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})_i$.

L'equazione di Schrödinger che si ottiene dalla Hamiltoniana (138) con la usuale sostituzione $p_\mu \rightarrow i\partial_\mu$ cioè $\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla, H \rightarrow i\partial_t$, si scrive:

$$\frac{(-i\nabla - e\mathbf{A})^2}{2m} \psi + eA_0 \psi = i\partial_t \psi \quad iD_0 \psi = \frac{(i\mathbf{D})^2}{2m} \psi \quad D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu \quad (140)$$

La derivata che appare in (140) è detta *covariante*. È importante osservare che il passaggio dalla equazione che descrive l'elettrone libero a quella dell'elettrone in interazione col campo elettromagnetico si effettua in maniera molto semplice, tramite la sostituzione $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$.

La (140) ammette una simmetria che è di fondamentale importanza nella fisica moderna: la simmetria di gauge, definita dalle trasformazioni:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x) \quad \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-ie\chi(x)} \psi(x) \quad (141)$$

*ricordarsi che lungo le traiettorie $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ per il campo $A_i(t, \mathbf{x}(t))$ si ha $\dot{A}_i = \partial_t A_i + \dot{x}_j \partial_j A_i$

Infatti la derivata covariante ha una regola di trasformazione molto semplice rispetto alle (141):

$$D_\mu \psi \rightarrow D'_\mu \psi' = (\partial_\mu + ieA_\mu + ie\partial_\mu \chi) e^{-ie\chi} \psi = e^{-ie\chi} D_\mu \psi \quad (142)$$

ed è detta per questo covariante*. Una volta notato che si ha anche $\mathbf{D}^2 \psi \rightarrow e^{-ie\chi} \mathbf{D}^2 \psi$, è semplice mostrare che l'equazione di Schrödinger (140) è covariante rispetto alle trasformazioni di gauge (141), cioè:

$$iD_0 \psi = \frac{(i\mathbf{D})^2}{2m} \psi \Rightarrow iD'_0 \psi' = \frac{(i\mathbf{D}')^2}{2m} \psi' \quad (143)$$

In maniera analoga, le equazioni relativistiche di Klein-Gordon e di Dirac:

$$(D_\mu D^\mu + m^2) \psi = 0 \quad (i\mathcal{D} - m) \psi = 0 \quad (144)$$

sono covarianti secondo le trasformazioni di gauge, e descrivono particelle di spin 0 e di spin $\frac{1}{2}$ in interazione col campo elettromagnetico. La prescrizione per ottenere le interazioni è data semplicemente dalla sostituzione $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$. È importante osservare che le trasformazioni di gauge (141) dipendono dal punto dello spazio-tempo x (χ dipende da x) e sono perciò dette *locali*.

In teoria di campo si procede spesso in maniera inversa a quanto visto per l'equazione di Schrödinger, cioè si impone la simmetria (di gauge in questo caso) e questa simmetria, a sua volta, determina le interazioni. Ad esempio in questo caso, il richiedere l'invarianza sotto trasformazioni *locali* come quelle di gauge definite dalla (141) impone la forma delle interazioni attraverso la sostituzione $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$.

Torniamo ora all'emissione spontanea. Adottiamo la gauge fisica $\partial_i A^i = 0$, di modo che \mathbf{p} commuti con \mathbf{A} , e separiamo l'hamiltoniana nel modo seguente:

$$H = H_0 + V \quad H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + eA_0 \quad V = -e \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}}{m} + e^2 \frac{\mathbf{A}^2}{2m} \quad (145)$$

Il termine in e^2 in V non è rilevante. Infatti, in primo luogo stiamo analizzando il primo ordine perturbativo (in e), in secondo luogo l'operatore \mathbf{A}^2 non ha elementi di matrice nel caso in esame. Infatti, per quanto riguarda il fotone stiamo considerando transizione dallo stato di vuoto allo stato di un fotone, $\langle 0 | a(\mathbf{k}) | V | 0 \rangle$. L'operatore $|\mathbf{A}^2|$, quadratico nei campi di creazione e distruzione, produce termini del tipo $\langle 0 | a(\mathbf{k}) a a | 0 \rangle$, $\langle 0 | a(\mathbf{k}) a^\dagger a^\dagger | 0 \rangle$, $\langle 0 | a(\mathbf{k}) a a^\dagger | 0 \rangle$, $\langle 0 | a(\mathbf{k}) a^\dagger a | 0 \rangle$, che sono tutti 0 in base all'algebra degli operatori e al fatto che $a|0\rangle = \langle 0|a^\dagger = 0$. Non è difficile convincersi che l'operatore di transizione deve essere lineare in a^\dagger . Occorre adesso trovare la giusta normalizzazione degli stati. Sul volume finito gli stati normalizzati a 1 sono $1/\sqrt{V} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ ma sul continuo si ha $\langle a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{p}) \rangle = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})$ per cui $\langle \mathbf{x} | a^\dagger(\mathbf{k}) \rangle = 1/(2\pi)^{\frac{3}{2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ e quindi gli stati normalizzati a 1 sono $\sqrt{(2\pi)^3/V} a^\dagger(\mathbf{k}) | 0 \rangle$. Consideriamo il caso di un insieme di cariche, piuttosto che una sola, avendo in mente gli elettroni di un atomo o i protoni di un nucleo; quanto visto vale lo stesso pur di intendere $\mathbf{x} = \sum_i \mathbf{x}_i$ ecc., dove l'indice i runna su tutte le cariche. Si ha:

$$\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\epsilon} | \mathbf{A}(x) | 0 \rangle = \frac{(2\pi)^3}{V} \langle a_\epsilon(\mathbf{k}) | \sum_s \int \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}} (a_s(\mathbf{p}) \boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{p}) e^{-ipx} + a_s^\dagger(\mathbf{p}) \boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{p}) e^{ipx}) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}) \quad (146)$$

*qui il termine covariante si riferisce alle trasformazioni di gauge (141), non a quelle di Lorentz

avendo indicato con ω l'energia del fotone e avendo supposto che il fotone abbia una polarizzazione combinazione lineare delle due trasverse $\boldsymbol{\epsilon} = c_1\boldsymbol{\epsilon}_1 + c_2\boldsymbol{\epsilon}_2$ cui corrisponde un operatore $a_\epsilon(\mathbf{k}) = c_1a_1(\mathbf{k}) + c_2a_2(\mathbf{k})$. Si ha quindi, per l'elemento di matrice di transizione:

$$\langle f | \langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\epsilon} | e^{\frac{\mathbf{p}\mathbf{A}}{m}} | 0 \rangle | i \rangle = \frac{e}{\sqrt{2\omega V}} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}) \cdot \langle f | e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\mathbf{p}}{m} | i \rangle$$

Se abbiamo in mente transizioni ottiche atomiche, si ha $kx \ll 1$ in quanto l'energia delle transizioni è dell'ordine di grandezza di 1 eV, mentre il raggio di Bohr è $1/(m\alpha) \approx (5KeV)^{-1}$ e quindi $kx \sim 10^{-4}$. Si può quindi porre $e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} = 1$, ottenendo quella che viene chiamata approssimazione di dipolo*. Infatti in questa approssimazione compare l'elemento di dipolo elettrico $e\mathbf{x}$:

$$e \langle f | \frac{\mathbf{p}}{m} | i \rangle = e \langle f | \dot{\mathbf{x}} | i \rangle = ie(E_f - E_i) \langle f | \mathbf{x} | i \rangle \equiv i(E_f - E_i) e\mathbf{x}_{fi} \quad (147)$$

(si è usato, in rappresentazione di interazione, $\dot{\mathbf{x}} = i[H_0, \mathbf{x}]$) e viene detto elemento di matrice di dipolo.

Utilizzando la (132) † possiamo infine scrivere la probabilità di decadimento nella forma:

$$d\Gamma = \frac{e^2}{8\pi^2} \omega |\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{x}_{fi}|^2 d^3\mathbf{k} = \frac{\alpha}{2\pi} \omega_{fi}^3 |\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{x}_{fi}|^2 d\Omega \quad (148)$$

Vogliamo ora calcolare la probabilità totale di decadimento nell'unità di tempo, detta anche larghezza di decadimento (decay width); l'inverso della larghezza di decadimento è la vita media dello stato eccitato $|i\rangle$. Dobbiamo quindi in particolare sommare su tutte le polarizzazioni finali del fotone, cioè calcolare il modulo quadro dell'ampiezza per una data polarizzazione $\boldsymbol{\epsilon}_1$, poi per la polarizzazione $\boldsymbol{\epsilon}_2$, e sommare:

$$\sum_{s=1,2} |\boldsymbol{\epsilon}_s \cdot \mathbf{x}_{fi}|^2 = \sum_s \epsilon_s^i x_{fi}^i \epsilon_s^j x_{fi}^{j*} = x_{fi}^i x_{fi}^{j*} \sum_s \epsilon_s^i \epsilon_s^j = x_{fi}^i x_{fi}^{j*} (\delta^{ij} - \hat{k}^i \hat{k}^j) = |\mathbf{x}_{fi}|^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

avendo definito $(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}_{fi})(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{x}_{fi}^*) = |\mathbf{x}_{fi}|^2 \cos^2 \theta$. Integriamo ora su tutto l'angolo solido, e dato che $\int \sin^2 \theta d\Omega = 8\pi/3$:

$$\Gamma = \sum_f \frac{4\alpha}{3} \omega^3 |\mathbf{x}_{fi}|^2 \quad (149)$$

dove si somma su tutti i possibili stati finali di decadimento.

4.3 Esempi in teoria dei campi relativistica

4.3.1 Matrice S, sezioni d'urto e decadimenti

In teoria dei campi la trattazione svolta nel paragrafo 4.1 vale ancora, solo che si passa a una densità di Lagrangiana; occorre quindi integrare anche su \mathbf{x} . Inoltre normalmente $\mathcal{L}_I = -\mathcal{H}_I$ per cui:

$$S = U(-\infty, \infty) = T \exp[-iH_I(t)dt] = T \exp[+iL_I(t)dt] = T \left\{ \exp \int i\mathcal{L}_I(x) d^4x \right\} \quad (150)$$

*I termini nello sviluppo di Taylor dell'operatore $\exp[-i\mathbf{k}\mathbf{x}]$ corrispondono a quello che si chiama "espansione in multipoli". Tale espansione è necessaria se ad esempio l'elemento di matrice del primo termine, quello di dipolo, è nullo

†la δ di conservazione dell'energia impone $E_f - E_i = -\omega_{fi}$, e viene generata integrando in dt le dipendenze temporali di \mathbf{A} nella (146) e di $\langle f | e^{iH_0 t} \mathbf{p} e^{-iH_0 t} | i \rangle = e^{i(E_f - E_i)t} \langle f | \mathbf{p} | i \rangle$

Siccome siamo in rappresentazione di interazione, \mathcal{L}_I è funzione degli operatori di campo in evoluzione libera. Un punto importante: attenzione a non confondere gli stati fisici con gli operatori di campo. La Lagrangiana che descrive le interazioni è scritta in termini di operatori di campo, quantizzati con la procedura vista sopra. Gli stati fisici evolvono con l'equazione di Schrödinger, che è covariante relativistica perché l'hamiltoniana $H = \int d^3x \mathcal{H}(x)$, scritta in termini degli operatori di campo, trasforma come la componente temporale di un quadriettore. Gli stati asintotici prima e dopo uno scattering sono particelle libere e quindi nella rappresentazione di interazione $\phi_I(t) = \exp(iH_0t)\Phi_S(t)$ non hanno evoluzione temporale.

L'espressione (150) contiene implicitamente una δ di conservazione del quadriimpulso. Infatti, considerando il termine n-esimo:

$$T[\mathcal{L}_I(x_1)\mathcal{L}_I(x_2)\dots\mathcal{L}_I(x_n)] = e^{iPx_1}T[\mathcal{L}_I(0)\mathcal{L}_I(x_2 - x_1)\dots\mathcal{L}_I(x_n - x_1)]e^{iPx_1} \quad (151)$$

avendo tenuto conto che $\mathcal{L}_I(x) = e^{iPx}\mathcal{L}_I(0)e^{-iPx}$ (Esercizio: come mai questa relazione, che abbiamo ricavato per la ϕ , vale anche per \mathcal{L} ?). Integrando sulle variabili $x_1, x_2 - x_1 \dots x_n - x_1$, l'integrale in x_1 produce $(2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)$ dove P_f (P_i) è la somma degli impulsi finali (iniziali).

La matrice S definita dalla (150) è scritta in termini di una espansione perturbativa nel termine di interazione "piccolo" \mathcal{L}_I . Tale espansione permette di calcolare la matrice stessa utilizzando gli operatori di campo liberi. Notare che comunque la (150), che tiene conto di tutti gli ordini, è esatta.

Passiamo ora al calcolo delle quantità fisiche come sezioni d'urto in termini della matrice S. Per far questo, consideriamo un volume V finito e un tempo di interazione $T = t_f - t_i$ finito. La finitezza del volume corrisponde certamente alla finitezza dell'apparato sperimentale, ma è comunque necessaria per poter considerare funzioni d'onda correttamente normalizzate e quindi dare una interpretazione probabilistica. Il passaggio al continuo avviene nel limite di volume e tempo infiniti. Gli stati sono normalizzati a una particella nel volume V:

$$f_p(x) = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{V}} \quad ; \quad \int_V d^3\mathbf{x} f_p^*(x)f_p(x) = 1 \quad \forall x_0 \quad (152)$$

e gli impulsi sono quantizzati nella scatola di volume V e lati L; ogni stato occupa una cella di volume $\frac{(2\pi)^3}{V}$ nello spazio delle fasi:

$$\mathbf{p}_i^n = \frac{2\pi}{L}n \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad \quad d\phi_{\mathbf{p}} = \frac{V}{(2\pi)^3}d^3\mathbf{p} \quad (153)$$

La matrice S si scrive, in termini di M e tenendo conto della conservazione della energia*:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + iT_{fi} = \delta_{fi} + iM_{fi}\delta_{P_f P_i}^4 \quad \delta_{P_f P_i}^4 = \delta_{P_f^0 P_i^0}\delta_{P_f^1 P_i^1}\delta_{P_f^2 P_i^2}\delta_{P_f^3 P_i^3} \quad (154)$$

e la probabilità di transizione per unità di tempo, tenendo conto che $(\delta_{P_f P_i}^4)^2 = \delta_{P_f P_i}^4$:

$$dw_{fi} = \frac{1}{T}|M_{fi}|^2\delta_{P_f P_i}^4\Pi_f\frac{Vd^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \quad (155)$$

*qui P_f e P_i sono gli impulsi totali finali e iniziali: $P_f = \sum_f p_f$. Il simbolo δ indica la delta di Kronecker

Per passare al continuo, $T \rightarrow \infty$ e $V \rightarrow \infty$ occorre fare le sostituzioni:

$$\delta_{P_f P_i}^4 \rightarrow \frac{(2\pi)^4}{VT} \delta^4(P_f - P_i) \quad (156)$$

$$M_{fi} \rightarrow M_{fi} VT \frac{1}{\sqrt{(\Pi_i 2E_i V)(\Pi_f 2E_i V)}} \quad (157)$$

L'equazione (156) si ricava facilmente tenendo presente che

$$\int_L e^{i(p_n - p_{n'})x} dx = L \delta_{nn'} \quad e \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-p')x} dx = 2\pi \delta(p-p') \quad \Rightarrow \quad \delta_{nn'} \leftrightarrow \frac{2\pi}{L} \delta(p-p') \quad (158)$$

L'equazione (157) contiene due tipi di fattori. Il primo, VT , è dovuto a ragioni dimensionali: in teoria dei campi la Lagrangiana è in realtà una densità di Lagrangiana e così anche \mathcal{M}_{fi} è una densità rispetto al "normale" \mathcal{M}_{fi} di meccanica quantistica. Il secondo tipo di fattore è dovuto al fatto che in teoria dei campi, invece di essere normalizzati a 1, gli stati hanno una normalizzazione covariante:

$$f_p^{teocam}(x) = \sqrt{2E_p} e^{ipx} = \sqrt{2E_p V} f_p^{meccua}(x) \quad ; \quad \langle f_p(x) | f_{p'}(x) \rangle^{teocam} = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (159)$$

e quindi occorre dividere per $\sqrt{2EV}$ per ogni stato (iniziale o finale) di energia E . Notare che, date le regole di commutazione, si ha $|\mathbf{p}\rangle = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2E_p} a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle$, per cui gli stati con n particelle normalizzati relativisticamente sono:

$$|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n\rangle = \sqrt{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_1}} \sqrt{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_2}} \dots \sqrt{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_n}} a^\dagger(\mathbf{p}_1) a^\dagger(\mathbf{p}_2) \dots a^\dagger(\mathbf{p}_n) |0\rangle \quad (160)$$

Usando le regole di commutazione, si ha $\langle \mathbf{p} | \mathbf{k} \rangle = (2\pi)^3 \sqrt{2E_p} \sqrt{2E_k} \langle a(\mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{k}) \rangle = 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k})$; mostriamo ora che questa normalizzazione è covariante, cioè $E_p \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k})$ è invariante di Lorentz. Se si effettua una rotazione $E'_p = E_p$, $\mathbf{p}'_i = R_{ij} \mathbf{p}_j$ si ha $\delta^3(R(\mathbf{p} - \mathbf{k})) = \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k})$. Infatti $R(\mathbf{p} - \mathbf{k}) = 0$ se e solo se $(\mathbf{p} - \mathbf{k}) = 0$ dato che R è nonsingolare, e $\int d^3 p \delta(R(\mathbf{p} - \mathbf{k})) = \int d^3 p' \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{k}') = 1$ dato che lo Jacobiano è 1; ne segue $E_p \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k}) = E'_p \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{k}')$ per una rotazione. Se facciamo un boost lungo l'asse x le delta lungo z e y restano invariate, mentre lungo x si ha

$$\frac{\partial(p'_x + vE'_p)}{\partial p'_x} = \frac{E'_p + vp'_x}{E'_p} \Rightarrow \gamma(E'_p + vp'_x) \delta[\gamma(p'_x + vE'_p) - \gamma(k'_x + vE'_k)] = E'_p \delta(p'_x - k'_x)$$

. Se il boost è in una generica direzione \mathbf{p}_L , scriviamo $d^3 \mathbf{p} = d^2 \mathbf{p}_\perp d p_L$ dove \mathbf{p}_\perp è l'impulso trasverso, e la dimostrazione segue gli stessi passi.

Dalla (155) operando le sostituzioni (156,157) si ottiene l'espressione finale:

$$dw_{fi} = \frac{V}{(\Pi_i 2E_i V)} |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \Pi_f \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \quad (161)$$

e lo spazio delle fasi finale è invariante di Lorentz in quanto $\frac{d^3 \mathbf{p}_f}{E_f}$ lo è; la dimostrazione è identica a quanto visto sopra. Due casi sono rilevanti:

- Decadimento - una particella nello stato iniziale

$$d\Gamma_{1 \rightarrow f} = \frac{1}{2E_1} |\mathcal{M}_{f1}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \Pi_f \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \quad (162)$$

- Sezione d'urto - due particelle nello stato iniziale. Per ottenere la sezione d'urto devo dividere per il flusso v_r/V dove v_r è la velocità relativa delle due particelle nello stato iniziale

$$d\sigma_{12 \rightarrow f} = \frac{1}{2E_1 2E_2 v_r} |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \Pi_f \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \quad (163)$$

Nel sistema del baricentro si ha

$$v_r = \frac{|\mathbf{p}_i|^{c.m.}}{E_1} + \frac{|\mathbf{p}_i|^{c.m.}}{E_2} ; \quad 2E_1 2E_2 v_r = 4|\mathbf{p}_i|^{c.m.} (E_1 + E_2) = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$$

e quindi:

$$d\sigma_{12 \rightarrow f} = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \Pi_f \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \quad (164)$$

Il caso di gran lunga più frequente è quello di stato finale a due corpi nel sistema del baricentro. Indichiamo le masse con $p_i^2 = m_i^2$. Inoltre $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ ed è d'uso comune definire gli invarianti cinematici $t = (p_1 - p_3)^2$, $s = (p_1 + p_2)^2$. Lo spazio delle fasi finale a due corpi si scrive:

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} = \frac{1}{16\pi^2} \delta(\sqrt{s} - E_3 - E_4) \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{E_3 E_4} \quad (165)$$

Adesso teniamo conto che $E_3 = \sqrt{|\mathbf{p}_f^{c.m.}|^2 + m_3^2}$ e relazione analoga per E_4 , per cui:

$$\frac{\partial(E_3 + E_4)}{\partial|\mathbf{p}_f^{c.m.}|} = \frac{|\mathbf{p}_f^{c.m.}| \sqrt{s}}{E_3 E_4} \Rightarrow \delta(\sqrt{s} - E_3 - E_4) d|\mathbf{p}_f^{c.m.}| = \frac{E_3 E_4}{|\mathbf{p}_f^{c.m.}| \sqrt{s}} \quad (166)$$

per ottenere infine lo spazio delle fasi a due corpi:

$$d\phi^{(2)} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{p}_f^{c.m.}|}{\sqrt{s}} d\Omega_f \quad (167)$$

Utilizzando la (162), si ottiene per il decadimento a due corpi::

$$d\Gamma_{1 \rightarrow 34} = \frac{1}{32\pi^2} \frac{|\mathbf{p}_f^{c.m.}|}{m_1} \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{m_1} d\Omega_f \quad (168)$$

Utilizzando la (164), si ottiene per la sezione d'urto con due corpi finali:

$$d\sigma_{12 \rightarrow 34} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{|\mathbf{p}_f^{c.m.}|}{|\mathbf{p}_i^{c.m.}|} \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{s} d\Omega_f = \frac{1}{64\pi} \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{s} \frac{dt}{|\mathbf{p}_i^{c.m.}|^2} \quad (169)$$

Inoltre valgono le seguenti relazioni cinematiche, che si ricavano dalla conservazione del quadriimpulso:

$$|\mathbf{p}_i^{c.m.}| = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2} \quad |\mathbf{p}_f^{c.m.}| = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{s^2 - 2s(m_3^2 + m_4^2) + (m_3^2 - m_4^2)^2} \quad (170)$$

4.3.2 Assorbimento ed emissione di un fotone

Come abbiamo visto, il termine di interazione della QED è dato da

$$\mathcal{L}_I(x) = e : \bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)A^\mu(x) : \quad \mathcal{L}_I(x) = e^{iPx}\mathcal{L}_I(0)e^{-iPx}$$

Quali processi vengono descritti al primo ordine in \mathcal{L}_I ? Gli stati iniziali e finali sono autostati dell'operatore di impulso con autovalori $P_f = \sum p_f^i$ dove la somma runna su tutti gli impulsi finali e similmente per gli stati iniziali. Quindi si ha $T_{fi} = S_{fi} - \delta_{fi} = \int d^4x \langle f | e^{iPx} \mathcal{L}_I(0) e^{-iPx} | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \langle f | \mathcal{L}_I(0) | i \rangle$. Il termine $|\mathcal{M}_{fi}|^2$ che compare nelle (162,164) è quindi dato da $|\langle f | \mathcal{L}_I(0) | i \rangle|^2$; occupiamoci di questo elemento di matrice. Se indichiamo con $a_s^\dagger(\mathbf{p}), b_s^\dagger(\mathbf{p}), c_s^\dagger(\mathbf{p})$ gli operatori di creazione di un elettrone, un positrone, un fotone di elicità s , l'operatore $: \bar{\psi}(0)\gamma_\mu\psi(0)A^\mu(0) :$ ha 8 tipi diversi di operatori: $abc, a^\dagger bc, b^\dagger ac, c^\dagger ab, a^\dagger b^\dagger c, a^\dagger c^\dagger b, b^\dagger c^\dagger a, a^\dagger b^\dagger c^\dagger$. Ricordiamo che gli operatori sono N-ordinati, e trattandosi a e b di operatori fermionici vanno trattati come se l'anticommutatore svanisse, per cui $: ab^\dagger c := -b^\dagger ac, : ab^\dagger c^\dagger := -b^\dagger c^\dagger a, : a^\dagger cb^\dagger := +a^\dagger b^\dagger c$ eccetera. Messi in N-order, ognuno di questi operatori contribuisce a uno ed un solo processo: quello in cui gli operatori di distruzione distruggono lo stato finale e gli operatori di creazione creano lo stato finale. Ad esempio se consideriamo uno stato finale con fotone, elettrone positrone si ha $\langle 0 | cba | a^\dagger b^\dagger c^\dagger | 0 \rangle \neq 0$ ma $\langle 0 | cba | a^\dagger bc^\dagger | 0 \rangle = 0$ insieme a tutte le altre combinazioni. Consideriamo quindi uno di questi 8 processi, l'emissione di un fotone da parte di un elettrone $e^-(p_1) \rightarrow e^-(p_2)\gamma(k)$. L'ampiezza risulta

$$\langle f | e : \bar{\psi}(0)\gamma_\mu\psi(0)A^\mu(0) : | i \rangle = (171)$$

$$\langle a_s(p_2)c_p(k) | [\sum_{s'} \int d^3p' a_{s'}^\dagger(p') \bar{u}_{s'}(p')] \gamma_\mu [\sum_{p'} \int d^3k' c_{p'}^\dagger(k') \epsilon_{p'}^\mu(k')] [\sum_{r'} \int d^3p a_{r'}(\mathbf{p}) u_{r'}(p)] | a_r^\dagger(\mathbf{p}_1) \rangle$$

Notare che in quest'espressione sono scomparsi i fattori $\sqrt{(2\pi)^3 2p_0}$ che compaiono al numeratore nell'espressione (160) degli stati fisici e al denominatore nelle espressioni (ad es. (74)) dei campi quantizzati. Il motivo è che questi fattori si cancellano sistematicamente a dare 1 una volta che si tenga conto della delta negli impulsi dovuta alle regole di commutazione. Ad esempio:

$$\langle c_p(k) \sqrt{(2\pi)^3 2k_0} | \sum_{p'} \int \frac{d^3k'}{\sqrt{(2\pi)^3 2k'_0}} c_{p'}^\dagger(k') \epsilon_{p'}^\mu(k') = \sqrt{\frac{k_0}{k'_0}} \int d^3k' \sum_{p'} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \epsilon_{p'}^\mu(k') \delta_{pp'} \langle 0 | = \epsilon_p^\mu \langle 0 | (172)$$

Nella (171) contano solo i termini che coinvolgono i commutatori (o anticommutatori): un esempio è la (172), un altro esempio è $\langle a_s(p_2) a_{s'}^\dagger(p') = -\langle a_{s'}^\dagger(p') a_s(p_2) + \langle \delta_{ss'} \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}')$ in cui solo il secondo termine è non nullo in quanto $\langle a^\dagger = 0$. Dalla (171) si ottiene quindi:

$$ie \langle \int d^3p' \sum_{s'} \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}') \delta_{ss'} \bar{u}_{s'}(p') \gamma_\mu \sum_{p'} \int d^3k' \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{pp'} \epsilon_{p'}^\mu(k') \int d^3p \sum_{r'} \delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) \delta_{rr'} u_{r'}(p) \rangle = ie \bar{u}_s(p_2) \gamma_\mu u_r(p_1) \epsilon_p^\mu(k); \quad k = p_1 - p_2 (173)$$

dove $k = p_1 - p_2$ è imposto dalla δ di conservazione del quadriimpulso $p_1 = p_2 + k$. Questo è il nostro primo esempio di calcolo di ampiezza in teoria dei campi. Gli altri 7 processi hanno ampiezze che si calcolano in maniera analoga, ad esempio al processo di produzione di coppia $e^+e^- \gamma(k) \rightarrow e^-(p_1)e^+(p_2)$ corrisponde l'ampiezza $ie \bar{v}(p_2) \gamma_\mu u(p_1) \epsilon^\mu(k)$, all'assorbimento di un fotone da

parte di un positrone $e^+(p_1)\gamma(k) \rightarrow e^+(p_2)$ l'ampiezza $ie\bar{v}(p_2)\gamma_\mu v(p_1)\epsilon^\mu(k)$ eccetera. Le regole di Feynman relative a questi processi sono rappresentate nelle figure 5, 7. Calcoliamo ora il modulo quadro dell'ampiezza:

$$ie\bar{u}_s(p_2)\gamma_\mu u_r(p_1)\epsilon_p^\mu(k)[ie\bar{u}_s(p_2)\gamma_\nu u_r(p_1)\epsilon_p^\nu(k)]^* = e^2\bar{u}_s(p_2)\gamma_\mu u_r(p_1)\bar{u}_r(p_1)\gamma_\nu u_s(p_2)\epsilon_p^\mu(k)\epsilon_p^\nu(k) \quad (174)$$

Infatti $[\bar{u}_1\gamma_\nu u_2]^\dagger = u_2^\dagger\gamma_\nu^\dagger\gamma_0 u_1 = \bar{u}_2\gamma_0\gamma_\nu^\dagger\gamma_0 u_1 = \bar{u}_2\gamma_\nu u_1$ per via delle proprietà $\gamma_0 = \gamma_0^\dagger, \gamma_0^2 = 1, \gamma_0\gamma_\nu^\dagger\gamma_0 = \gamma_\nu$. Adesso consideriamo il caso in cui l'elettrone iniziale sia non polarizzato e non si misurino le polarizzazioni finali di elettrone, fotone. In questo caso occorre fare la somma su tutte le polarizzazioni, iniziali e finali, con un fattore 1/2 di media sulle polarizzazioni iniziali. Reintroducendo gli indici di Dirac $\alpha, \beta, \delta, \gamma = 1 \dots 4$ per maggiore chiarezza, si ha:

$$\sum_{r,s} \bar{u}_s(p_2)^\alpha \gamma_\mu^{\alpha\beta} u_r(p_1)^\beta \bar{u}_r(p_1)^\gamma \gamma_\nu^{\delta\gamma} u_s(p_2)^\delta = \gamma_\mu^{\alpha\beta} \gamma_\nu^{\delta\gamma} (\not{p}_1 + m)^\beta \gamma^\gamma (\not{p}_2 + m)^\delta \alpha = \text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_1 + m)\gamma_\nu(\not{p}_2 + m)] \quad (175)$$

Per calcolare questa traccia si usando le regole date nella (203) in appendice:

$$\text{Tr}[\gamma_\mu(\not{p}_1 + m)\gamma_\nu(\not{p}_2 + m)] = \text{Tr}[\gamma_\mu\not{p}_1\gamma_\nu\not{p}_2] + m^2\text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu] = 4[p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu] + 4[m^2 - (p_1 p_2)]g^{\mu\nu} \quad (176)$$

L'ampiezza modulo quadro mediata sulle polarizzazioni iniziali e sommata sulle polarizzazioni finali risulta quindi:

$$2[p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu + (m^2 - (p_1 p_2))g^{\mu\nu}] \sum_p \epsilon_\mu(k)\epsilon_\nu(k); \quad k = p_1 - p_2 \quad (177)$$

Adesso dobbiamo utilizzare la somma sulle polarizzazioni fisiche del fotone data dal proiettore trasverso (78). In realtà però il calcolo diventa complesso, e soprattutto non è covariante in quanto $P_T^{\mu\nu}$ non è un tensore. Risulta più comodo ed esplicitamente covariante utilizzare sostituire $\sum_p \epsilon_\mu(k)\epsilon_\nu(k) \rightarrow -g_{\mu\nu}$. Come mai si ottiene lo stesso risultato? Questo è connesso con la (55), grazie alla quale ci si rende conto che la differenza fra le due somme sulle polarizzazioni è data da termini proporzionali a k_μ, k_ν . Questi termini sono automaticamente nulli nella (177). Infatti:

$$\begin{aligned} k_\mu[p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu + (m^2 - (p_1 p_2))g^{\mu\nu}] &= (kp_1)p_2^\nu + (kp_2)p_1^\nu + (m^2 - (p_1 p_2))k^\nu \\ &= ((p_1 - p_2)p_1)p_2^\nu + ((p_1 - p_2)p_2)p_1^\nu + (m^2 - (p_1 p_2))(p_1 - p_2)^\nu = 0 \end{aligned}$$

dopo aver tenuto conto che $p_1^2 = p_2^2 = m^2$. L'azzerarsi del contributo dei termini proporzionali a k_μ, k_ν nel propagatore non è casuale, ma è connesso con l'invarianza di gauge. Infatti il modulo quadro si scrive $M_\mu M_\nu^* \sum_p \epsilon_\mu(k)\epsilon_\nu(k)$ dove M_μ è l'ampiezza di emissione di un fotone. L'uguaglianza $k_\mu M^\mu = 0$ è detta identità di Ward, ed è connessa con l'invarianza di gauge, cioè con il fatto che la sostituzione $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi \Rightarrow \epsilon_\mu \rightarrow \epsilon_\mu + \tilde{\chi} k_\mu$ non deve alterare il risultato. E' quindi lecito, come faremo nel seguito, sostituire la somma sulle polarizzazioni con $-g_{\mu\nu}$, in quanto le polarizzazioni non fisiche così introdotte non contribuiscono al risultato finale. Infine si ottiene quindi:

$$2[p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu + (m^2 - (p_1 p_2))g^{\mu\nu}](-g_{\mu\nu}) = 4((p_1 p_2) - 2m^2)$$

Possiamo ora calcolare la larghezza di decadimento utilizzando la (162). Ma il calcolo è presto fatto: la larghezza di decadimento fa esattamente 0! Il motivo non è l'ampiezza modulo quadro che

abbiamo appena calcolato: è lo spazio delle fasi ad essere nullo. Consideriamo infatti la cinematica: si ha $p_1 = p_2 + k$ con $p_1^2 = p_2^2 = m^2, k^2 = 0$. Quadrando questa relazione si ottiene $p_2 k = \omega(p_2^0 - \mathbf{p}_2 \cdot \hat{k}) = 0$. Ma p_2^0 è strettamente maggiore di $|\mathbf{p}_2|$, mentre $|\mathbf{p}_2 \cdot \hat{k}| \leq |\mathbf{p}_2|$, per cui l'unico modo di soddisfare l'uguaglianza è avere $\omega = 0$. Ma un fotone con impulso 0 non esiste, e se esistesse comunque lo spazio delle fasi sarebbe 0: è come integrare una funzione diversa da 0 in un solo punto, l'integrale fa 0. In definitiva la larghezza di decadimento è 0. Esercizio: una particella di massa M decade in due particelle di massa m_1, m_2 . Quale relazione devono soddisfare le masse affinché il decadimento sia possibile? Ripetere per n particelle di masse $m_1 \dots m_n$. Suggerimento: conviene mettersi nel sistema del baricentro.

4.3.3 Scattering in $\lambda\phi^4$

Il normal ordering indicato coi due punti, consiste nell'ordinare i prodotti di campi in modo che tutti gli operatori di distruzione stiano a sinistra e quelli di creazione a destra. Evita il comparire di infiniti. Ad esempio In effetti nel prodotto di due operatori di campo nello stesso punto compaiono operatori come $a_k a_k^\dagger$ che sono mal definiti. Ad esempio:

$$\langle 0 | \phi^2(0) | 0 \rangle \sim \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{\sqrt{E_1}} \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{\sqrt{E_2}} \langle (a_{k_1} + a_{k_1}^\dagger)(a_{k_2} + a_{k_2}^\dagger) \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{\sqrt{E_1}} \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{\sqrt{E_2}} \langle a_{k_1} a_{k_2}^\dagger \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{E_1} = \infty \quad (178)$$

Si definisce allora il normal ordering tale che gli operatori tipo a compaiono sempre a destra e quelli tipo a^\dagger a sinistra:

$$\begin{aligned} \langle 0 | : \phi^2(0) : | 0 \rangle &= \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{E_1} \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{E_2} \langle : (a_{k_1} + a_{k_1}^\dagger)(a_{k_2} + a_{k_2}^\dagger) : \rangle = \\ & \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{E_1} \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{E_2} \langle a_{k_1} a_{k_2} + a_{k_2}^\dagger a_{k_1} + a_{k_1}^\dagger a_{k_2} + a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger \rangle = 0 \end{aligned} \quad (179)$$

Consideriamo una teoria scalare con interazione $\mathcal{L}_I = \lambda : \phi^4 :$ dove ϕ è uno scalare neutro, e uno scattering $p_3 p_4 \rightarrow p_1 p_2$. Il primo termine nella espansione perturbativa della matrice S (150) corrisponde all'assenza di interazione, e non è molto interessante. Consideriamo quindi il secondo termine; l'invarianza per traslazioni implica la delta di conservazione (e questa è una cosa valida a tutti gli ordini):

$$\begin{aligned} \int d^4 x i \langle f | \mathcal{L}_I(x) | i \rangle &= i \int d^4 x \langle f | e^{iPx} \mathcal{L}_I(0) e^{-iPx} | i \rangle = \\ i \int d^4 x \exp[i(P_i - P_f)x] \langle f | \mathcal{L}_I(0) | i \rangle &= (2\pi)^4 i \delta^4(P_f - P_i) \langle f | \mathcal{L}_I(0) | i \rangle \end{aligned} \quad (180)$$

dove P è l'operatore di traslazione temporale e P_i la somma degli impulsi iniziali. A causa del N-order l'unico termine diverso da zero* è:

$$\begin{aligned} \langle a_{p_1} a_{p_2} | : \phi^4(0) : | a_{p_3}^\dagger a_{p_4}^\dagger \rangle &= \int d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3 d^3 k_4 \langle a_{p_1} a_{p_2} a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger a_{k_3} a_{k_4} a_{p_3}^\dagger a_{p_4}^\dagger \rangle = \\ \int d^3 \mathbf{k}_1 d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}_3 d^3 \mathbf{k}_4 [\delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_1) \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_2) + \mathbf{p}_1 \leftrightarrow \mathbf{p}_2] & [\delta^3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{p}_4 - \mathbf{k}_4) + \mathbf{p}_3 \leftrightarrow \mathbf{p}_4] = 4 \end{aligned}$$

*i termini del tipo $a_k^\dagger a_k a_k a_k$ eccetera danno zero: per avere roba non nulla occorrono due a_k e due a_k^\dagger .

Inoltre ci sono $3!$ operatori distinti dello stesso tipo, come ad esempio $a_{k_1}^\dagger a_{k_3}^\dagger a_{k_2} a_{k_4}$: i 6 operatori corrispondono alle 6 possibili scelte 12,13,14,23,24,34 del primo gruppo di operatori del tipo $a^\dagger a^\dagger$. In totale il fattore combinatorio è dunque $4 \times 3! = 4!$ e il vertice produce $4!\lambda$:

$$\langle f|i \int d^4x L_I(x)|i \rangle = -i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \frac{\lambda}{4} \langle f| : \phi^4(0) : |i \rangle = -i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) 4!\lambda \quad (181)$$

Di solito si include questo fattore nella $\mathcal{L}_I = \phi^4/4!$ e il vertice è λ . Domanda: ottengo una teoria diversa, cioè con predizioni diverse?

Abbiamo visto che i vari termini (che alla fine sono tutti uguali e nel caso in esame valgono 1) vengono ottenuti dalle varie possibilità per il commutatore fra a e a^\dagger . E' comodo introdurre una notazione (mia personale):

$$a(\overline{p})\phi(x) \equiv \int d^3\mathbf{k} [a(p), a^\dagger(k)] e^{-ikx} = \int d^3\mathbf{k} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k}) e^{-ikx} = e^{-ipx} \quad (182)$$

(la seconda definizione l'ho inventata io). Con questa notazione, il fattore combinatorio trovato in precedenza è semplice: ci sono $4!$ modi di contrarre gli a con ognuno dei 4 ϕ . Più precisamente, introducendo la label $\phi_1 = \int d^3k_1 \dots$ eccetera, si ha ad esempio:

$$\langle a(\overline{p_1})a(\overline{p_2})| : \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : |a^\dagger(\overline{p_3})a^\dagger(\overline{p_4}) \rangle, \langle a(\overline{p_1})a(\overline{p_2})| : \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : |a^\dagger(\overline{p_3})a^\dagger(\overline{p_4}) \rangle \text{ ecc.} \quad (183)$$

Questo è un esempio di regole di Feynman.

4.4 Unitarietà

La matrice $S \equiv U(-\infty, \infty)$ è un operatore unitario che si suole scrivere $S = 1 + iT$ per separare la parte di scattering vero e proprio definita da T dalla parte di non interazione. L'unitarietà $SS^\dagger = 1$ diventa (indicando $\langle f|T|i \rangle = T_{fi}$):

$$-i(T - T^\dagger) = TT^\dagger \Rightarrow -i(T_{fi} - T_{if}^*) = \sum_n T_{fn} T_{in}^* \Rightarrow 2Im\{T_{ii}\} = \sum_n |T_{in}|^2 \quad (184)$$

La matrice T contiene una delta di conservazione del quadriimpulso: $T_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{M}_{fi}$. Inoltre nel caso del continuo con normalizzazione relativistica la somma sugli stati finali diventa una integrazione sullo spazio delle fasi: $1 = \sum_X \int d\Phi_X |X\rangle \langle X|$. Si ottiene quindi:

$$Im\{\mathcal{M}_{ii}\} = \sum_X \int d\Phi_X (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_X) |\mathcal{M}_{Xi}|^2 = 2\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \sum_X \sigma(i \rightarrow X) \quad (185)$$

con p_1, p_2 impulsi iniziali. Questa equazione è detta anche 'teorema ottico', che si può enunciare nel seguente modo: La parte immaginaria dell'ampiezza di scattering in avanti (cioè con $i = f$) è proporzionale alla sezione d'urto inclusiva. Vedremo che il teorema ottico gioca un ruolo nella quantizzazione delle teorie di gauge.

5 Matrice S agli ordini superiori al primo

5.1 Teorema di Wick, scattering in teoria $\lambda\phi^3$

Come abbiamo visto, il calcolo dell'ampiezza è semplice se l'operatore che causa la transizione è ordinato normalmente: in tal caso infatti gli operatori di distruzione, tutti a destra, distruggono le particelle iniziali e quelli di creazione, tutti a sinistra, creano le particelle finali. Se l'operatore non è N-ordered invece ci sono termini aggiuntivi dovuti ai commutatori necessari per portarlo nella forma n-ordinata. E' questo il caso dell'ampiezza al secondo ordine ad esempio, nella quale compaiono prodotti di operatori del tipo : $\mathcal{L}(x_1) :: \mathcal{L}(x_2) :$. Infatti, anche se c'è ordinamento all'interno degli operatori con dato x , il prodotto degli operatori a x diversi non è N-ordinato. Occorre quindi esprimere questo prodotto in termini di operatori ordinati. Questo si può fare grazie al teorema di Wick:

$$T\{N[A(x_1)B(x_1)\dots]N[A(x_2)B(x_2)\dots]\dots N[A(x_n)B(x_n)\dots]\} = \sum_i N[i \text{ contrazioni, no e.t.}] \quad (186)$$

dove il secondo membro significa che fissato $i = 3$ ad esempio, bisogna sommare su tutte i possibili termini con 3 contrazioni ma senza contrarre a tempi uguali, cioè senza contrarre all'interno di ogni gruppo N-ordinato. Le contrazioni non sono altro che i propagatori. In buona sostanza abbiamo:

$$\overline{\phi(x_1)\phi(x_2)} \equiv \langle T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\} \rangle = \Delta_F(x_1 - x_2) \quad (187)$$

$$a(p)\overline{\phi(x)} \equiv \int d^3\mathbf{k}[a(p), a^\dagger(k)]e^{-ikx} = \int d^3\mathbf{k}\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k})e^{-ikx} = e^{-ipx} \quad (188)$$

(la seconda definizione l'ho inventata io). Con questa notazione, il fattore combinatorio trovato in precedenza è semplice: ci sono 4! modi di contrarre gli a con ognuno dei 4 ϕ .

I casi più semplici del teorema di Wick sono facili da verificare:

$$T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\} = : \phi(x_1)\phi(x_2) : + \langle T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\} \rangle = : \phi(x_1)\phi(x_2) : + \overline{\phi(x_1)\phi(x_2)} \quad (189)$$

$$T\{:\phi^2(x_1) : \phi(x_2)\} = : \phi^2(x_1)\phi(x_2) : + 2\phi(x_1)\overline{\phi(x_1)\phi(x_2)} \quad (190)$$

Per la prima di queste identità osserviamo intanto che $\phi(x)\phi(0) = : \phi(x)\phi(0) : + \langle \phi(x)\phi(0) \rangle$; questa si può ricavare direttamente dalla definizione dei campi, ed è ragionevole dato che il prodotto ordinario e quello N-ordered differiscono per termini di commutatore, che sono appunto quelli che hanno valore di aspettazione sul vuoto. Dopodiché possiamo scrivere

$$\begin{aligned} T\{\phi(x)\phi(0)\} &= \theta(x_0)[:\phi(x)\phi(0) : + \langle \phi(x)\phi(0) \rangle] + \theta(-x_0)[:\phi(0)\phi(x) : + \langle \phi(0)\phi(x) \rangle] \\ &= : \phi(x)\phi(0) : + \langle T\{\phi(x)\phi(0)\} \rangle \end{aligned}$$

avendo tenuto conto che $:\phi(x)\phi(0) := \phi(0)\phi(x) :$ poiché nel N-order i termini di commutatore vengono posti a 0, per cui $[\phi(x), \phi(0)] := 0$ (esercizio: verificarlo dalla definizione di normal order).

Consideriamo lo scattering 2 in 2 per cui $\langle f | = \langle a(p_3)a(p_4) |, |i\rangle = |a^\dagger(p_1)a^\dagger(p_2)\rangle$. L'interazione che consideriamo è $L_I = : \phi^3/3! :$ il termine successivo della (150) è

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{3!}\right)^2 \int d^4x d^4y \langle a(p_3)a(p_4) | T\{:\phi^3(x) :: \phi^3(y) : \} | a^\dagger(p_1)a^\dagger(p_2) \rangle \quad (191)$$

Utilizziamo il teorema di Wick, e notiamo preliminarmente che esistono 2 termini che danno contributo identico nei quali il ruolo di x e y vengono scambiati. Ad esempio posso contrarre $a(p_1)$ e $a(p_2)$ con due dei tre $\phi(x)$ e $a^\dagger(p_3)$ e $a^\dagger(p_4)$ con due dei tre $\phi(y)$, oppure viceversa posso contrarre gli stati iniziali con i $\phi(y)$ e gli stati finali con i $\phi(x)$. Quando questi contributi vengono integrati in $d^4x d^4y$ danno identico contributo, andando a cancellare il fattore 1/2 che viene dallo sviluppo dell'esponenziale in (150). Questo è un fatto generale: a ordine n il fattore $1/n!$ dello sviluppo dell'esponenziale viene cancellato dalla presenza di $n!$ termini che differiscono solo per scambio di variabili di integrazione.

L'invarianza per traslazioni consente di scrivere $L_I(x)L_I(y) = L_I(x)e^{iPy}L_I(0)e^{-iPy} = e^{iPy}L_I(x-y)L_I(0)e^{-iPy}$, per cui possiamo riscrivere la (191) come

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{3!}\right)^2 \int d^4x d^4y \langle f|T[:\phi^3(x) :: \phi^3(y) :]|i\rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{3!}\right)^2 \int d^4z \langle f|T[:\phi^3(z) :: \phi^3(0) :]|i\rangle \quad (192)$$

dove ho ribattezzato $z = x - y$.

Consideriamo uno dei termini di Wick (ricordarsi che si omettono contrazioni e.t.):

$$\overbrace{a(p_3)a(p_4)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(0)\phi(0)\phi(0)}^{\overbrace{a(p_3)a(p_4)\phi(z)\phi(z)\phi(z)} \quad \overbrace{\phi(0)\phi(0)\phi(0)} \quad \overbrace{a^\dagger(p_2)a^\dagger(p_1)}} \quad (193)$$

Esistono $(3!)^2$ termini diversi che danno lo stesso contributo del termine (193), e questo mangia $1/(3!)^2$ nella (192). Infatti posso scegliere di contrarre $a(p_3)$ con ognuno dei tre $\phi(z)$, e una volta fatta questa scelta posso fare una scelta analoga per gli stati iniziali a^\dagger con gli $\phi(0)$. In definitiva ottengo quindi:

$$-\frac{1}{2}\frac{(i\lambda)^2}{(3!)^2} (2)(3!)^2 \int d^4z \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ipz}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{i(p_1+p_2)z} = \quad (194)$$

$$\lambda^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p - p_1 - p_2) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i\lambda^2}{(p_1 + p_2)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

L'impulso nei diagrammi di Feynman viene quindi conservato non solo fra stato iniziale e finale, ma anche ad ogni singolo vertice: infatti $p = p_1 + p_2$. Il diagramma di Feynman relativo all'ampiezza (194) è quello di sinistra nella figura 1. Notare che $\lambda\phi^3$ ha dimensioni 4, per cui λ ha dimensioni 1; l'ampiezza è quindi adimensionale.

Esaminando le varie possibilità per le contrazioni, ne esiste solo una (e tutte le equivalenti per combinatoria) che non corrisponde al digramma esaminato finora, ed è la seguente:

$$\overbrace{a(p_3)a(p_4)\phi(z)\phi(z)\phi(z)\phi(0)\phi(0)\phi(0)}^{\overbrace{a(p_3)a(p_4)\phi(z)\phi(z)\phi(z)} \quad \overbrace{\phi(0)\phi(0)\phi(0)} \quad \overbrace{a^\dagger(p_2)a^\dagger(p_1)}} \quad (195)$$

che genera il contributo:

$$-\frac{1}{2}\frac{(i\lambda)^2}{(3!)^2} (2)(3!)^2 \int d^4z \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ipz}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{i(p_3-p_1)z} = \quad (196)$$

$$\lambda^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p - (p_3 - p_1)) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = \frac{i\lambda^2}{(p_1 - p_3)^2 - m^2 + i\epsilon}$$

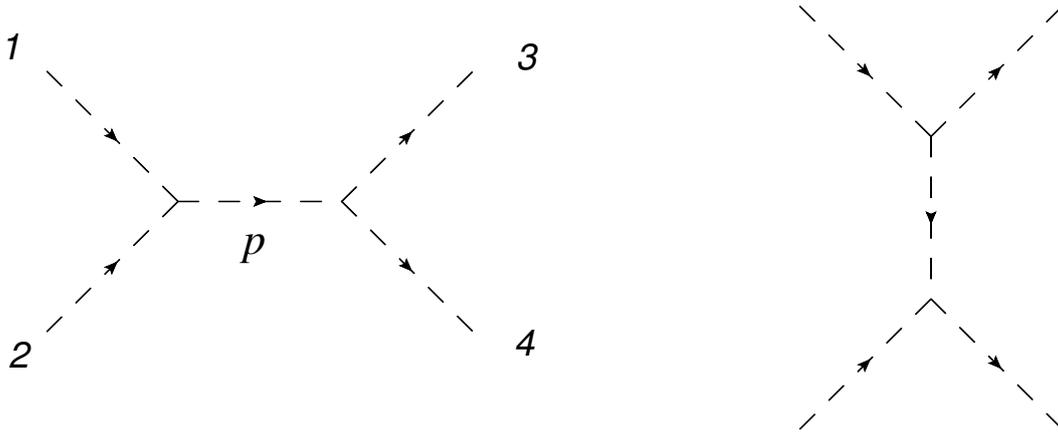


Figure 1: Diagrammi di Feynman per scattering $2 \rightarrow 2$ nella teoria ϕ^3 .

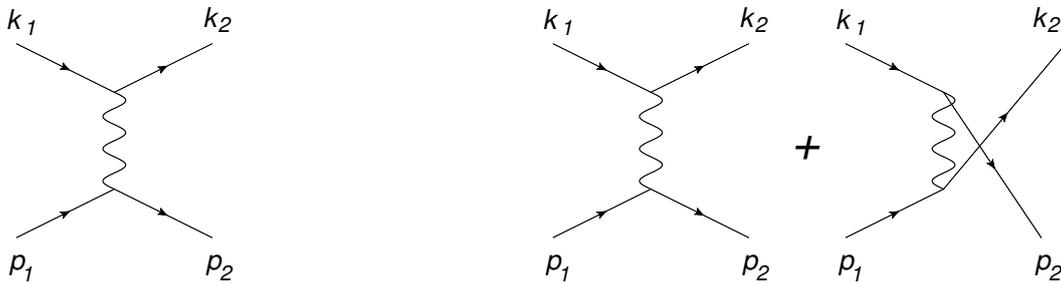


Figure 2: Diagrammi di Feynman per scattering di elettrone muone (a sinistra) e di elettrone elettrone (a destra) in QED.

Questa ampiezza corrisponde al diagramma a destra nella figura 1.

Possiamo ora utilizzare la (169) per ottenere l'espressione della sezione d'urto, tenendo conto che in questo caso $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f|$ perché tutte le masse sono uguali:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda^4}{64\pi^2 s} \left(\frac{1}{(p_1 - p_3)^2 - m^2} + \frac{1}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} \right)^2$$

Possiamo esprimere la sezione d'urto in funzione dell'angolo di scattering, in quanto si ha:

$$p_1 = \frac{\sqrt{s}}{2} \left(1, \sqrt{1 - 4\frac{m^2}{s}} \hat{\mathbf{p}}_i \right), \quad p_2 = -\frac{\sqrt{s}}{2} \left(1, \sqrt{1 - 4\frac{m^2}{s}} \hat{\mathbf{p}}_i \right)$$

$$p_3 = \frac{\sqrt{s}}{2} \left(1, \sqrt{1 - 4\frac{m^2}{s}} \hat{\mathbf{p}}_f \right), \quad p_4 = \frac{\sqrt{s}}{2} \left(1, -\sqrt{1 - 4\frac{m^2}{s}} \hat{\mathbf{p}}_f \right)$$

e quindi

$$(p_1 + p_2)^2 = s, \quad (p_1 - p_3)^2 = \frac{s}{2} \left(1 - 4\frac{m^2}{s} \right) (1 - \cos \theta)$$

5.2 Sezione d'urto per diffusione elettrone muone

Gli ingredienti necessari per calcolare la sezione d'urto sono

- Regole di Feynman
- Espressione per lo spazio delle fasi
- Modulo quadro dell'ampiezza

Cominciamo con l'ampiezza. Consideriamo adesso la sezione d'urto di scattering elastico $e(k_1) \mu(p_1) \rightarrow e(k_2) \mu(p_2)$ con $k_1^2 = k_2^2 = m^2$ massa dell'elettrone e $p_1^2 = p_2^2 = M^2$ massa del muone.

Le regole di Feynman rilevanti sono:

Utilizzando le regole di Feynman il calcolo dell'ampiezza corrispondente alla parte sinistra della figura 2 per il processo $e^-(k_1; s_1)\mu^-(p_1, r_1) \rightarrow e^-(k_2; s_2)\mu^-(p_2, r_2)$ dove k, p indicano gli impulsi e r, s gli spin (elicità) è piuttosto semplice:

$$\mathcal{A}_{s_1 r_1}^{s_2 r_2} = e^2 \bar{u}_{s_2}(k_2) \gamma_\mu u_{s_1}(k_1) \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}_{r_2}(p_2) \gamma_\nu u_{r_1}(p_1) \quad (197)$$

dove $q = k_1 - k_2 = p_2 - p_1$. Notare che si può usare $g^{\mu\nu} \dots$

Il modulo quadro risulta:

$$\begin{aligned} \sum_{s_1 s_2 r_1 r_2} \frac{q^4}{e^4} |\mathcal{A}_{s_1 r_1}^{s_2 r_2}|^2 &= \text{Tr}\{\gamma^\mu(k_1 + m)\gamma^\nu(k_2 + m)\} \text{Tr}\{\gamma_\mu(p_1 + M)\gamma_\nu(p_2 + M)\} \\ &= 16\{k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu + g^{\mu\nu}(m^2 - (k_1 k_2))\} \{p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu + g^{\mu\nu}(M^2 - (p_1 p_2))\} \\ &= 32 \left[(k_1 p_1)(k_2 p_2) + (k_1 p_2)(k_2 p_1) + 2m^2 M^2 - M^2(k_1 k_2) - m^2(p_1 p_2) \right] \end{aligned}$$

Possiamo ora utilizzare la (169) per ottenere la sezione d'urto; in questo caso particolare di scattering elastico (cioè le particelle finali sono le stesse di quelle iniziali), si ha $|\mathbf{p}_f| = |\mathbf{p}_i|$. Infatti per la conservazione dell'energia:

$$\sqrt{|\mathbf{p}_i|^2 + m^2} + \sqrt{|\mathbf{p}_i|^2 + M^2} = \sqrt{|\mathbf{p}_f|^2 + m^2} + \sqrt{|\mathbf{p}_f|^2 + M^2} \Rightarrow |\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f|$$

Lo stesso risultato si può ottenere direttamente dalla (170). La sezione d'urto risulta quindi:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \cdot \frac{e^4}{q^4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 32 \left[(k_1 p_1)(k_2 p_2) + (k_1 p_2)(k_2 p_1) + 2m^2 M^2 - M^2(k_1 k_2) - m^2(p_1 p_2) \right] \quad (198)$$

dove il fattore 1/2 tiene conto della media sulle polarizzazioni iniziali. Per avere la dipendenza angolare della sezione d'urto occorre ora esprimere i vari termini in funzione di s e di θ , angolo fra \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_2 . Supponendo di poter trascurare la massa m dell'elettrone, poiché $s = (p_1 + k_1)^2 = (p_2 + k_2)^2$ si ha $2(p_1 k_1) = 2(p_2 k_2) = s - M^2$. Per quanto riguarda gli altri invarianti, chiamata ω l'energia dell'elettrone e E quella del muone si ha

$$\begin{aligned} k_1 &= \omega(1, \hat{\mathbf{k}}) & p_1 &= (E, -\omega\hat{\mathbf{k}}) & k_2 &= \omega(1, \hat{\mathbf{k}}') & p_2 &= (E, -\omega\hat{\mathbf{k}}') \\ \omega + E &= \omega + \sqrt{\omega^2 + M^2} = \sqrt{s} \Rightarrow \omega = \frac{s - M^2}{2\sqrt{s}}, & E &= \sqrt{\omega^2 + M^2} = \frac{s + M^2}{2\sqrt{s}} \end{aligned}$$

da cui si ricavano i rimanenti invarianti:

$$(k_1 p_2) = (k_2 p_1) = \omega E + \omega^2 \hat{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{k}}' = \frac{s^2 - M^4}{4s} + \frac{(s - M^2)^2}{4s} \cos \theta$$

Infine, il quadrato del momento trasferito vale:

$$(k_1 - k_2)^2 = \frac{(s - M^2)^2}{2s}(1 - \cos \theta)$$

Consideriamo adesso per semplicità il caso $m = M = 0$; in questo caso si ha:

$$\frac{g^4}{e^4} |\mathcal{A}|^2 = 2s^2 [4 + (1 + \cos \theta)^2] \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{8\pi^2 s} \left[\frac{4 + (1 + \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^2} \right]$$

Per finire, di solito la sezione d'urto si esprime in funzione delle variabili di Mandelstam s, t, u definite da:

$$s = (k_1 + p_1)^2 \quad t = (k_1 - k_2)^2 = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta) \quad u = (k_1 - p_2)^2 = -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta) \quad s + t + u = 0$$

in termini delle quali (con $e^2 = 4\pi\alpha$):

$$\frac{d\sigma}{dt} = 4 \frac{\alpha^2}{s^2} \left[\frac{s^2 + u^2}{t^2} \right] \quad (199)$$

5.3 Sezione d'urto per diffusione elettrone elettrone

Nel caso di scattering elettrone elettrone i diagrammi di Feynman sono quelli che appaiono sulla destra della figura 2. l'ampiezza è in questo caso:

$$\mathcal{A}_{s_1 r_1}^{s_2 r_2} = \frac{e^2}{(k_1 - k_2)^2} \bar{u}_{s_2}(k_2) \gamma_\mu u_{s_1}(k_1) \bar{u}_{r_2}(p_2) \gamma^\mu u_{r_1}(p_1) - \frac{e^2}{(k_1 - p_2)^2} \bar{u}_{r_2}(p_2) \gamma_\mu u_{s_1}(k_1) \bar{u}_{s_2}(k_2) \gamma_\nu u_{r_1}(p_1) \quad (200)$$

C'è quindi un segno - relativo, dovuto al fatto che quando scambio i numeri quantici degli elettroni finali ottengo un - relativo per la proprietà di antisimmetria delle funzioni d'onda fermioniche. Dal punto di vista della teoria dei campi, i due diagrammi corrispondono alle contrazioni che seguono. Ometto le matrici gamma perchè qui interessa solo il segno relativo, e ribattezzo $k_1 \rightarrow p_2, k_2 \rightarrow p_3, p_2 \rightarrow p_4$; è sottinteso il normal ordering:

$$\mathcal{A}_{dir} \sim \langle a_4 a_3 | \underbrace{\bar{\psi}_x \psi_x}_{\text{normal}} \underbrace{\bar{\psi}_y \psi_y}_{\text{normal}} | a_2^\dagger a_1^\dagger \rangle, \quad \mathcal{A}_{cross} \sim \langle a_4 a_3 | \underbrace{\bar{\psi}_x \psi_x}_{\text{normal}} \underbrace{\bar{\psi}_y \psi_y}_{\text{normal}} | a_2^\dagger a_1^\dagger \rangle$$

Tenendo conto del fatto che gli operatori anticommutano all'interno del normal order:

$$\mathcal{A}_{dir} \sim -\langle a_4 a_3 | \underbrace{\bar{\psi}_x \bar{\psi}_y}_{\text{normal}} \underbrace{\psi_x \psi_y}_{\text{normal}} | a_2^\dagger a_1^\dagger \rangle, \quad \mathcal{A}_{cross} \sim +\langle a_4 a_3 | \underbrace{\bar{\psi}_y \bar{\psi}_x}_{\text{normal}} \underbrace{\psi_x \psi_y}_{\text{normal}} | a_2^\dagger a_1^\dagger \rangle$$

e questo giustifica il segno - relativo.

5.4 Propagatori fermionici

Nei calcoli di ampiezze possono comparire propagatori fermionici, come per esempio nel diagramma di Feynman di figura 3:

$$\epsilon^\mu(k_1) \epsilon^\nu(k_2) \bar{u}(p_2) \gamma_\nu \frac{1}{\not{p}_1 + \not{k}_1 - m} \gamma_\mu u(p_1)$$

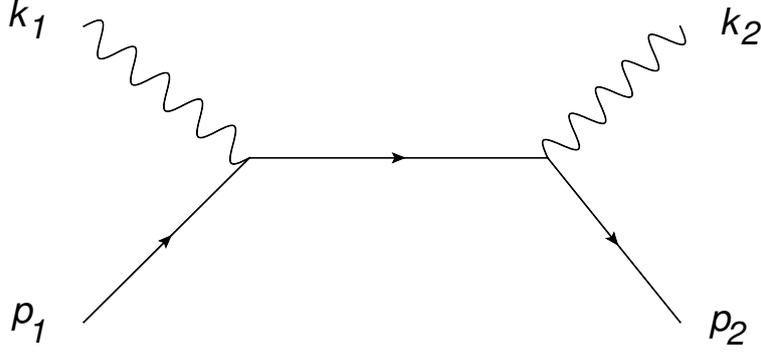


Figure 3:

Può essere utile riscrivere il propagatore nel modo seguente:

$$\frac{1}{\not{p}_1 + \not{k}_1 - m} = \frac{\not{p}_1 + \not{k}_1 + m}{(p_1 + k_1)^2 - m^2}$$

Difatti:

$$\frac{1}{\not{p} - m} = \frac{\not{p} + m}{(\not{p} - m)(\not{p} + m)} = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}$$

avendo tenuto conto che $\not{p}\not{p} = p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = p_\mu p_\nu (g^{\mu\nu} + 1/2[\gamma^\mu, \gamma^\nu]) = p^2$ (il termine di anticommutatore non contribuisce).

5.5 Un esempio di decadimento

Consideriamo il decadimento di un bosone vettore di massa M (figura 4) in una coppia fermione-antifermione di massa m . Supponiamo che l'accoppiamento sia $ie\gamma_\mu$ con e carica dell'elettrone. L'ampiezza di decadimento, a meno di una fase e indicando con ϵ la polarizzazione del bosone vettore, è:

$$\mathcal{A} = \bar{u}(k_1) e \gamma_\mu v(k_2) \epsilon^\mu(p)$$

Consideriamo ora un decadimento non polarizzato. nel caso del bosone vettore massivo le polarizzazioni possibili sono 3, e sono date dalla (58); per mediare sulle polarizzazioni iniziali bisogna quindi dividere per 3. inoltre la somma sulle polarizzazioni è data dalla (60), per cui:

$$|\overline{\mathcal{A}}|^2 = \frac{e^2}{3} (-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M^2}) \text{Tr}\{(k_2 - m)\gamma_\mu(k_1 + m)\gamma_\nu\} = \frac{4e^2}{3} (-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{M^2}) [k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - g^{\mu\nu}(m^2 + k_1 k_2)]$$

Notiamo che il termine in $p_\mu p_\nu$ non contribuisce; ad esempio è facile verificare che $p_\mu [k_1^\mu k_2^\nu + \dots] = 0$. Alternativamente, si può osservare che sostituendo ϵ_μ con p_μ nell'ampiezza si ottiene 0. Il modulo quadro dell'ampiezza risulta quindi

$$|\overline{\mathcal{A}}|^2 = \frac{4e^2}{3} (4m^2 + 2k_1 k_2) = \frac{4e^2}{3} (M^2 + 2m^2)$$

dove l'ultimo passaggio si ottiene dalla relazione, valida nel centro di massa, $M^2 = (k_1 + k_2)^2 = 2m^2 + 2k_1 k_2$. Infine, utilizzando la (168) si ottiene:

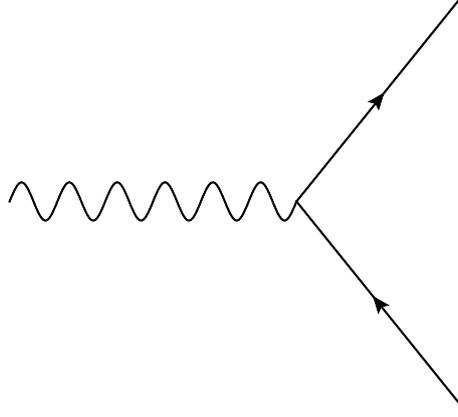


Figure 4: Diagramma di Feynman per decadimento di un bosone vettore.

$$d\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} \frac{\sqrt{\frac{M^2}{4} - m^2}}{M^2} \frac{4e^2}{3} (M^2 + 2m^2) d\Omega$$

Si lascia come esercizio di determinare la larghezza totale e la vita media nel caso particolare $M=1$ GeV, m =massa dell'elettrone. Ha senso il caso $m = M$?

A Appendice

A.1 Matrici di Dirac e loro tracce

Le matrici di Dirac sono matrici 4x4 che soddisfano l'algebra:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad (201)$$

Una base possibile, utile per le applicazioni relativistiche, è la seguente:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \text{ con } \sigma^\mu = (1, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma}); \text{ inoltre } \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (202)$$

Calcoliamo ora le tracce che compaiono nelle sezioni d'urto.

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} = 4g_{\mu\nu}; \quad \text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\} = 4(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}); \quad \text{Tr}\{\text{n. dispari di matrici } \gamma\} = 0 \quad (203)$$

Per quel che riguarda le tracce che includono γ^5 , si ha:

$$\text{Tr}\{\gamma^5\} = \text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma^5\} = \text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma^5\} = \text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma^5\} = 0; \quad \text{Tr}\{\gamma^5\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\gamma\gamma^\delta\} = -4i\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (204)$$

Esistono poi altre identità utili che riguardano le contrazioni:

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4 \quad \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\mu = -2\gamma^\alpha \quad \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu = 4g^{\alpha\beta} \quad \gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\delta\gamma^\mu = -2\gamma^\delta\gamma^\beta\gamma^\alpha \quad (205)$$

$$\gamma_\mu\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\delta\gamma^\gamma\gamma^\mu = 2(\gamma^\gamma\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\delta + \gamma^\delta\gamma^\beta\gamma^\alpha\gamma^\gamma) \quad (206)$$

Vediamo ora come ricavare queste regole. $\text{Tr} \{ \gamma_\mu \} = 0$ è ovvio dalla definizione (44) delle matrici γ . Per due matrici abbiamo $\text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \} = \text{Tr} \{ \frac{[\gamma_\mu, \gamma_\nu]}{2} + \frac{\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}}{2} \} = \frac{1}{2} \text{Tr} \{ 2g_{\mu\nu} \} = 4g_{\mu\nu}$, avendo utilizzato $\{ \gamma_\mu, \gamma_\nu \} = 2g_{\mu\nu} I$ (I =matrice identità). Notare che il termine di anticommutatore non contribuisce per via della proprietà di ciclicità della traccia $\text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \} = \text{Tr} \{ \gamma_\nu \gamma_\mu \}$. Per la traccia di 3 matrici conviene utilizzare la matrice γ_5 introdotta in (44) e che soddisfa $\gamma_5^2 = 1, \{ \gamma_5, \gamma_\nu \} = 0$ *. Allora

$$\text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \} = \text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_5^2 \} = \text{Tr} \{ \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_5 \} = -\text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_5 \} = -\text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_5^2 \} = -\text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \} \quad (207)$$

e analogamente per un numero dispari qualunque di matrici γ . Infine, resta da valutare la traccia di 4 matrici γ ; usiamo ripetutamente la regola di anticommutazione $\gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu + 2g_{\mu\nu}$ (evidenzio le coppie per le quali uso questa identità):

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ \widehat{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma} \} &= -\text{Tr} \{ \gamma_\nu \widehat{\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma} \} + 2g_{\mu\nu} \text{Tr} \{ \gamma_\rho \gamma_\sigma \} = \text{Tr} \{ \gamma_\nu \gamma_\rho \widehat{\gamma_\mu \gamma_\sigma} \} - 2g_{\rho\mu} \text{Tr} \{ \gamma_\nu \gamma_\sigma \} + 8g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} \\ &= -\text{Tr} \{ \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\mu \} + 8g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - 8g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} + 8g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu} \end{aligned} \quad (208)$$

da cui il risultato che appare in (203). Le contrazioni (205) sono facili da ricavare da $\{ \gamma_\mu, \gamma_\nu \} = 2g_{\mu\nu}$.

A.2 Regole di Feynman per la QED

Le regole di Feynman per la QED sono riassunti nelle seguenti tre figure. In figura 5 sono indicate le regole per stati finali e iniziali fermionici, sia di particella che di antiparticella. A queste vanno aggiunte le regole per stato finale/iniziale di fotone, cui corrisponde ϵ_μ , e per stato finale/iniziale di scalare, cui corrisponde 1. In figura 6 sono indicate le regole per i propagatori; la prescrizione $+i\epsilon$ al denominatore è omessa in quanto irrilevante nella stragrande maggioranza dei casi. Le regole per i vertici sono in figura 7.

References

- [1] Stefano Patri "Introduzione alla Meccanica Quantistica Relativistica", Edizioni Nuova Cultura.
- [2] M. Maggiore, "A modern introduction to quantum field theory", Oxford university press.
- [3] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, An Introduction to quantum field theory,
- [4] A. M. Steane, "An introduction to spinors," arXiv:1312.3824 [math-ph].
- [5] P. Ciafaloni, "La più grande cantonata di Einstein", ithaca.unisalento.it numero X
- [6] D. V. Karlovets, G. L. Kotkin and V. G. Serbo, Phys. Rev. A **92** (2015) 052703 [arXiv:1508.00026 [quant-ph]], <https://arxiv.org/pdf/1508.00026.pdf>
- [7] M. Kaku, "Quantum Field Theory- A modern introduction", Oxford University Press
- [8] C. Itzykson and J. Zuber, "Quantum Field Theory", McGraw-Hill

*la matrice γ_5 è di fondamentale importanza nella descrizione delle interazioni deboli

- [9] T. Cheng and L. Li, “Gauge Theory of Elementary Particle Physics”, Oxford Science Publications
- [10] L. A. Harland-Lang, A. D. Martin, P. Motylinski and R. S. Thorne, Eur. Phys. J. C **75** (2015) no.5, 204 doi:10.1140/epjc/s10052-015-3397-6 [arXiv:1412.3989 [hep-ph]].
- [11] F. Mandl and G. Shaw, Quantum Field Theory (Wiley Ed.)



Figure 5: Regole di Feynman per stati iniziali e finali fermionici. La freccia fermionica segue il flusso della carica della particella (e non l'impulso!); ad esempio carica - per l'elettrone. La macchia nera indica il diagramma di Feynman.

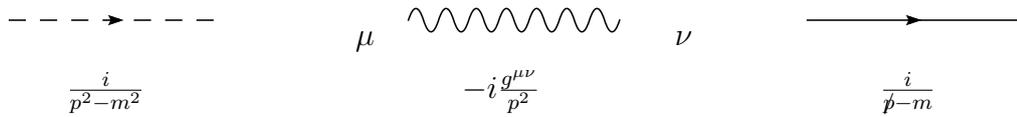


Figure 6: Regole di Feynman per i propagatori scalare, del fotone, fermionico

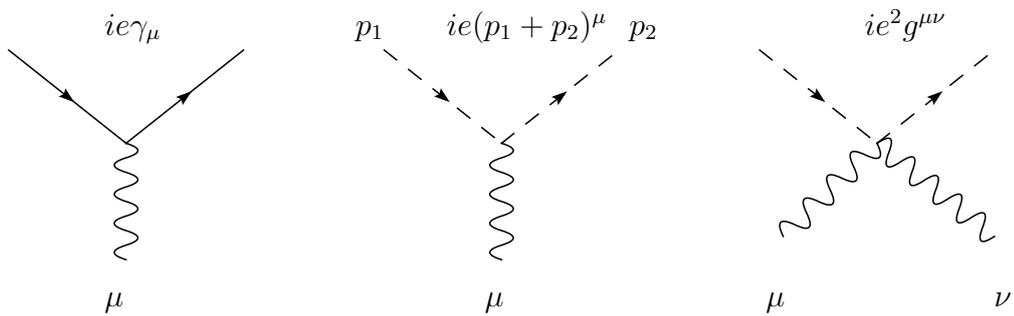


Figure 7: Regole di Feynman per i vertici