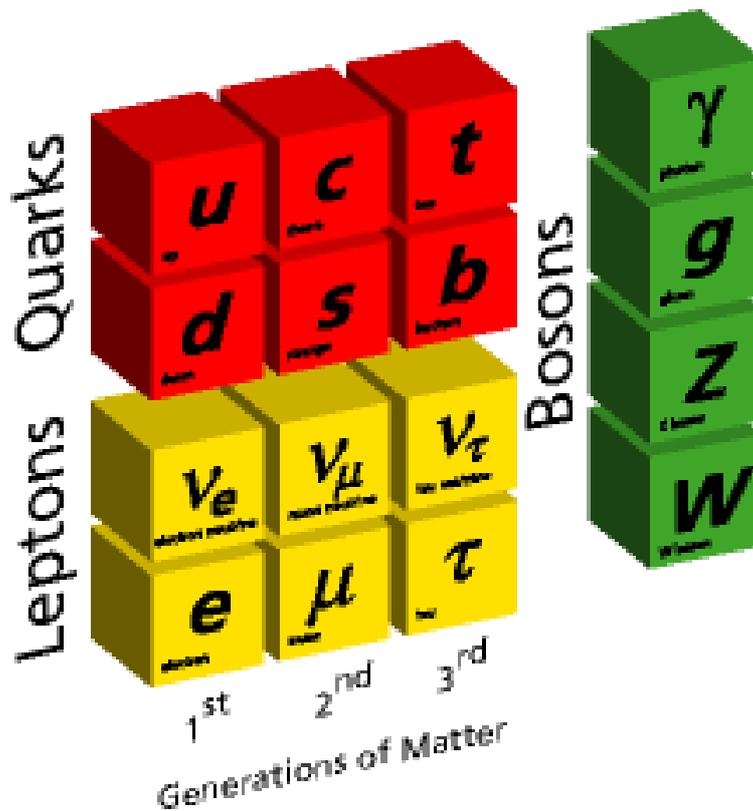


# Il Modello Standard delle interazioni elettrodeboli

Paolo Ciafaloni

*Dipartimento di Fisica Università di Lecce e INFN Sezione di Lecce  
Via Arnesano, 73100 Lecce E-mail: paolo.ciafaloni@le.infn.it*

## Elementary Particles



### Sommario

Questi sono gli appunti di un corso di dottorato di introduzione al Modello Standard delle interazioni elementari. Focalizzo l'attenzione sulle interazioni deboli, analizzando il meccanismo di generazione delle masse tramite rottura spontanea della simmetria di gauge nel settore di Higgs della teoria. Accenno alle caratteristiche salienti del modello (violazione di CP, flavor ecc.) ponendo l'accento sul confronto fra teoria ed esperimento.

# Indice

<b>I</b>	<b>Il Modello Standard e le sue verifiche sperimentali</b>	<b>1</b>
1	La simmetria di gauge	3
2	Rottura spontanea: il modello U(1)	3
3	Modello di Fermi e necessità di una nuova teoria	4
4	La Lagrangiana del Modello Standard	5
4.1	La parte di gauge . . . . .	5
4.2	Il settore di Higgs e quello di Yukawa . . . . .	6
4.3	Rottura di simmetria; masse di bosoni e fermioni . . . . .	7
4.4	Flavor e matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa . . . . .	8
5	Simmetrie discrete: Parità (P), coniugazione di carica (C), numero leptonic e numero barionico	10
6	Verifiche sperimentali Del Modello Standard	11
6.1	Verifiche di bassa energia . . . . .	11
6.1.1	Violazione di parità . . . . .	13
6.1.2	Misura sperimentale di $V_{us}$ . . . . .	13
6.1.3	Altre misure . . . . .	13
6.1.4	Sistema $K_0 - \bar{K}_0$ . . . . .	14
6.2	Verifiche di alta energia . . . . .	16
6.2.1	La massa dello Z e il numero di famiglie di neutrini . . . . .	16
6.2.2	Verifiche di Precisione a LEP . . . . .	17
7	Cosa sappiamo del bosone di Higgs	17
<b>II</b>	<b>Nuova Fisica: al di là del Modello Standard</b>	<b>17</b>
8	Gli “acciacchi” del Modello Standard	19
8.1	Oscillazioni di neutrini . . . . .	19
8.2	La quantizzazione della carica . . . . .	19
8.3	Il problema della gerarchia . . . . .	20
9	Grande Unificazione	20
10	Supersimmetria	21
11	Segnali di Nuova Fisica	21
12	.... e la gravità?	24
<b>A</b>	<b>Appendice</b>	<b>25</b>
A.1	Il gruppo SU(2) . . . . .	25
A.1.1	Fondamentale . . . . .	25
A.1.2	Aggiunta . . . . .	26
A.1.3	Composizione di due spin $\frac{1}{2}$ . . . . .	26
A.2	Il gruppo di Lorentz . . . . .	26
A.3	Matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) . . . . .	28

# Il Modello Standard e le sue verifiche sperimentali

In generale in fisica un Modello Standard è un modello che descrive una certa classe di fenomeni fisici e che è compatibile con una quantità notevole di verifiche sperimentali non banali; così ad esempio esistono il Modello Standard delle interazioni elementari e il Modello Standard della Cosmologia. La parola “modello”, in contrapposizione con “Teoria”, fa riferimento al fatto che non è stato raggiunto un grado soddisfacente di coerenza interna per cui si ritiene che sia in realtà una approssimazione di una teoria fisica più completa. La fisica cui il Modello Standard si rivolge è per l'appunto quella dei costituenti elementari della materia e delle forze, o interazioni, elementari fra tali costituenti. Dal punto di vista della teoria dei campi, che è il linguaggio in cui il MS è formulato, sia i costituenti della materia che le interazioni sono descritti da campi, cioè operatori definiti in ogni punto dello spazio-tempo. I fermioni, costituenti elementari della materia, e i bosoni mediatori delle interazioni fondamentali si possono riassumere nelle seguenti tabelle:

<b>FERMIONS</b>			matter constituents spin = 1/2, 3/2, 5/2,...		
Leptons spin = 1/2			Quarks spin = 1/2		
Flavor	Mass GeV/c <sup>2</sup>	Electric charge	Flavor	Approx. Mass GeV/c <sup>2</sup>	Electric charge
$\nu_e$ electron neutrino	$< 7 \times 10^{-9}$	0	<b>u</b> up	<b>0.005</b>	2/3
<b>e</b> electron	0.000511	-1	<b>d</b> down	<b>0.01</b>	-1/3
$\nu_\mu$ muon neutrino	$< 0.0003$	0	<b>c</b> charm	1.5	2/3
<b><math>\mu</math></b> muon	0.106	-1	<b>s</b> strange	<b>0.2</b>	-1/3
$\nu_\tau$ tau neutrino	$< 0.03$	0	<b>t</b> top (initial evidence)	<b>170</b>	2/3
<b><math>\tau</math></b> tau	1.7771	-1	<b>b</b> bottom	4.7	-1/3

Figura 1: Le tre famiglie di quarks e leptoni

<b>BOSONS</b>			force carriers spin = 0, 1, 2,...		
Unified Electroweak spin = 1	Mass GeV/c <sup>2</sup>	Electric charge	Strong or color spin = 1	Mass GeV/c <sup>2</sup>	Electric charge
$\gamma$ photon	0	0	<b>g</b> gluon	0	0
<b>W<sup>-</sup></b>	80.22	-1			
<b>W<sup>+</sup></b>	80.22	+1			
<b>Z<sup>0</sup></b>	91.187	0			

Figura 2: I bosoni mediatori delle forze fondamentali

Ci si può raffigurare intuitivamente la forza trasmessa fra due corpi come il risultato dello scambio di uno dei bosoni mediatori (vedi fig. 3(a)). In realtà il diagramma in fig. 3(a) è un diagramma di Feynman, ed ha un significato matematico preciso nell'ambito della teoria delle perturbazioni. Inoltre, essendo la teoria relativistica, è possibile la conversione di energia in materia e viceversa: questo significa che sono possibili processi di creazione e distruzione di particelle di materia, e non solo processi di scambio di interazioni. Peraltro, come già accennato, sia i costituenti della materia che i mediatori delle forze sono descritti da enti matematici detti campi. Senza entrare nei dettagli, accenniamo al fatto che i campi di materia hanno spin  $\frac{1}{2}$ , e sono quindi fermioni, mentre i campi che mediano le interazioni hanno spin 1, e sono quindi bosoni.

Componenti essenziali del Modello Standard sono la simmetria di gauge e il rottura spontanea di questa simmetria che produce le masse. Queste componenti vengono prese in esame nei prossimi paragrafi nel caso semplice di simmetria U(1).

# 1 La simmetria di gauge

La simmetria di gauge è una trasformazione locale (cioè dipendente dal punto dello spazio tempo) dei campi, che lascia invariante la Lagrangiana  $\mathcal{L}$ , o più precisamente l'azione  $\mathcal{S} = \int d^4x \mathcal{L}(x)$ . Nella sua forma più semplice, la simmetria agisce su un campo scalare  $\varphi(x)$  e su uno vettoriale  $(A_0(x), A_1(x), A_2(x), A_3(x))$  nella maniera seguente:

$$\varphi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)}\varphi(x) \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{i}{e}\partial_\mu\theta(x) \quad (1)$$

in maniera da lasciare invariante la Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D_\mu\varphi^*D^\mu\varphi \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (2)$$

Il significato fisico dell'invarianza di gauge è che tutte le osservabili che si possono misurare sperimentalmente sono indipendenti dalla trasformazione (1): ad esempio un cambio di fase nel campo scalare lascia invariate tutte le quantità fisiche purché allo stesso tempo si modifichi il campo  $A_\mu$  con la trasformazione di gauge. Così come avviene in meccanica quantistica, anche in teoria dei campi ad ogni simmetria corrisponde una quantità conservata. La quantità conservata nel caso della simmetria di gauge, che si può ottenere tramite il teorema noto in teoria dei campi come teorema di Noether, è la carica elettrica.

A questo punto occorre fare un'osservazione importante: la simmetria di gauge non è compatibile con una massa del campo di gauge diversa da zero. Infatti un termine di massa  $m^2 A^\mu A_\mu$  non è invariante per la trasformazione data dalla (1). Quindi tale simmetria può essere valida per la descrizione di un fotone di massa nulla, ma non ad esempio per i bosoni mediatori delle interazioni deboli, che hanno masse dell'ordine di 100 GeV.

## 2 Rottura spontanea: il modello U(1)

La rottura di simmetria in teoria dei campi può avvenire in due modi. Si parla di rottura esplicita della simmetria se la Lagrangiana non è invariante sotto una data simmetria. Ad esempio, se definiamo una trasformazione U(1) per un campo carico scalare  $\varphi(x)$  nel modo seguente:  $\varphi(x) \rightarrow e^{i\theta}\varphi(x)$ , un termine nella Lagrangiana  $\varphi^2(x) \rightarrow e^{2i\theta}\varphi^2(x)$  non è invariante, mentre un termine  $\varphi^*\varphi \rightarrow \varphi^*\varphi$  lo è. Quindi, se nella Lagrangiana è presente un termine proporzionale a  $\varphi^2$  la simmetria di gauge è rotta esplicitamente. Si dice che si ha rottura spontanea di una simmetria invece quando la Lagrangiana è invariante ma lo stato di vuoto (ovvero quello di minima energia) non lo è. Quindi, se la trasformazione è generata da un operatore di carica  $Q$  nel senso che  $\delta\varphi = [Q, \varphi]$ , si ha che  $\delta|0\rangle = Q|0\rangle \neq |0\rangle$  e quindi il vuoto non è invariante

L'esempio più semplice di rottura spontanea è dato dal modello scalare con invarianza *globale* U(1):

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - V(\varphi) \quad V(\varphi) = \lambda(\varphi^*\varphi)^2 - \mu^2(\varphi^*\varphi) \quad \lambda, \mu^2 > 0 \quad U(1) : \varphi(x) \rightarrow e^{i\theta}\varphi(x) \quad (3)$$

Il potenziale  $V(\varphi)$  ha un minimo per tutti i punti tali che  $(\varphi^*\varphi) = \frac{\mu^2}{2\lambda} \equiv v^2$ , connessi fra loro dalla simmetria U(1). In altre parole, siamo in un caso in cui c'è una degenerazione dei livelli; in particolare il livello di energia più bassa, cioè il vuoto, è infinitamente degenere. La rottura della simmetria è legata al fatto di scegliere come stato di minima energia attorno a cui espandere le "piccole oscillazioni" che sono i campi della teoria, uno in particolare di questi stati degeneri. Siccome c'è invarianza U(1) tutti i punti che soddisfano  $(\varphi^*\varphi) = v^2$  sono equivalenti e posso scegliere come vuoto la configurazione di campo in cui  $\langle\varphi(x)\rangle = v\forall x$ . In natura esistono molti esempi di rottura spontanea di simmetria; forse il più semplice è quello dei materiali ferro magnetici che sono descritti da una Hamiltoniana invariante per rotazione e tuttavia acquisiscono nello stato fondamentale un allineamento non nullo degli spin, cioè una magnetizzazione  $\mathbf{M}$  diversa da zero, in una data direzione. A questo punto il campo si può scrivere  $\varphi(x) = v + \sigma(x) + i\chi(x)$ ,  $\langle 0|\varphi(x)|0\rangle = v$ , dove  $\sigma(x)$ ,  $\chi(x)$  sono i campi delle "piccole oscillazioni", a valor medio nullo, che si quantizzano con le regole canoniche. Riscrivendo la Lagrangiana in termini di questi campi, si ottiene

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - 4\lambda v^2\sigma^2 - \lambda(\sigma^2 + \chi^2)^2 - 2v\sigma(\sigma^2 + \chi^2) \quad (4)$$

Si ha quindi un bosone  $\sigma$  (di Higgs) con massa  $M_H^2 \sim \lambda v^2$ , un bosone  $\chi$  (di Goldstone) con massa nulla che interagiscono con le interazioni trilineari e quartiche determinate dal potenziale. In generale il numero di bosoni di Goldstone a massa nulla, che esistono solo nel caso di rottura spontanea di una simmetria *continua*, è dato dal numero di generatori rotti, cioè dal numero di generatori che **non** lasciano invarianti il vuoto. Infatti a causa dell'invarianza del potenziale,

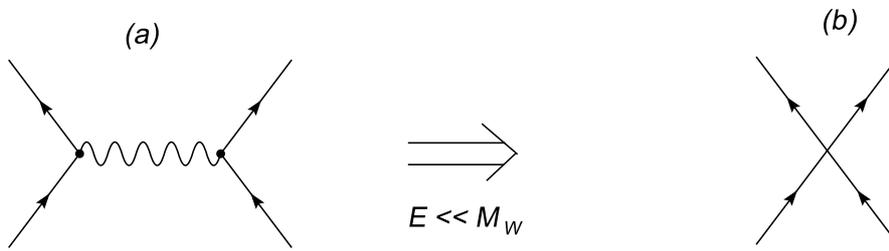


Figura 3: (a) Interazione fra due fermioni che si scambiano un bosone W e (b) interazione effettiva per  $E \ll M_W$  (teoria di Fermi)

tutti i punti ottenuti dal vuoto tramite una di queste trasformazioni hanno lo stesso valore del potenziale. Le piccole oscillazioni lungo le direzioni di tali generatori rotti corrispondono quindi a direzioni “piatte”, cioè a particelle di massa nulla.

Fenomeni qualitativamente diversi si hanno quando a rompersi è una simmetria *locale* anziché globale come visto finora. Consideriamo la Lagrangiana (3) con una simmetria di gauge, cioè in interazione con un campo vettore  $A_\mu$ :

$$\mathcal{L} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + D_\mu\varphi^*D^\mu\varphi - V(\varphi) \quad V(\varphi) = \lambda(\varphi^*\varphi)^2 - \mu^2(\varphi^*\varphi) \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu \quad (5)$$

Questa Lagrangiana è invariante sotto una simmetria di gauge U(1)  $\varphi(x) \rightarrow e^{i\theta(x)}\varphi(x)$ ,  $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{i}{e}\partial_\mu\theta(x)$ . Considerazioni analoghe a quelle sopra portano a concludere che si ha rottura spontanea con  $\langle A_\mu \rangle = 0$ ,  $\langle \varphi \rangle = v \neq 0$ . Convien scegliere una parametrizzazione diversa ma equivalente a quella sopra  $\varphi(x) = H(x) \exp[i\frac{\theta(x)}{v}]$  con  $H, \theta$  campi reali e  $\langle H \rangle = v$ . Ancora, possiamo descrivere le piccole oscillazioni scrivendo  $H(x) = v + \sigma(x)$ . La Lagrangiana si riscrive allora:

$$\mathcal{L} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\theta\partial^\mu\theta + e^2v^2A_\mu A^\mu - 4\lambda v^2\sigma^2 + \dots \quad (6)$$

dove i puntini stanno ad indicare le interazioni fra i campi  $A_\mu, \sigma, \theta$  che ometto per brevità ma che sono facilmente ricavabili dalla (5). Abbiamo, come nel caso della rottura di U(1) globale, un bosone di Goldstone  $\theta$  e un bosone di Higgs  $\sigma$ . In più però il fotone  $A_\mu$  **ha acquisito una massa** pari a  $e^2v^2$ . Il campo  $\theta$  in realtà non è un campo fisico della teoria, tant'è vero che può essere eliminato con una particolare scelta di gauge (gauge unitaria). Infatti se scelgo una trasformazione di parametro proprio  $-\frac{\theta}{v}$ , ho che  $\varphi(x) = H(x) \exp[i\frac{\theta(x)}{v}] \rightarrow \exp[-i\frac{\theta(x)}{v}]H(x) \exp[i\frac{\theta(x)}{v}] = H(x)$  e il campo  $\theta$  scompare dallo spettro della teoria. Corrispondentemente il campo  $A_\mu$  acquista una componente longitudinale, cioè proporzionale (in trasformata di Fourier) a  $k_\mu$  dove  $k$  è l'impulso del fotone:  $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{i}{e}\partial_\mu\frac{\theta(x)}{v}$ . Il conteggio dei gradi di libertà è coerente: prima della rottura abbiamo un fotone massless con 2 polarizzazioni trasverse e uno scalare carico cioè 4 gradi di libertà; dopo la rottura abbiamo un fotone massivo che acquisisce una polarizzazione longitudinale in più, e uno scalare neutro (Higgs), cioè ancora 4 gradi di libertà. Il meccanismo per cui quando si rompe una simmetria di gauge il bosone vettore acquista massa “mangiandosi” un bosone di Goldstone che ne fornisce la polarizzazione longitudinale, prende il nome di meccanismo di Higgs.

### 3 Modello di Fermi e necessità di una nuova teoria

La fisica delle interazioni deboli di bassa energia ( $E \lesssim 1 \text{ GeV}$ ) è ben descritta dal modello di Fermi (vedi ad es. [1] per molte applicazioni fenomenologiche):

$$\mathcal{L}_{Fermi} = G_F (J_\mu^+ J_\mu^- + \rho J_\mu^N J_\mu^N) \quad (7)$$

$$J_\mu^+ = \bar{u}_i V_{ij} \gamma_\mu P_L d_j + \bar{\nu}_i \gamma_\mu P_L e_i \quad J_\mu^- = (J_\mu^+)^{\dagger} \quad J_\mu^N = J_\mu^3 - s_w^2 J_\mu^{em} = \bar{f}_i \gamma_\mu P_L t_i^3 f_i - s_w^2 \bar{f}_i \gamma_\mu q_i f_i \quad (8)$$

dove  $G_F \sim 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$  è la costante di Fermi. Gli indici  $i, j$  sono di famiglia: la prima famiglia è composta dai quarks  $u, d$  e dai leptoni  $\nu_e, e$ ; la seconda contiene  $c, s, \mu, \nu_\mu$  e la terza  $t, b, \tau, \nu_\tau$ . Così ad esempio  $u_3 = t, e_2 = \mu$  e così via.

Questa Lagrangiana descrive ad esempio il decadimento  $\beta$  del neutrone, cioè il processo  $n_{(udd)} \rightarrow p_{(uud)} e^- \bar{\nu}_e$  (in parentesi il contenuto in quarks). Sorge però un problema: la Lagrangiana di Fermi è scritta in termini dei costituenti elementari, cioè i quarks, mentre nel decadimento  $\beta$  compaiono il neutrone e il protone, all'interno dei quali i quarks sono confinati. La situazione è peggiorata dal fatto che le interazioni forti che legano i quarks sono in regime non

perturbativo, quindi non si può applicare l'apparato migliore che abbiamo per passare dalla teoria all'esperimento, che è la teoria delle perturbazioni. Il problema è complesso; cercheremo di affrontarlo, almeno parzialmente, nel par. 6.1. Si può comunque stimare la larghezza di decadimento considerando che il decadimento può avvenire solo se il neutrone è più pesante del neutrone. Siccome  $\Gamma$  deve azzerarsi per  $m_p = m_n$ , l'unica scala da cui può dipendere è  $m_n - m_p \approx 1.3$  MeV. Nella  $\Gamma$  l'ampiezza  $\mathcal{A} \propto G_F$  compare al quadrato, per cui per ragioni dimensionali  $\Gamma \approx G_F^2 (m_n - m_p)^5$ . Un calcolo più raffinato porta a concludere che le previsioni del modello di Fermi sono in buon accordo col valore sperimentale della vita media del neutrone  $\tau = \frac{1}{\Gamma} \approx 886$  s. Come ultima notazione, va detto che il processo di decadimento del protone nel contesto di tale modello è impossibile in quanto il protone è più leggero del neutrone (ma il protone può decadere nell'ambito di modelli di unificazione delle forze, vedi più avanti). Sperimentalmente il limite sulla vita media del protone è  $\tau_p > 10^{31}$  anni, 21 ordini di grandezza più grande della vita dell'universo che è circa  $10^{10}$  anni.

Le quantità adimensionali  $\mathcal{A}$ , che compaiono ad esempio nelle sezioni d'urto  $\sigma \sim \frac{|\mathcal{A}|^2}{s}$  crescono, a causa del fatto che  $G_F$  ha dimensioni negative, come  $G_F E^2$  dove  $E$  è la scala tipica del processo (ad esempio: la massa del  $\mu$  nel caso del decadimento del  $\mu$ , l'energia del neutrino nel caso di uno scattering neutrino-nucleone, ecc.). Queste ampiezze quindi saturano il limite di unitarietà (per cui deve essere sostanzialmente  $|\mathcal{A}| < 1$ ) ad una energia tale che  $G_F E_W^2 \sim 1 \Rightarrow E_W \sim 300$  GeV. A energie molto più basse di  $E_W$ , gli andamenti tipici per sezioni d'urto e decadimento sono, per ragioni dimensionali,  $\sigma \sim G_F^2 E^2, \Gamma \sim G_F^2 m^{5*}$ . Oltre alla violazione di unitarietà, dal punto di vista della teoria dei campi il modello di Fermi ha un altro grave problema: non è rinormalizzabile. Infatti  $G_F$  ha dimensioni negative (-2). Allora, preso un cutoff ultravioletto  $\Lambda$ , gli ordini superiori nell'espansione perturbativa di un'ampiezza con dato numero di gambe esterne sono via via sempre più divergenti: aumentare un ordine di espansione perturbativa significa infatti moltiplicare per la costante adimensionale  $G_F \Lambda^2$ . Questo significa che esistono  $\infty$  ampiezze divergenti: dato un numero qualunque di gambe esterne, esiste un certo ordine della teoria delle perturbazioni al quale l'ampiezza diventa divergente. Siccome la Lagrangiana coinvolge invece un numero finito di termini, la rinormalizzabilità è perduta.

La violazione di unitarietà della teoria viene evitata supponendo che non esista una interazione "dura" del tipo corrente-corrente, bensì che l'interazione sia mediata dai bosoni intermedi massivi, con propagatore  $\sim \frac{1}{E^2 - M^2}$ . Quando  $E \ll M$  il propagatore diventa  $\sim \frac{1}{M^2}$  e va a costituire la costante di Fermi. Quando invece  $E \sim M$  gli effetti di propagatore non si possono trascurare e le ampiezze crescono molto meno con l'energia di quanto facciano a basse energie:  $M \sim E_W \sim 100$  GeV fa quindi da cutoff ultravioletto. Mettere una massa tuttavia non basta per la rinormalizzabilità: infatti il propagatore di un bosone massivo ha un termine  $\sim g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M^2}$  che cresce più delle sue dimensioni naturali e rovina il power counting, essenziale per la rinormalizzabilità. A parte questo, il modello di Fermi è insoddisfacente perchè gli ingredienti sono messi "a mano": alcune caratteristiche come l'accoppiamento universale  $\sim G_F$ , il fatto che il cambiamento di flavor stia solo nelle correnti cariche ed in particolare nel settore dei quarks, richiedono una spiegazione. La soluzione finale è una teoria di gauge rotta spontaneamente: la rottura di simmetria è un fenomeno di bassa energia che non rovina le buone proprietà di alta energia della teoria dovute alla simmetria di gauge. La rinormalizzabilità delle teorie di gauge rotte è stata dimostrata in [4].

Nei prossimi paragrafi cerchiamo di costruire una teoria che

- sia unitaria, Lorentz invariante, rinormalizzabile
- abbia come limite di bassa energia ( $E \sim 1$  GeV) la (7)

## 4 La Lagrangiana del Modello Standard

### 4.1 La parte di gauge

La Lagrangiana del Modello Standard è completamente determinata dal requisito di rinormalizzabilità, dalla simmetria di gauge e dal contenuto in particelle. Il gruppo che descrive la simmetria di gauge è il gruppo nonabeliano  $SU(3)_{color} \otimes SU(2)_{weak} \otimes U(1)_{hypercharge}$ . Il sottogruppo  $SU(3)_{color}$  descrive, appunto, il colore, cioè la carica delle interazioni forti. Da qui in avanti mi occuperò del gruppo  $SU(2)_{weak} \otimes U(1)_{hypercharge}$  che descrive le interazioni nucleari deboli e quelle elettromagnetiche, settore nel quale avviene la rottura della simmetria e la generazione delle masse.

Data la simmetria di gauge  $SU(2) \otimes U(1)$  e le rappresentazioni di tutte le particelle sotto questa simmetria, la Lagrangiana contiene tutte e sole le interazioni rinormalizzabili cioè con operatori di dimensione 4 o inferiore. Quanto

---

\*si può dimostrare rigorosamente che l'unitarietà della teoria implica che le sezioni d'urto possono crescere con l'energia al più come  $\sigma \sim (\log E)^2$ ; questo è il limite di Froissart [3]

al contenuto in particelle, o campi di materia, fissiamoci per ora sulla prima famiglia. Abbiamo quindi  $u, d, \nu, e$  che sono campi fermionici. Uno spinore di Dirac è un campo a 4 componenti formato da due spinori di Weyl:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix} \quad (9)$$

I due spinori di Weyl  $\Psi_L, \Psi_R$  sono gli usuali spinori a due componenti della meccanica quantistica, però appartengono a due rappresentazioni diverse del gruppo di Lorentz (vedi par. A.2 in Appendice). Fisicamente, essi corrispondono sostanzialmente a elettroni con spin lungo la direzione di moto ed elettroni con spin in direzione opposta a quella di moto. Una caratteristica del Modello Standard è che le interazioni deboli trattano in maniera diversa i fermioni di tipo left e quelli di tipo right, mettendoli in due rappresentazioni diverse del gruppo  $SU(2)$ . In particolare, i campi di tipo left sono doppietti di isospin debole, mentre quelli di tipo right sono singoletti:

$$Q_L \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \Rightarrow U(x) \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad d_R \Rightarrow d_R \quad u_R \Rightarrow u_R \quad (10)$$

dove  $U(x)$  è una matrice di  $SU(2)$  dipendente dal punto  $x$ . Contestualmente si introducono tre campi di gauge  $A_1, A_2, A_3$  che sono un tripletto di isospin, e un campo  $B_\mu$  singoletto. Le trasformazioni di gauge per questi campi sono:

$$A_\mu^a \Rightarrow A_\mu'^a \quad \text{tale che} \quad A_\mu'^a \tau^a = U A_\mu^a \tau^a U^{-1} + (\partial_\mu U) U^{-1} \quad B_\mu \Rightarrow B_\mu' = B_\mu + i\partial_\mu \theta \quad (11)$$

con  $\tau^a, a = 1, 2, 3$  matrici di Dirac e con  $U(x) = \exp[i\alpha^a(x)\tau^a + i\theta(x)Y]$ . Siamo ora in grado di scrivere la parte di gauge della Lagrangiana di Modello Standard, invariante sotto le trasformazioni (10,11):

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}\text{Tr}\{\mathbf{F}_{\mu\nu}\mathbf{F}^{\mu\nu}\} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} + \sum_k i\bar{\Psi}_k \mathbf{D}_\mu \gamma^\mu \Psi_k \quad (12)$$

$$\mathbf{A}_\mu = A_\mu^a T^a \quad \mathbf{D}_\mu = \partial_\mu - ig\mathbf{A}_\mu - ig'B_\mu Y \quad \mathbf{F}_{\mu\nu} = i[\partial_\mu - ig\mathbf{A}_\mu, \partial_\nu - ig\mathbf{A}_\nu] = F_{\mu\nu}^a T^a \quad B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad (13)$$

Un piccolo inciso sulle notazioni. I generatori del gruppo  $SU(2)$   $T^a$  soddisfano le relazioni  $[T^a, T^b] = i\varepsilon_{abc}T^c$  e agiscono sui campi a seconda delle rappresentazioni; così ad esempio  $T^a e_R = 0$ , di modo che  $e_R$  non ha interazioni con i campi di gauge non abeliani  $A_i$  (vedi la (12)). L'indice  $k$  qui varia sulle 5 rappresentazioni della prima famiglia:  $L = (\nu_L, e_L), Q = (u_L, d_L), e_R, u_R, d_R$  avendo considerato massless il neutrino (vedi piú avanti le considerazioni sulla massa del neutrino).

## 4.2 Il settore di Higgs e quello di Yukawa

Come abbiamo visto nel par. 1 la simmetria di gauge è incompatibile con una massa non nulla dei bosoni di gauge, in contraddizione con le osservazioni sperimentali di bosoni di gauge con masse vicine ai 100 GeV. Diversamente dal caso della QED, in cui un termine di massa fermionico  $m\bar{\Psi}\Psi$  è consentito dalla simmetria abeliana  $\Psi \rightarrow e^{i\theta}\Psi$ , nel caso del Modello Standard anche un termine di massa fermionico è proibito dalla simmetria di gauge, a causa della asimmetria fra fermioni left e right. Infatti un termine di massa si scrive:

$$m\bar{\Psi}\Psi = m(\bar{\Psi}_R\Psi_L + \bar{\Psi}_L\Psi_R) \quad \Psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\Psi \quad \Psi_R = \frac{1+\gamma_5}{2}\Psi \quad (14)$$

e un termine di massa ad esempio per i quarks  $u, d$  si scrive:

$$m_u(\bar{u}_L u_R + \bar{u}_R u_L) + m_d(\bar{d}_L d_R + \bar{d}_R d_L) \quad (15)$$

e questo termine non è ovviamente invariante sotto le trasformazioni di gauge definite dalla (10) che ruota solo le componenti left.

Le masse dei fermioni quindi, al pari di quelle dei gauge bosons, devono generarsi tramite il meccanismo di rottura spontanea. A questo scopo, al contenuto in particelle finora visto va aggiunto il settore di Higgs che è costituito nel MS minimale da uno scalare  $\varphi$ , doppietto di  $SU(2)$  alla pari di  $Q_L$ :

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_0 \end{pmatrix} \quad \bar{\phi} \equiv i\sigma_2 \phi^* = \begin{pmatrix} \varphi_0^* \\ -\varphi_- \end{pmatrix} \quad (16)$$

Sotto trasformazioni di gauge si ha (vedi par. A.1.1):

$$\phi \rightarrow U\phi \quad \bar{\phi} \equiv i\sigma_2\phi^* \rightarrow i\sigma_2U^*\phi^* = Ui\sigma_2\phi^* = U\bar{\phi} \quad (17)$$

cioè  $\phi, \bar{\phi}$  trasformano nello stesso modo. Con il campo di Higgs si possono ad esempio costruire i seguenti termini invarianti rinormalizzabili di dimensione 4 ( $\alpha$  sono gli indici di isospin SU(2); h.c. indica l'hermitiano coniugato,  $\varphi_- = \varphi_+^*$ ):

$$(\phi_\alpha^\dagger \phi_\alpha)^2 = (\varphi_- \varphi_+ + \varphi_0 \varphi_0^*)^2 \quad \bar{Q}_L^\alpha d_R \phi^\alpha + h.c. = \bar{u}_L \phi_+ d_R + \bar{d}_L \phi_0 d_R + h.c. \quad (18)$$

Il secondo termine in questa equazione è detto “di Yukawa” ed è responsabile delle masse dei fermioni. oltre a termini analoghi che coinvolgono i leptoni left  $Q_L = (U_L, D_L)$  e right. Per quanto riguarda l'invarianza U(1), notare che vale sempre  $y(D_R) - y(Q_L) = q_D - (q_D - t_D^3) = t_D^3 = -\frac{1}{2}$  mentre  $y(U_R) - y(Q_L) = q_U - (q_U - t_U^3) = t_U^3 = \frac{1}{2}$  per cui la giusta assegnazione di ipercarica è  $y(\phi) = \frac{1}{2}$ .

Scriviamo ora la parte di  $\mathcal{L}_{SM}$  che coinvolge il doppietto di Higgs con le sue interazioni coi fermioni:

$$Y_d \bar{Q}_L \phi d_R + Y_u \bar{Q}_L \bar{\phi} u_R + h.c. - V(\phi) \quad V(\phi) = \lambda(\phi^\dagger \phi - v^2)^2 \quad (19)$$

con  $Y_d, Y_u, \lambda, v$  costanti arbitrarie, tutte adimensionali tranne  $v$  che ha dimensioni di massa. E' importante osservare che la forma di queste interazioni è la più generale possibile: queste sono tutte e sole le interazioni compatibili con la simmetria di gauge e con il requisito di rinormalizzabilità della teoria.

### 4.3 Rottura di simmetria; masse di bosoni e fermioni

La forma del potenziale in (77) causa rottura spontanea della simmetria di gauge SU(2)⊗U(1) per cui lo scalare di Higgs acquista un vacuum expectation value (v.e.v.)  $\langle 0|\phi|0\rangle = v$ . la direzione di rottura spontanea non è arbitraria perche deve rispettare U(1)<sub>em</sub> (da non confondere con l'U(1) di ipercarica in SU(2)⊗U(1)). Questo significa che non può essere il campo carico  $\varphi^+$  in (16) ad acquisire un vev (vacuum expectation value,  $v = \langle 0|\phi|0\rangle$ ) perchè sotto trasformazioni U(1)<sub>em</sub>  $\varphi^+ \rightarrow e^{i\theta}\varphi^+$  non è invariante. E' la parte neutra invece ad acquisire un vev  $v$ :

$$\phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad ; \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\varphi_2 \\ v + \sigma + i\varphi_3 \end{pmatrix} \quad (20)$$

La rottura avviene quindi in maniera complicata:  $\phi_0$  è invariante solo sotto il generatore  $Q \equiv T_3 + Y$  mentre non lo è sotto gli altri generatori  $T_3 - Y, T_2, T_1$ . La struttura di rottura della simmetria è quindi  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$ . Corrispondentemente, si hanno 3 bosoni di Goldstone  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  che corrispondono alle direzioni rotte. Questi 3 bosoni daranno massa ai bosoni  $W^+, W^-, Z$  tramite il meccanismo di Higgs. Per vedere questo, riscriviamo la Lagrangiana nel settore di Higgs tenendo conto del gauging che implica  $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ :

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D_\mu \phi)^\dagger D_\mu \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi - v^2)^2 \quad (21)$$

La parte che dà le masse dei bosoni si può scrivere :

$$\langle \phi | (gA_\mu^a T^a + g'B_\mu Y) (gA_\mu^b T^b + g'B_\mu Y) | \phi \rangle = g^2 v^2 (A_\mu^1 A_\mu^1 + A_\mu^2 A_\mu^2) + v^2 (gA_\mu^3 - g'B_\mu)^2 \quad (22)$$

Lo spettro è quindi costituito dai seguenti bosoni con relative masse ( $s_W \equiv \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, Q = T_3 + Y$ ):

$$W^\pm \equiv \frac{A_1 \mp iA_2}{\sqrt{2}}; M_W = gv \quad Z \equiv c_W A_3 - s_W B; M_Z = \sqrt{g^2 + g'^2}v \quad A \equiv s_W A_3 + c_W B; M_\gamma = 0 \quad (23)$$

$$gA_\mu^3 T^3 + g'B_\mu Y = \frac{g}{c_W} Z_\mu (T_3 - s_W^2 Q) + eQ A_\mu \quad e \equiv gs_W = g'c_W \quad (24)$$

Quest'ultima espressione chiarisce il perchè manchi automaticamente una massa per il fotone in quanto  $Q\langle \phi \rangle = 0$ . Acquista invece massa la combinazione ortogonale  $(gA_\mu^3 T^3 + g'B_\mu Y)\langle \phi \rangle \sim -gA_\mu^3 + g'B_\mu$ , che è il bosone Z. L'invarianza U(1)<sub>em</sub> assicura che il fotone rimanga massless a tutti gli ordini della teoria perturbativa.

E' facile a questo punto scrivere termini di interazione fra gauge bosons e fermioni che derivano dalla (12) nella base fisica (23):

$$\mathcal{L} \supset \frac{g}{c_W} Z_\mu \sum_k i\bar{\Psi}_k \gamma_\mu (T^3 - s^2 Q) \Psi_k + \bar{\Psi}_k \gamma_\mu Q \Psi_k + g(W_\mu^+ \bar{\Psi}_k \gamma_\mu T^+ \Psi_k + h.c.) \quad (25)$$

Veniamo ora alle masse dei quarks, che si ottengono dalla (19) con la sostituzione  $\phi \rightarrow \langle \phi \rangle$ :

$$Y_d v \bar{d}_L d_R + h.c. + Y_d v \bar{u}_L u_R^i + h.c. \quad (26)$$

I fermioni acquisiscono quindi masse proporzionali al vev,  $m \sim Yv$ . Di conseguenza, gli accoppiamenti  $Y$  dei fermioni al bosone di Higgs sono proporzionali alle masse dei fermioni stessi. Questo è importante fenomenologicamente per la ricerca sperimentale del bosone di Higgs, che decade prevalentemente nel sapore bottom (il canale del top è probabilmente chiuso per spazio delle fasi).

Si può verificare che la Lagrangiana di bassa energia è data proprio dalla (7), con in più la relazione importante:

$$\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta_W} = 1 \quad (27)$$

Sperimentalmente [5]:

$$\rho = 1.0107 \pm 0.0006 \quad (28)$$

Anche se il valore misurato è molto vicino a 1, la (28) e la (27) sembrano essere in contraddizione se si pensa alla (27) come una predizione della teoria, in quanto il valore (28) non è compatibile con 1 entro l'incertezza sperimentale. In realtà però la (27) è una predizione della Lagrangiana *classica*, che non tiene in conto le correzioni *quantistiche*<sup>†</sup>. Tali correzioni sono dell'ordine del parametro di espansione della teoria perturbativa,  $\frac{\alpha}{4\pi} \approx 10^{-3}$ , dove  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$  con  $e$  carica dell'elettrone in unità naturali. Un valore di  $\rho$  così vicino a 1 non è casuale: esso corrisponde al fatto che nel Modello Standard, dopo rottura della simmetria  $SU(2) \otimes U(1)$ , oltre alla simmetria esatta  $U(1)_{em}$  locale, sopravvive una simmetria residua, detta custodial symmetry. Si tratta di una simmetria  $SU(2)$  *globale*, valida solo in maniera approssimata in quanto rotta per l'appunto da termini nella Lagrangiana proporzionali alla costante di accoppiamento  $\alpha$ . Non entrerà in maggior dettaglio su questo punto.

#### 4.4 Flavor e matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa

E' un fatto sperimentale che le diverse famiglie finora conosciute, riassunte nella figura I, si mescolano fra loro, dando luogo a processi in cui una particella di una data famiglia si trasforma in una particella dell'altra. Tale fenomeno avviene solo nel settore dei quarks, e non in quello dei leptoni. Ad esempio (fra parentesi il contenuto in quark dei mesoni coinvolti):

$$K^+(u\bar{s}) \rightarrow \pi^0(u\bar{u}) e^+ \nu_e \quad \text{B.R.} = (4.82 \pm 0.06)\% \quad B^0(d\bar{b}) \rightarrow \pi^-(d\bar{u}) l^+ \nu_l \quad \text{B.R.} = (1.8 \pm 0.6)10^{-4} \quad (29)$$

L'analisi quantitativa di tale tipo di processi, e quindi il confronto fra teoria ed esperimento, è resa difficile dal fatto che i quarks, a differenza dei leptoni, non esistono come particelle libere (confinamento), e la descrizione degli adroni in termini dei loro costituenti e delle interazioni fondamentali del Modello Standard è un problema non risolto. Dal punto di vista qualitativo comunque, si capisce come un quark della terza famiglia (il bottom) sia diventato un quark della prima famiglia (l'up). Come può il Modello Standard descrivere tale tipo di processi? Per capirlo, dobbiamo ritornare al settore di Yukawa: la forma che come appare nella (19) non è la più generale possibile se si tiene in conto della esistenza di 3 famiglie; la forma più generale compatibile con la simmetria di gauge è (vedi par. A.3 in Appendice):

$$\bar{Q}_L^i \mathbf{\Lambda}_d^{ij} d_R^j \phi + h.c. + \lambda_u^i \bar{Q}_L^i U_R^i \bar{\phi} + h.c. \quad (30)$$

dove gli indici  $i, j = 1, 2, 3$  sono di famiglia e dove  $\mathbf{\Lambda}$  è una matrice 3x3 hermitiana. Veniamo ora alle masse dei quarks, che si ottengono dalla (30) con la sostituzione  $\phi \rightarrow \langle \phi \rangle$ :

$$Z_\mu [\bar{d}_L^i (t_3 - s_w^2 q) \gamma^\mu d_L^i + \bar{d}_R^i (t_3 - s_w^2 q) \gamma^\mu d_R^i + d \leftrightarrow u] + W_\mu^+ \bar{u}_L^i \gamma^\mu d_L^i + v \bar{d}_L^i \mathbf{\Lambda}_d^{ij} d_R^j + \lambda_i^u v \bar{u}_L^i u_R^i \quad (+h.c.) \quad (31)$$

La (31) evidenzia un fatto importante: non è possibile fare una trasformazione unitaria sui campi, ovvero un cambiamento di base, che diagonalizzi contemporaneamente i termini di massa e le interazioni di gauge. In effetti è possibile diagonalizzare la matrice  $\mathbf{\Lambda}_d^{ij}$  con una rotazione dei campi  $d_L, d_R$ , ma questo porta inevitabilmente fuori diagonale le interazioni di gauge nel settore carico. Peraltro, ed è questa l'altra annotazione importante, qualsiasi rotazione dei

<sup>†</sup>si dice anche che è una predizione della teoria "ad albero", riferendosi alla topologia dei diagrammi di Feynman che corrisponde al primo ordine perturbativo

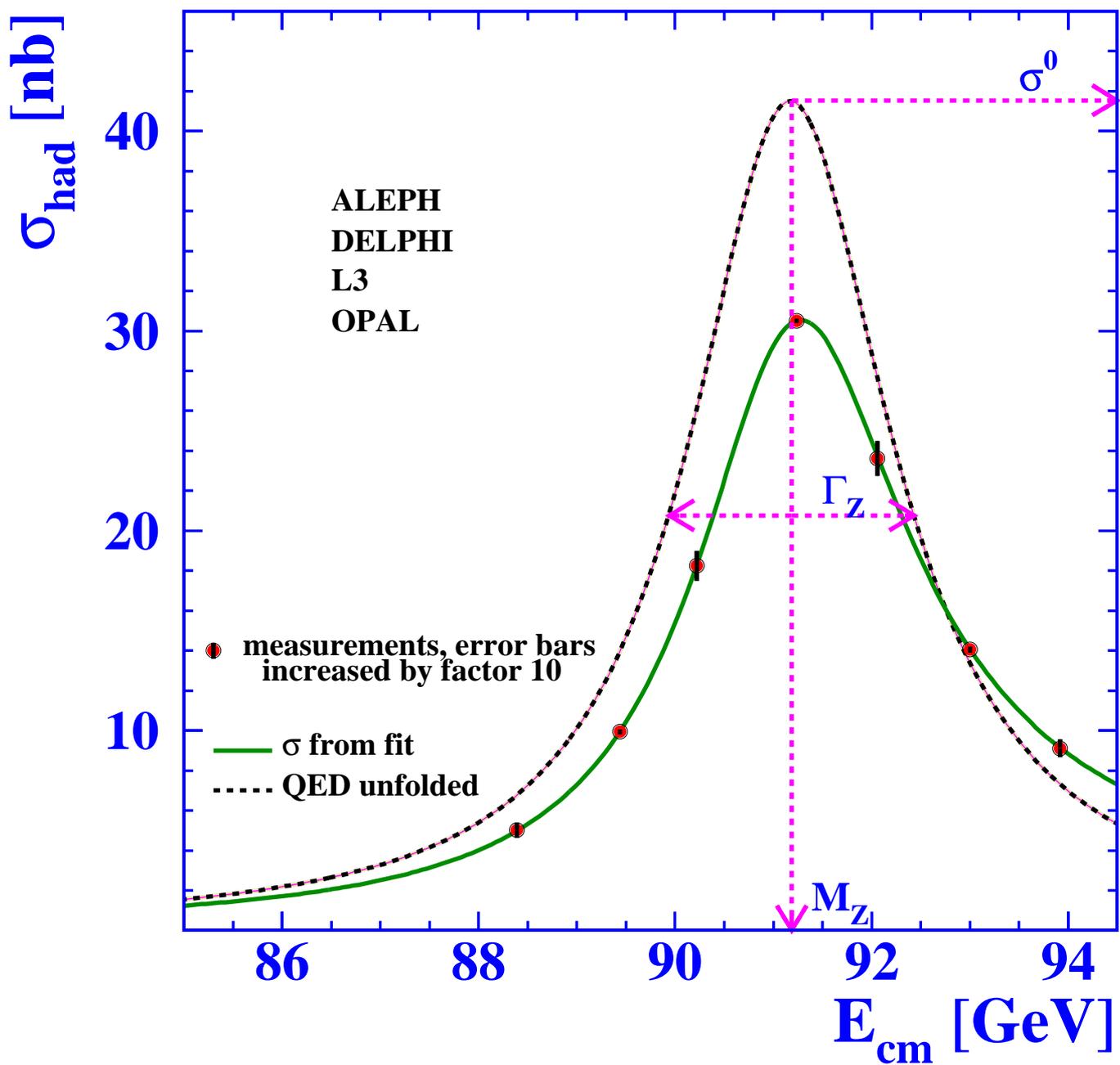


Figura 4: Sezione d'urto adronica  $e^+e^- \rightarrow Had$ . In linea continua verde il fit dai dati, in linea tratteggiata la sezione d'urto misurata una volta tenuto conto delle correzioni di QED, cioè dell'emissione di fotoni da parte di elettroni e positroni iniziali.

campi lascia invariate le interazioni neutre: la Lagrangiana classica non ha termini che violano il flavor nel settore neutro. Analogamente al caso del  $\rho$ , occorre precisare che anche se non ci sono interazioni neutre che violano il flavor *a tree level*, queste interazioni vengono indotte agli ordini più elevati dello sviluppo perturbativo. Risulta a questo punto chiaro il perchè nel settore leptonic non ci siano violazioni di flavor neanche nelle correnti cariche. Infatti essendo i neutrini massless non c'è necessita di introdurre i  $\nu_R^i$  (l'analogo degli  $u_R$ ). Questo significa che, essendo il termine  $\lambda_i^\nu v \bar{\nu}_L^i \nu_R^i$  assente dalla Lagrangiana, i campi  $\nu_L^i$  possono essere ruotati liberamente ed in particolare in modo da assorbire i termini che violano il flavor nel settore carico.

Anche se la fisica è indipendente dalla particolare base scelta, è uso comune scegliere una base in cui i termini di massa, e quindi i propagatori, sono diagonali nel flavor. Occorre adesso diagonalizzare  $\Lambda$  per passare alla base fisica degli autostati di massa:  $d_{L,R} \rightarrow V^{CKM} d_{L,R}$ . E' facile vedere che questa trasformazione, oltre a diagonalizzare i termini di massa:

$$m_i^d d_L^i d_R^i + h.c. + m_i^u \bar{u}_L^i u_R^i + h.c. \quad (32)$$

ha come unico altro effetto quello di cambiare le correnti cariche, che diventano

$$(W_\mu^- \bar{u}_L^i V_{CKM}^{ij} \gamma^\mu d_L^j + h.c.) \quad (V^{CKM})^\dagger V^{CKM} = 1 \quad (33)$$

La matrice unitaria  $V^{CKM}$  è nel Modello Standard la sorgente di tutte le violazioni di flavor e della violazione di CP (vedi par. 5). Per la misura degli elementi della matrice si rimanda al Particle Data Group [5].

Un altro caso particolare in cui non ci sono violazioni di flavor in assoluto è quello di matrici di massa degeneri:  $m_d^i = m_d$  oppure  $m_u^i = 0$ ; anche in questo caso è possibile infatti fare rotazioni arbitrarie senza cambiare la matrice di massa. Il meccanismo tramite il quale le violazioni di flavor scompaiono in caso di masse degeneri si chiama meccanismo di GIM (Glashow-Iliopoulos-Maiani). E' possibile dimostrare che le violazioni di flavor sono proporzionali a  $(\frac{\delta m}{M_W})^2$  dove  $\delta m$  è una tipica differenza di masse (splitting) fra le diverse famiglie. E' questo il motivo per cui anche se i neutrini hanno massa, come gli esperimenti sembrano indicare, le violazioni di flavor nel settore leptonic sono trascurabili in quanto  $(\frac{m_\nu}{M_W})^2 \sim (\frac{1eV}{100GeV})^2 \sim 10^{-22}$ .

## 5 Simmetrie discrete: Parità (P), coniugazione di carica (C), numero leptonic e numero barionico

Alcune simmetrie discrete sono molto importanti in fisica; fra queste la parità P che cambia di segno le componenti spaziali di un quadrivettore e lascia invariata la componente temporale, e la coniugazione di carica C. Per ricordarsi di come agiscono le trasformazioni C, P, conviene partire dalla usuale corrente elettromagnetica  $J_\mu = e \bar{u} \gamma_\mu u$ . Sotto C cambia segno la carica e quindi tutta la corrente, mentre sotto P cambia segno solo la trivelocità, quindi  $J_\mu \xrightarrow{C} -J_\mu$ ,  $J_\mu \xrightarrow{P} J^\mu$ . Le trasformazioni di  $A_\mu$  si ottengono ricordandosi che la Lagrangiana di QED che contiene il termine  $J_\mu A^\mu$  è invariante sia sotto C che sotto P, per cui  $A^\mu \xrightarrow{C} -A^\mu$ ,  $A^\mu \xrightarrow{P} A_\mu$ .

Passiamo ora al caso più generale di correnti anche cariche che possono coinvolgere solo campi left o solo right; iniziamo con la parità P. Un fermione di tipo left è caratterizzato, nel limite di alta energia, dall'aver lo spin allineato con l'impulso. La parità lascia invariato lo spin e cambia il segno dell'impulso, trasformando il fermione in un fermione con spin anti-allineato con l'impulso, quindi di tipo right. Ricordandosi che la corrente  $J_\mu$  è un quadrivettore, si ottiene:

$$\bar{u}_L \gamma_\mu d_L \xrightarrow{P} \bar{u}_R \gamma^\mu d_R \quad ; \quad \bar{u}_R \gamma_\mu d_R \xrightarrow{P} \bar{u}_L \gamma^\mu d_L \quad (34)$$

Il Modello Standard **non** è quindi invariante sotto P. Ad esempio le correnti cariche coinvolgono solo i fermioni di tipo left. Il termine di corrente carica viene trasformato dalla parità in un termine che coinvolge i campi right, che non esiste nella Lagrangiana:

$$W_\mu^- \bar{u}_L \gamma_\mu d_L + h.c. \xrightarrow{P} W_\mu^- \bar{u}_R \gamma^\mu d_R + h.c. \quad (35)$$

Intuitivamente: le correnti cariche distinguono la destra dalla sinistra, in quanto coinvolgono solo oggetti sinistrorsi e non oggetti destrorsi. Per le verifiche sperimentali vedi il par. 6.1

La coniugazione di carica cambia il segno della carica della particella. Poicè un fermione con spin allineato all'impulso è di tipo left se particella, e di tipo right se antiparticella, C oltre a coniugare i campi scambia left con right, per cui (il segno - c'è perchè la corrente cambia segno sotto C):

$$\bar{u}_L \gamma_\mu d_L \xrightarrow{C} -\bar{d}_R \gamma_\mu u_R \quad ; \quad \bar{u}_R \gamma_\mu d_R \xrightarrow{C} -\bar{d}_L \gamma_\mu u_L \quad (36)$$

Il modello Standard non è invariante sotto C in quanto (ricordarsi che  $W_\mu^- \xrightarrow{C} -W_\mu^+$ )

$$W_\mu^- \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + W_\mu^+ \bar{d}_L \gamma^\mu u_L \xrightarrow{C} W_\mu^- \bar{u}_R \gamma^\mu d_R + W_\mu^+ \bar{d}_R \gamma^\mu u_R \quad (37)$$

A questo punto viene spontaneo chiedersi se il Modello Standard sia invariante sotto la trasformazione combinata CP; in effetti la prima trasformazione porta i left in right e la seconda riporta i right in left:

$$W_\mu^- \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + W_\mu^+ \bar{d}_L \gamma^\mu u_L \xrightarrow{C} W_\mu^- \bar{u}_R \gamma^\mu d_R + W_\mu^+ \bar{d}_R \gamma^\mu u_R \xrightarrow{P} W_\mu^- \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + W_\mu^+ \bar{d}_L \gamma^\mu u_L \quad (38)$$

Apparentemente quindi tutto fila liscio, senonchè ci siamo dimenticati della matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa nella (33). La trasformazione C coniuga i termini nella Lagrangiana, per cui l'effetto globale è:

$$W_\mu^- \bar{u}_L^i V_{ij} \gamma^\mu d_L^j + h.c. W_\mu^- \bar{u}_L^i V_{ij} \gamma^\mu d_L^j + h.c. \xrightarrow{CP} W_\mu^- \bar{u}_L^i V_{ij}^* \gamma^\mu d_L^j + h.c. \quad (39)$$

quindi l'invarianza CP impone che gli elementi della matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa siano *reali*. Nel Modello Standard, a causa della presenza di 3 famiglie di quarks, non è possibile ridefinire i campi in modo da ottenere questo: resta una fase complessa ineliminabile (vedi par. A.3). Questa fase è nel Modello Standard la sorgente delle violazioni di CP osservate nel sistema  $K - \bar{K}$  (par. 6.1.4). Notare che in presenza di 1 oppure 2 famiglie non sarebbe possibile descrivere la violazione di CP nel Modello Standard.

Altre simmetrie discrete molto importanti nel Modello Standard sono il numero barionico e il numero leptonico. Il numero barionico conta i barioni (per i quali vale 1), cioè gli adroni pesanti come il neutrone e il protone. Esso è invece 0 per gli adroni leggeri come il mesone  $\pi$ , il  $K$  eccetera. A livello dei quarks, B vale  $\frac{1}{3}$  per tutti i quarks, e ovviamente  $-\frac{1}{3}$  per tutti gli antiquarks. Si capisce allora come B valga 0 per i mesoni, composti da un quark e un antiquark, e 1 per i barioni composti da 3 quarks. La simmetria legata al numero barionico è una simmetria globale  $U_B(1)$  tale che  $\psi \rightarrow e^{i\theta B} \psi$  dove  $B$  è appunto il numero barionico. Guardando la Lagrangiana di Modello Standard è immediato verificare che  $U_B(1)$  è una buona simmetria. Di conseguenza il numero barionico è conservato, e questo rende stabile il protone. Infatti il protone non trova barioni più leggeri in cui decadere (mentre il neutrone, più pesante, decade). Potrebbe decadere in mesoni leggeri, ad esempio  $p \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e$  ma questo è proibito, appunto, dalla conservazione del numero barionico. Notare che  $U_B(1)$  è una simmetria *accidentale* del Modello Standard, cioè una simmetria che non è diretta conseguenza della simmetria di gauge, bensì dipende dalla simmetria di gauge, dal requisito di rinormalizzabilità e dal contenuto in particelle, cioè dalle rappresentazioni scelte per le particelle elementari. Appena quest'ultimo punto viene cambiato, il numero barionico può cessare di essere conservato perchè si aggiungono nuove particelle; è quanto accade in teorie supersimmetriche e/o di grande unificazione.

Infine, il numero leptonico (1 per i leptoni, -1 per gli antileptoni) è un'altra buona simmetria. Nel Modello Standard, oltre al numero leptonico totale  $N_e + N_\mu + N_\tau$  si conservano separatamente anche i numeri leptonici delle singole famiglie, in quanto non ci sono correnti che collegano le diverse famiglie come invece accade nel caso dei quark. Quindi si conservano separatamente  $N_e, N_\mu, N_\tau$  e un processo come  $\mu \rightarrow e \gamma$  è strettamente proibito.

## 6 Verifiche sperimentali Del Modello Standard

### 6.1 Verifiche di bassa energia

Le verifiche sperimentali del modello Standard sono state storicamente le prime ad essere fatte. Per "bassa energia" intendo qui  $E \lesssim 1$  GeV, energie alle quali la fisica del Modello Standard è descritta dalla Lagrangiana effettiva di Fermi (7). Nasce subito un problema però. A basse energia i gradi di libertà fisici non sono i quarks che compaiono nella (7) bensì gli adroni, cioè i barioni come protone neutrone ecc. e i mesoni come il  $\pi$ , il  $K$  ecc. (vedi [5] per una lista esaustiva). Nasce quindi il problema di valutare gli elementi di matrice degli operatore-correnti, scritti in termini di quarks, sugli stati fisici adronici. Per capire come si può affrontare questo problema osserviamo che un problema analogo nasce per gli elementi di matrice della corrente elettromagnetica. Se consideriamo lo scattering di un protone da un potenziale, argomenti generali di invarianza di Lorentz e di parità delle interazioni elettromagnetiche ci assicurano che tale elemento di matrice ha la forma:

$$\langle P(p_2) | J_\mu^{em} | P(p_1) \rangle = e \bar{U}_P(p_2) \{ F_1(q^2) \gamma_\mu + F_2(q^2) \sigma_{\mu\nu} q^\nu \} U_P(p_1) \quad (40)$$

dove  $p_1$  e  $p_2$  sono gli impulsi iniziale e finale del protone,  $q = p_1 - p_2$  e  $U_P(p)$  è lo spinore di Dirac del protone di impulso  $p$ . La carica del protone è per definizione quella misurata quando  $q \rightarrow 0$ ; questo perchè la carica è una

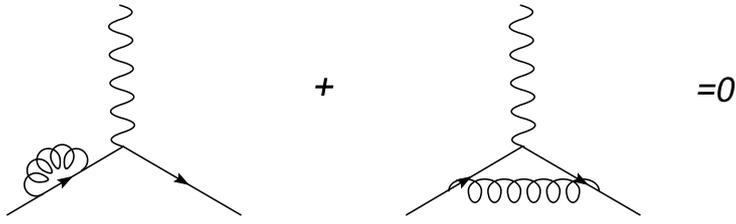


Figura 5: Identità di Ward per la corrente elettromagnetica

proprietà globale, misurata a grandi distanze. Per  $q \rightarrow 0$  l'elemento di matrice assume la forma:

$$\langle P(p_2) | J_\mu^{em} | P(p_1) \rangle \xrightarrow{q \rightarrow 0} e \bar{F}_1(0) U_P(p_2) \gamma_\mu U_P(p_1) \quad (41)$$

e quindi la carica misurata del protone è  $eF_1(0)$ . Che cosa sappiamo di  $F_1(0)$ ? In apparenza nulla, perchè i quark all'interno del protone hanno tutta una serie di interazioni complicate fra cui quelle di QCD (vedi fig. 6.1). Oltre al fatto che non è possibile pensare di calcolare le interazioni a tutti gli ordini perturbativi, c'è il problema ancora più grave che le interazioni forti sono nonperturbative alla scala di massa del protone, cioè 1 GeV. Non potendo utilizzare la teoria perturbativa e in mancanza di un credibile metodo non perturbativo, il calcolo dei fattori di forma elettromagnetici del protone è semplicemente impossibile. Quindi, come possiamo concludere che  $Q_P = 1$  dal fatto che  $2Q_u + Q_d = 1$ ? Come possiamo cioè stabilire che la carica elettrica è un numero quantico additivo, visto che non sappiamo nulla delle interazioni dei quark all'interno del protone? Lo possiamo sapere grazie alla simmetria delle interazioni, che si traduce nella conservazione dell'operatore corrente  $\partial_\mu J_\mu^{em} = 0$ . Da un punto di vista classico, il fatto che possiamo definire una carica e una corrente il cui flusso dà la variazione della carica in un dato volume, significa che la carica è conservata ed è una quantità additiva. Cioè le proprietà "di volume", a grandi distanze di un oggetto non dipendono dai dettagli della struttura. Da un punto di vista quantistico della teoria dei campi la conservazione della corrente si traduce nelle *identità di Ward*, che sono identità fra le funzioni di Green e in ultima analisi identità che collegano i vari diagrammi di Feynmann di un processo. Ad esempio, indipendentemente dalla particella coinvolta, le correzioni di vertice e di propagatore fermionico si annullano (vedi fig. 6.1) assicurando l'universalità della carica.

Passiamo ora agli elementi di matrice delle correnti *deboli*, che sono quelle che ci interessano e che sono definite nella (7). Che cosa possiamo dire degli elementi di matrice adronici, potenzialmente ignoti a causa delle interazioni forti non perturbative?

Nel caso degli elementi di matrice delle correnti deboli, la simmetria di gauge non è di nessuna utilità in quanto il settore debole è spontaneamente rotto ad una scala (circa 100 GeV) molto più grande della scala che ci interessa (circa 1 GeV). Le identità di Ward corrispondenti, diversamente da quanto succede per la QED, sono quindi pesantemente violate. Esiste però una simmetria *globale*, la simmetria chirale, che è rispettata dalle interazioni forti nel limite di masse nulle dei quark. Nel caso in questione possiamo considerare di massa nulla ad esempio il down e l'up, che hanno masse di pochi MeV. Questa simmetria ruota in maniera indipendente nello spazio di isospin (forte, e non debole!) i quark left e quelli right ed è quindi del tipo  $SU_L(2) \otimes SU_R(2)$ . Tuttavia questa simmetria non è realizzata nello spettro degli adroni (vedi [10]), che sembra essere invece compatibile con una simmetria di tipo vettoriale  $SU_V(2)$ , che ruota nello stesso modo i quark di tipo left e quelli di tipo right. L'idea è che anche qui c'è un meccanismo di rottura spontanea  $SU_L(2) \otimes SU_R(2) \rightarrow SU_V(2)$  i cui Goldstone, stavolta visibili perchè la simmetria è globale, sono i pioni leggeri  $\pi^+, \pi^0, \pi^-$ . Rimandando a [10] per i dettagli, mi limito ad osservare che è possibile definire correnti deboli conservate almeno in maniera approssimata, ottenendo informazioni quindi sugli elementi di matrice deboli negli adroni. Questo settore ha ricevuto un enorme impulso con lo sviluppo della teoria perturbativa chirale [10], che sistematizza questo tipo di procedimenti. A livello di correnti, possiamo dire che la corrente vettoriale è conservata (CVC) mentre quella assiale è solo parzialmente conservata; le correnti in questione sono:

$$J_\mu^{aV} = \bar{Q} \gamma_\mu \tau^a Q \quad J_\mu^{aA} = \bar{Q} \gamma_\mu \gamma_5 \tau^a Q \quad Q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (42)$$

Nel par. 6.1.2 dò un esempio di applicazione di ipotesi CVC.

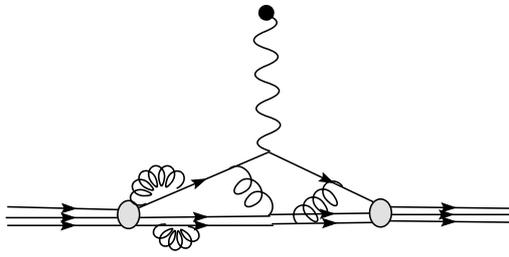


Figura 6: Scattering del protone da un potenziale elettromagnetico esterno (indicato col cerchietto nero). Le linee fermioniche sono i quarks, e le linee spiraleggianti sono i gluoni.

### 6.1.1 Violazione di parità

Una delle caratteristiche peculiari delle interazioni deboli è la violazione di parità. Questa si manifesta ad esempio nei decadimenti  $\beta$  di nuclei di Cobalto 60 con spin allineati in una direzione data da un campo magnetico. Si osserva una asimmetria fra il numero di elettroni uscenti nella semisfera “giù” e quelli uscenti nella direzione “sù”, dove le semisfere sono definite in base all’allineamento degli spin dei nuclei. Siccome sotto parità lo spin del nucleo è pari mentre l’impulso dell’elettrone finale è dispari, questa osservazione costituisce una violazione della simmetria sotto parità. Oggi, con migliaia di dati sperimentali e soprattutto con le osservazioni di LEP siamo in grado di asserire con precisione che la forma della corrente carica debole è del tipo V-A, cioè proporzionale a  $\gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_5$ . La violazione della parità è quindi massimale, essendo  $\gamma_\mu$  un vettore e  $\gamma_\mu \gamma_5$  uno pseudovettore.

Per qualche tempo si è pensato che, pur in presenza di violazione della parità nelle interazioni deboli, la simmetria combinata di coniugazione di carica e parità (CP) potesse essere una buona simmetria:

$$\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_L) \neq \Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_R) = 0 \quad \text{violazione di P} \quad (43)$$

$$\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_L) \neq \Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_R) = 0 \quad \text{violazione di C} \quad (44)$$

$$\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_L) = \Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_L) \quad \text{invarianza CP} \quad (45)$$

Ma la osservazione di violazione di CP nel sistema dei K nel 1964 (par. 6.1.4) era destinata a rimettere in discussione questa convinzione.

### 6.1.2 Misura sperimentale di $V_{us}$

Il decadimento  $K^0(d\bar{s}) \rightarrow \pi^-(d\bar{u})e^+\nu_e$  (vedi fig. 6.1.2) è un buon esempio di violazione di flavour nel settore elettrodebole del Modello Standard. All’elemento di matrice debole mesonico, che coinvolge le correnti cariche:

$$\langle \pi | J_\mu^{+V} - J_\mu^{+A} | K \rangle \quad J_\mu^{+V} = \bar{Q} \gamma_\mu \tau^+ Q \quad J_\mu^{+A} = \bar{Q} \gamma_\mu \gamma_5 \tau^+ Q \quad Q = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (46)$$

contribuisce solo la parte di corrente vettoriale, conservata, in quanto  $\pi, K$  hanno la stessa parità (P=-1) e la corrente assiale non può connettere stati con parità diversa. L’invarianza di Lorentz assicura la forma dell’ampiezza:

$$\mathcal{A} = G_F V_{us} [g(q^2) P_\mu + f(q^2) q_\mu] \bar{u}_\nu \gamma^\mu P_L u_e \quad P \equiv p_K + p_\pi \quad q \equiv p_K - p_\pi \quad (47)$$

Il termine in  $P = p_K + p_\pi = p_e + p_\nu$  è proporzionale, per via della equazione di Dirac, alla massa dell’elettrone e quindi trascurabile in prima approssimazione data la scala del processo  $m_K \approx 500$  MeV. Inoltre, siccome al processo contribuisce solo la corrente vettoriale, conservata, possiamo desumere che  $f(0) = 1$ . Questo permette di scrivere la previsione teorica per  $\Gamma(K^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e)$ . Dal confronto con l’osservazione sperimentale risulta  $|V_{us}| = 0.2196 \pm 0.0023$ . Attualmente, da questa e da altre misure analoghe la conferma dell’unitarietà di  $V_{CKM}$ , che è un’altra predizione caratteristica del Modello Standard, è a livelli molto buoni:  $|V_{us}|^2 + |V_{ud}|^2 + |V_{ub}|^2 = 0.997 \pm 0.002$ .

### 6.1.3 Altre misure

Sono innumerevoli le verifiche di bassa energia del Modello Standard. Voglio qui citare ad esempio

- la verifica dell’esistenza di correnti neutre, caratteristiche del settore debole e mediate dalle Z, nelle diffusioni  $\nu h \rightarrow \nu h$  e  $\nu e \rightarrow \nu e$  dove  $h$  è un adrone.

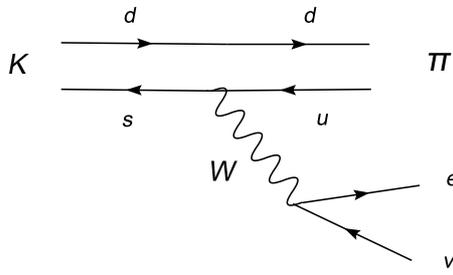


Figura 7: Decadimento  $K^0 \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e$

- La violazione di parità nella fisica atomica, dovuta ad una modifica del potenziale  $e^- - nucleoni$  per via dello scambio di Z
- l'osservazione sperimentale di una violazione di CP (par. 6.1.4) che sembra al momento attuale compatibile con l'esistenza di una unica sorgente di violazione di CP nella matrice CKM. La violazione di CP è stata osservata sia nei sistemi di mesoni  $K(d\bar{s})$  finora descritti sia nei sistemi di mesoni  $B(b\bar{s}, b\bar{d})$ .

#### 6.1.4 Sistema $K_0 - \bar{K}_0$

Il mesone  $K_0$  è composto da un quark down e da un antiquark strange; l'antiparticella corrispondente è il  $\bar{K}_0(s\bar{d})$ . Quindi, pur essendo il  $K_0$  neutro la sua antiparticella non corrisponde a se stesso; in particolare mesone e antimessone differiscono per il numero quantico additivo stranezza:  $S(K_0) = 1, S(\bar{K}_0) = -1$ . Poichè la stranezza è conservata dalle interazioni forti ma violata da quelle deboli, gli autostati di massa non coincidono con gli autostati di stranezza  $K_0, \bar{K}_0$ . Se assumiamo che CP sia un buon numero quantico, con  $CP K_0 = \bar{K}_0, CP \bar{K}_0 = K_0$ , gli autostati di massa saranno gli autostati di CP:

$$K_1 = \frac{K_0 + \bar{K}_0}{\sqrt{2}} \quad CP = 1 \quad ; \quad K_2 = \frac{K_0 - \bar{K}_0}{\sqrt{2}} \quad CP = -1 \quad (48)$$

A questo punto ci si aspetta una vita media molto diversa per i due stati, visto che il  $K_1$  può decadere in  $2\pi$  mentre il  $K_2$  è obbligato a decadere in  $3\pi$ , con uno spazio delle fasi a disposizione molto più piccolo. In effetti uno stato con  $2\pi$  deve avere  $CP=1$  per via della simmetria di Bose: esso ha spin 0 per via dello spin 0 del  $K$ , e deve essere simmetrico per scambio dei due pioni. Sperimentalmente infatti esistono due stati, il  $K_S$  con vita media  $0.9 \cdot 10^{-10}s$  e il  $K_L$  con vita media  $5 \cdot 10^{-8}s$ . La sorpresa però è che il  $K_L$  può decadere in  $2\pi$ , anche se con un branching ratio molto piccolo, dell'ordine di  $10^{-3}$ . E' questo l'ordine di grandezza delle violazioni di CP misurate sperimentalmente. Attualmente le violazioni di CP osservate nel sistema dei K e nell'analogo sistema dei B (con un quark b al posto del quark s) sembrano essere compatibili con una situazione in cui l'unica fonte di violazione di CP deriva da una fase diversa da zero nella matrice CKM, ascrivibile quindi al Modello Standard.

Passiamo ora ad analizzare il sistema  $K_0 - \bar{K}_0$  in maniera più dettagliata. Il  $K_0$  e il  $\bar{K}_0$  fanno parte del nonetto mesonico, costituito a partire dai 3 quarks u,d,s con simmetria SU(3) nella combinazione  $3 \otimes 3^* = 8 + 1$ . Gli stati che formano la base della rappresentazione irriducibile si possono costruire esplicitamente classificandoli con i numeri quantici additivi carica elettrica e stranezza; questo corrisponde al fatto che SU(3) ha 2 generatori diagonali. Classificando gli stati come  $|q, s\rangle$  si ha:

$$|1, -1\rangle = |u\bar{s}\rangle \equiv |K^+\rangle \quad |0, -1\rangle = |d\bar{s}\rangle \equiv |K^0\rangle \quad |1, 0\rangle = |u\bar{d}\rangle \equiv |\pi^+\rangle \quad |-1, 0\rangle = |d\bar{u}\rangle \equiv |\pi^-\rangle \quad (49)$$

$$|0, 1\rangle = |s\bar{d}\rangle \equiv |\bar{K}^0\rangle \quad |-1, 1\rangle = |s\bar{u}\rangle \equiv |\bar{K}^-\rangle \quad |0, 0\rangle = |u\bar{u}\rangle, |d\bar{d}\rangle, |s\bar{s}\rangle \quad (50)$$

Come si vede non viene risolta la degenerazione nel settore totalmente neutro che ha 3 stati. Tuttavia il singoletto è facilmente identificabile,  $\sim |u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle$ ; inoltre il  $\pi^0$  deve formare un tripletto di SU(2) insieme a  $\pi^\pm$  e quindi  $\pi^0 \sim |u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle$ ; per ortogonalizzazione il terzo stato è  $\sim |u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle$ .

In presenza di sole interazioni forti, che conservano la stranezza,  $K_0$  e  $\bar{K}_0$  sono stabili perchè non possono decadere in mesoni più leggeri di uguali stranezza; inoltre, per CPT, sono degeneri. Le interazioni deboli non conservano la stranezza, per cui l'evoluzione di un sistema  $K(t) = a(t)K_0 + b(t)\bar{K}_0$  è descritta dall'hamiltoniana:

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{11} \end{pmatrix} \quad i\dot{K} = HK \quad K_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{K}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (51)$$

dove ho tenuto conto che se H commuta con CPT, con  $CPTK_0 = e^{i\theta}\bar{K}_0$  si ha  $\langle K_0|H|K\rangle = \langle CPTK|H|CPTK\rangle = \langle \bar{K}_0|H|\bar{K}\rangle$  cioè  $H_{11} = H_{22}$ . Notare che H non è in generale Hermitiana perchè la probabilità non si conserva in quanto i  $K$  decadono. Gli autovalori e autovettori di H si trovano facilmente:

$$\lambda_+ = H_{11} + \sqrt{H_{12}H_{21}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{H_{21}}{H_{12}}} \end{pmatrix} \quad \lambda_- = H_{11} - \sqrt{H_{12}H_{21}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{H_{21}}{H_{12}}} \end{pmatrix} \quad (52)$$

H è descritta da 6 parametri per i 3 numeri complessi  $H_{11}, H_{12}, H_{21}^\dagger$  che posso riparametrizzare come i due autovalori  $\lambda_L = M_L - i\frac{\Gamma_L}{2}, \lambda_S = M_S - i\frac{\Gamma_S}{2}$  e il numero complesso  $c \equiv \sqrt{\frac{H_{21}}{H_{12}}}$ . La hamiltoniana è quindi  $H = \lambda_L|K_L\rangle\langle K_L| + \lambda_S|K_S\rangle\langle K_S|$  con  $|K_L\rangle = \frac{|K_0\rangle - c\bar{K}_0}{1+|c|^2}, |K_S\rangle = \frac{|K_0\rangle + c\bar{K}_0}{1+|c|^2}$ . Le interazioni forti conservano la stranezza, e quindi producono uno stato iniziale che è un  $K_0$  oppure un  $\bar{K}_0$ , che non sono autostati di massa. Supponendo di avere un  $K_0$  iniziale, esso evolve come  $|K(t)\rangle = \exp(-iHt)|K_0\rangle$  con  $\exp(-iHt) = e^{-i\lambda_L t}|K_L\rangle\langle K_L| + e^{-i\lambda_S t}|K_S\rangle\langle K_S|$  per cui la probabilità di osservare un  $|K_0\rangle$  all'istante t è data

$$|\langle K_0|e^{-i\lambda_L t}|K_L\rangle\langle K_L| + e^{-i\lambda_S t}|K_S\rangle\langle K_S|K_0\rangle|^2 = \frac{|e^{-i\lambda_L t} + e^{-i\lambda_S t}|^2}{(1+|c|^2)^2} = \frac{[e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + 2e^{-\frac{\Gamma_S+\Gamma_L}{2}t} \cos(\Delta Mt)]}{(1+|c|^2)^2} \quad (53)$$

Analogamente la probabilità di trovare un  $\bar{K}_0$  è

$$|\langle \bar{K}_0|e^{-i\lambda_L t}|K_L\rangle\langle K_L| + e^{-i\lambda_S t}|K_S\rangle\langle K_S|\bar{K}_0\rangle|^2 = \frac{|c|^2|e^{-i\lambda_L t} - e^{-i\lambda_S t}|^2}{(1+|c|^2)^2} = \frac{|c|^2[e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - 2e^{-\frac{\Gamma_S+\Gamma_L}{2}t} \cos(\Delta Mt)]}{(1+|c|^2)^2} \quad (54)$$

Siccome la violazione di CP è piccola,  $|c|$  è molto vicino a 1 (vedi par. 6.1.4) e quindi all'istante t si ha la differenza fra il numero di  $K_0$  e quello di  $\bar{K}_0$  è

$$\frac{N(K_0) - N(\bar{K}_0)}{N(K_0) + N(\bar{K}_0)} \approx \frac{2 \cos(\Delta Mt)}{e^{\frac{\Gamma_L - \Gamma_S}{2}t} + e^{\frac{\Gamma_S - \Gamma_L}{2}t}} \quad (55)$$

Questa differenza è sperimentalmente accessibile, e permette una misura di  $\Delta M$ , contando il numero di  $e^+$  (provenienti dal decadimento del  $K_0$ ) meno il numero di  $e^-$  (provenienti dal decadimento del  $\bar{K}_0$ ). Quindi 4 parametri  $M_L, M_S, \Gamma_L, \Gamma_S$  sono misurabili. Che dire di  $c$ ?

**Violazione indiretta di CP** Per violazione indiretta si intende violazione nel mixing, cioè dovuta ad H, per distinguerla da quella diretta, nei decadimenti, discussa nel prossimo paragrafo. Se CP è conservata con  $CP|K_0\rangle = e^{i\phi}|\bar{K}_0\rangle$  e quindi  $((CP)^2 = 1) CP|\bar{K}_0\rangle = e^{-i\phi}|K_0\rangle$  si ha  $[H, CP] = 0 \Rightarrow \langle K_0|H\bar{K}_0\rangle = \langle CPK_0|HCP\bar{K}_0\rangle = e^{-2i\phi}\langle \bar{K}_0|HK_0\rangle$  cioè  $H_{12}, H_{21}$  hanno lo stesso modulo e differiscono per una fase. E' facile vedere che se CP è conservata,  $c \equiv \sqrt{\frac{H_{21}}{H_{12}}} = e^{i\phi}$ , gli autovettori di H in (52) sono autostati di CP,  $CP|K_L\rangle = -|K_L\rangle$  e  $CP|K_S\rangle = -|K_S\rangle$ . Come si può misurare la (piccola) differenza di  $|c|$  da 1? Un modo è quello di considerare i decadimenti semileptonici. Al primo ordine nelle interazioni deboli, il  $K_0$  può decadere solo in  $e^+\pi^-\nu$  e il  $\bar{K}_0$  in  $e^-\pi^+\bar{\nu}$ . Inoltre, l'invarianza CPT e l'unitarietà impongono che  $|\langle e^+\pi^-\nu|T|K_0\rangle| = |\langle e^-\pi^+\bar{\nu}|T|\bar{K}_0\rangle|$ . Infatti per CPT  $\langle e^+\pi^-\nu|T|K_0\rangle = e^{i\theta_T}\langle \bar{K}_0|T|e^-\pi^+\bar{\nu}\rangle = e^{i\theta_T}\langle e^+\pi^-\nu|T^\dagger|\bar{K}_0\rangle^*$  e per unitarietà  $i(T - T^\dagger) + TT^\dagger = 0$  cioè  $T = T^\dagger$  al primo ordine. Si ricava dunque:

$$\frac{\Gamma(K_L \rightarrow e^+\pi^-\nu) - \Gamma(K_L \rightarrow e^-\pi^+\bar{\nu})}{\Gamma(K_L \rightarrow e^+\pi^-\nu) + \Gamma(K_L \rightarrow e^-\pi^+\bar{\nu})} = \frac{1 - |c|^2}{1 + |c|^2} \quad (56)$$

permettendo una misura dello scostamento di  $|c|$  da 1.

**Violazione diretta di CP** Dalla discussione precedente appare chiaro che occorre l'interferenza di almeno due ampiezze per poter osservare violazione di CP diretta, cioè nei decadimenti. Questo è quello che succede nei decadimenti dei K in  $\pi^+\pi^-$  e  $\pi_0\pi_0$ , che sono autostati di CP con CP=1. I 3 stati possibili con isospin totale  $I = 0, 1, 2$  e  $I_3 = 0$  (sistema neutro) sono facili da costruire: il singoletto è  $\sum_i \pi_i \pi_i^*$  mentre lo stato con I=1 è la combinazione antisimmetrica di  $+$  e  $-$ ,  $|\pi\rangle^A$ . Il terzo stato, con I=2, per ortogonalità è proporzionale a  $\pi^+\pi^- + \pi_0\pi_0 - 2\pi^+\pi_0$ . Per simmetria di Bose il sistema  $+$  - deve stare nello stato simmetrico  $|\pi\rangle^S$ . Indicando  $|I, I_3 = 0\rangle$  con  $|I\rangle$  si ricava:

$$|\pi^+\pi^-\rangle^S = \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|2\rangle \quad |\pi^0\pi^0\rangle^S = \sqrt{\frac{1}{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|2\rangle \quad (57)$$

<sup>‡</sup> in realtà posso ridefinire i campi per una fase  $K_0 \rightarrow e^{i\alpha}K_0, \bar{K}_0 \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{K}_0$  per cui i gradi di libertà sono 5

<sup>§</sup> ho tenuto conto che  $K_L$  è parente dello stato con CP=-1, che non può decadere in due  $\pi$ .

In generale, per quanto visto sopra, essendo  $CPT|I\rangle = e^{i\theta_I}|I\rangle$ ,  $I = 0, 2$ , =CPT+unitarietà impongono  $\langle I|T|\bar{K}_0\rangle = e^{i\phi_I}\langle I|T|K_0\rangle^*$ . Siccome  $\langle \pi\pi|T|K_0\rangle = \sum_I \langle \pi\pi|I\rangle\langle I|T|K_0\rangle$  mentre  $\langle \pi\pi|T|\bar{K}_0\rangle = \sum_I \langle \pi\pi|I\rangle\langle I|T|\bar{K}_0\rangle = \sum_I \langle \pi\pi|I\rangle\langle I|T|K_0\rangle^* e^{-i\phi_I}$ , non si ha necessariamente  $|\langle \pi\pi|T|\bar{K}_0\rangle| = |\langle \pi\pi|T|K_0\rangle|$ . Una parametrizzazione conveniente e universalmente adottata che tiene conto dei constraint di CPT ma ammette una possibile variazione di CP è  $\langle I|T|K_0\rangle = A_I e^{i\delta_I}$ ,  $\langle I|T|\bar{K}_0\rangle = A_I^* e^{i\delta_I}$  dove le fasi  $\delta_I$  sono dovute alle interazioni forti, CP invariati.

Definendo  $\eta_{ij} \equiv \frac{A(K_L \rightarrow \pi_i \pi_j)}{A(K_S \rightarrow \pi_i \pi_j)}$ ,  $\delta_{20} = \delta_2 - \delta_0$  si ottiene quindi

$$\eta_{00} = \frac{A_0(1 - c \frac{A_0^*}{A_0}) - e^{i\delta_{20}} \sqrt{2} A_2 (1 - c \frac{A_2^*}{A_2})}{A_0(1 + c \frac{A_0^*}{A_0}) - e^{i\delta_{20}} \sqrt{2} A_2 (1 + c \frac{A_2^*}{A_2})} \quad \eta_{+-} = \frac{\sqrt{2} A_0 (1 - c \frac{A_0^*}{A_0}) + e^{i\delta_{20}} A_2 (1 - c \frac{A_2^*}{A_2})}{\sqrt{2} A_0 (1 + c \frac{A_0^*}{A_0}) + e^{i\delta_{20}} A_2 (1 + c \frac{A_2^*}{A_2})} \quad (58)$$

Se vale CP, con la convenzione  $CP|K_0\rangle = e^{i\phi}|\bar{K}_0\rangle$  si è visto che  $c = e^{i\phi}$ . Inoltre  $\langle I|T|K_0\rangle = e^{i\phi}\langle I|T|\bar{K}_0\rangle$  cioè  $\frac{A_I^*}{A_I} = e^{-i\phi}$  e gli  $\eta_{ij}$  sono zero. In presenza unicamente di violazione di CP indiretta, cioè nel mixing, si ha  $\frac{A_2^*}{A_2} = \frac{A_0^*}{A_0}$  e quindi:

$$\eta_{+-} = \eta_{00} = \frac{1 - c \frac{A_0^*}{A_0}}{1 + c \frac{A_0^*}{A_0}} \equiv \varepsilon \quad (\text{no direct CP violation}) \quad (59)$$

Notare che  $\varepsilon$  è indipendente da riparametrizzazioni di fase. Quando invece c'è anche violazione di CP nel decadimento, conviene scrivere  $\eta_{ij} = \varepsilon + \varepsilon'_{ij}$ , con  $\varepsilon'_{ij} = 0$  in assenza di violazione diretta:

$$\eta_{+-} = \varepsilon + e^{i\delta_{20}} \sqrt{2} \frac{A_2}{A_0} \frac{c \frac{A_0^*}{A_0} - c \frac{A_2^*}{A_2}}{(1 + c \frac{A_0^*}{A_0})[(1 + c \frac{A_0^*}{A_0}) + e^{i\delta_{20}} \frac{A_2}{A_0} (1 + c \frac{A_2^*}{A_2})]} \approx \varepsilon + e^{i\delta_{20}} \frac{A_2}{\sqrt{2} A_0} (c \frac{A_0^*}{A_0} - c \frac{A_2^*}{A_2}) \equiv \varepsilon + \varepsilon' \quad (60)$$

$$\eta_{00} = \varepsilon - 2\sqrt{2} e^{i\delta_{20}} \frac{A_2}{A_0} \frac{c \frac{A_0^*}{A_0} - c \frac{A_2^*}{A_2}}{(1 + c \frac{A_0^*}{A_0})[(1 + c \frac{A_0^*}{A_0}) - \sqrt{2} e^{i\delta_{20}} \frac{A_2}{A_0} (1 + c \frac{A_2^*}{A_2})]} \approx \varepsilon - 2\varepsilon' \quad (61)$$

L'espressione approssimata vale per due motivi. Primo, la violazione di CP è molto piccola (dell'ordine di  $\varepsilon \approx 10^{-3}$ ), per cui i numeri  $c \frac{A_0^*}{A_0}$ ,  $c \frac{A_2^*}{A_2}$  sono molto vicini a 1. Secondo, sperimentalmente  $|\frac{A_2}{A_0}| \approx \frac{1}{22}$  (regola " $\Delta I = \frac{1}{2}$ "). Quindi le espressioni sono valide con ottima approssimazione, cioè a meno di termini di ordine relativo  $(\frac{1}{22})^2$  circa.

$$\frac{BR(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-)/BR(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{BR(K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-)/BR(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-)} = |\frac{\eta_{+-}}{\eta_{00}}|^2 \approx 1 + 6\text{Re} \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \quad (62)$$

## 6.2 Verifiche di alta energia

### 6.2.1 La massa dello Z e il numero di famiglie di neutrini

La massa del bosone neutro Z mediatore delle interazioni deboli è stata misurata con molta precisione [6]:  $M_Z = 91.1875 \pm 0.0021$  GeV. La misura è stata effettuata al Large Electron Positron collider (LEP), attivo al Centro Europeo di Ricerche Nucleari (CERN) di Ginevra dal 1989 al 2000. Si tratta di un acceleratore circolare, con circonferenza di 27 km, in cui collidono fasci di elettroni e di positroni ad una energia nel centro di massa  $\sqrt{s}$  pari all'energia di risonanza dello Z di circa 91 GeV. Per capire come si possano misurare i parametri che caratterizzano lo Z, è utile un paragone con l'esempio ben noto in meccanica quantistica dell'assorbimento di un fotone, che avviene quando un fotone ha l'energia corrispondente al passaggio di un elettrone dallo stato fondamentale allo stato eccitato. L'atomo eccitato poi decade, emettendo di nuovo un fotone:  $A + \gamma \rightarrow A^* \rightarrow A + \gamma$ . Se si misura la corrispondente sezione d'urto, essa presenta un *picco di risonanza*, la cui larghezza  $\Gamma$  è legata alla vita media  $\tau$  dello stato eccitato  $A^*$  dal principio di indeterminazione di Heisenberg:  $\Gamma = 1/\tau$ . Nel caso dello Z, la situazione è del tutto analoga: la sezione d'urto totale  $e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow X$  dove  $X$  è uno stato finale qualsiasi presenta un picco di risonanza (Fig. 3); dalla posizione del picco si ottiene la massa  $M_Z$  e dalla sua larghezza si misura  $\Gamma_Z = 2.4952 \pm 0.0023$  GeV. La sezione d'urto plottata in Fig. 3 è relativa a stati finali adronici: lo Z decade in quarks che a loro volta adronizzano, cioè si convertono in adroni  $\pi, B, \dots$ . Lo Z può anche decadere in leptoni, come elettroni e neutrini. Questi ultimi però interagiscono in maniera così debole (sono neutri, non hanno interazioni forti ma solo deboli) che non lasciano alcuna traccia nei rivelatori. La larghezza di decadimento in neutrini non si può quindi misurare direttamente, ma si può ricavare dalla relazione  $\Gamma_Z = \Gamma_{had} + \Gamma_{ee} + \Gamma_{\mu\mu} + \Gamma_{\tau\tau} + \Gamma_{inv}$ , dove  $\Gamma_{inv}$  è la larghezza invisibile, cioè relativa ai neutrini. Infatti, oltre alla già citata larghezza totale  $\Gamma_Z$  sono misurabili sperimentalmente le larghezze parziali  $\Gamma_{had}, \Gamma_{ee}$  ecc. in quanto le relative sezioni d'urto sono ad esse proporzionali:  $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) \propto \Gamma_{\mu\mu}$  eccetera. Conoscendo gli accoppiamenti del Modello Standard, si può infine confrontare la larghezza misurata (indirettamente)  $\Gamma_{inv}^{exp}$  con quella teorica  $\Gamma_{inv}^{SM}$  e determinare così il numero di famiglie di neutrini [5]  $N_\nu = 2.984 \pm 0.008$ , compatibile con 3.

### 6.2.2 Verifiche di Precisione a LEP

Le predizioni del Modello Standard analizzate finora corrispondono alla teoria *classica*, cioè sono ricavate dalla Lagrangiana senza tener conto delle correzioni *quantistiche*. Tali correzioni sono dell'ordine del parametro di espansione perturbativa,  $\frac{\alpha}{4\pi} \approx 10^{-3}$ . Ad esempio il parametro  $\rho$ , che abbiamo visto essere pari ad 1 nella Lagrangiana classica (27), riceve correzioni quantistiche:

$$\rho = 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \frac{3m_t^2}{4M_W^2 \sin^2 \theta_W} + \dots \quad (63)$$

Dove i puntini stanno per correzioni di ordine superiore in  $\frac{\alpha}{4\pi}$ . Le verifiche di precisione a LEP hanno consentito di verificare le predizioni del Modello Standard delle interazioni deboli al livello del *permille* all'energia di 100 GeV, che è la scala caratteristica della teoria (scala di rottura di simmetria, masse dei bosoni di gauge). Tale scala corrisponde, in base al principio di indeterminazione di Heisenberg, a distanze dell'ordine di  $\frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{10^5 \text{ MeV}} \approx 10^{-3} \text{ fm}$  ( $1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ ), quindi migliaia di volte più piccole del raggio nucleare. I risultati sono sintetizzati nella figura 12, nella quale sono mostrate diverse osservabili misurate a LEP e la misura dello scostamento fra teoria ed esperimento. Come si vede, l'accordo è molto buono.

## 7 Cosa sappiamo del bosone di Higgs

Il settore responsabile della rottura (spontanea) della simmetria di gauge, che nel Modello Standard è il settore di Higgs, è quello meno verificato sperimentalmente. In particolare, il bosone di Higgs non è mai stato prodotto in un esperimento di laboratorio. Sappiamo però, dopo LEP, che se esiste l'Higgs è più pesante di 114.4 GeV [6]. Oltre a questa informazione *diretta*, cioè proveniente direttamente dall'esperimento, abbiamo anche delle informazioni *indirette*, legate alle correzioni radiative nel Modello Standard. Queste ultime dipendono dal fatto che le osservabili misurate a LEP dipendono dalla massa dell'Higgs tramite le correzioni radiative, nelle quali l'Higgs compare come particella virtuale. La fig. 8 riassume entrambe i tipi di informazione: il limite diretto è dato dalla zona gialla che esclude masse dell'Higgs più leggere di 114.4 GeV. Il limite indiretto si ricava dalla analisi del fit dei dati di LEP al variare della massa dell'Higgs (banda blu). Il “best fit”, cioè il valore più basso del  $\chi^2$ , si ottiene per  $M_H = 126 \text{ GeV}$ , in perfetto accordo con il dato sperimentale. Se si consente un  $\Delta\chi^2 = 1$  si ottiene  $M_H = 126_{-48}^{+73} \text{ GeV}$ .

Un altro tipo di informazione, anch'essa indiretta, si ottiene analizzando il potenziale  $V(\phi)$  del settore di Higgs, attraverso il quale si ottengono un limite inferiore e uno superiore per la massa dell'Higgs. Il limite inferiore deriva dal fatto che la curvatura del potenziale nel punto di minimo, cioè la derivata seconda  $V''(\phi)$  calcolata per  $\phi = v$ , è proporzionale alla massa dell'Higgs. Se la massa dell'Higgs è molto piccola il potenziale è “piatto” e le correzioni quantistiche possono destabilizzare il potenziale, producendo ad esempio un secondo minimo più profondo del primo. Il limite inferiore sulla massa dell'Higgs che ne deriva è detto “vacuum stability bound”. Se invece l'Higgs è molto pesante, allora l'accoppiamento  $\lambda = \frac{M_H^2}{v^2}$  diventa grande al punto da mettere in questione la validità dell'approccio perturbativo e la coerenza stessa della teoria. In effetti, dato il valore di  $\lambda$  alla scala elettrodebole, l'evoluzione ad un loop di tale “costante” di accoppiamento presenta una singolarità (polo di Landau) a valori elevati dell'energia, cosicché non è possibile, a tale energia, dare un senso al modello stesso. La fig. 9 presenta insieme i due limiti citati. In particolare, si ritiene che il Modello Standard sia il limite di bassa energia di una teoria più completa; allora, se si ritiene che il Modello Standard sia valido fino alla scala  $\Lambda$ , il valore della massa dell'Higgs deve essere compreso fra le curve inferiore e superiore della fig. 9 (le bande corrispondono a incertezze nei calcoli teorici). Come si vede, esiste una piccola finestra per la massa dell'Higgs,  $130 \text{ GeV} < M_H < 180 \text{ GeV}$  all'interno della quale il Modello Standard rimane stabile e perturbativo fino a energie altissime, dell'ordine della scala di Planck  $M_{Pl} = 10^{19} \text{ GeV}$ .

## Parte II

# Nuova Fisica: al di là del Modello Standard

Un diverso tipo di considerazioni nasce dalla richiesta di coerenza interna del Modello Standard. Le verifiche di precisione del settore elettrodebole del Modello Standard costituiscono, insieme alla verifica del numero di famiglie di neutrini, uno dei risultati più importanti di LEP. Si tratta di misure effettuate al livello di accuratezza del permille, in grado di verificare la struttura quantistica della teoria caratterizzata, come si è già detto, dal parametro  $\frac{\alpha}{4\pi} \sim 10^{-3}$ .

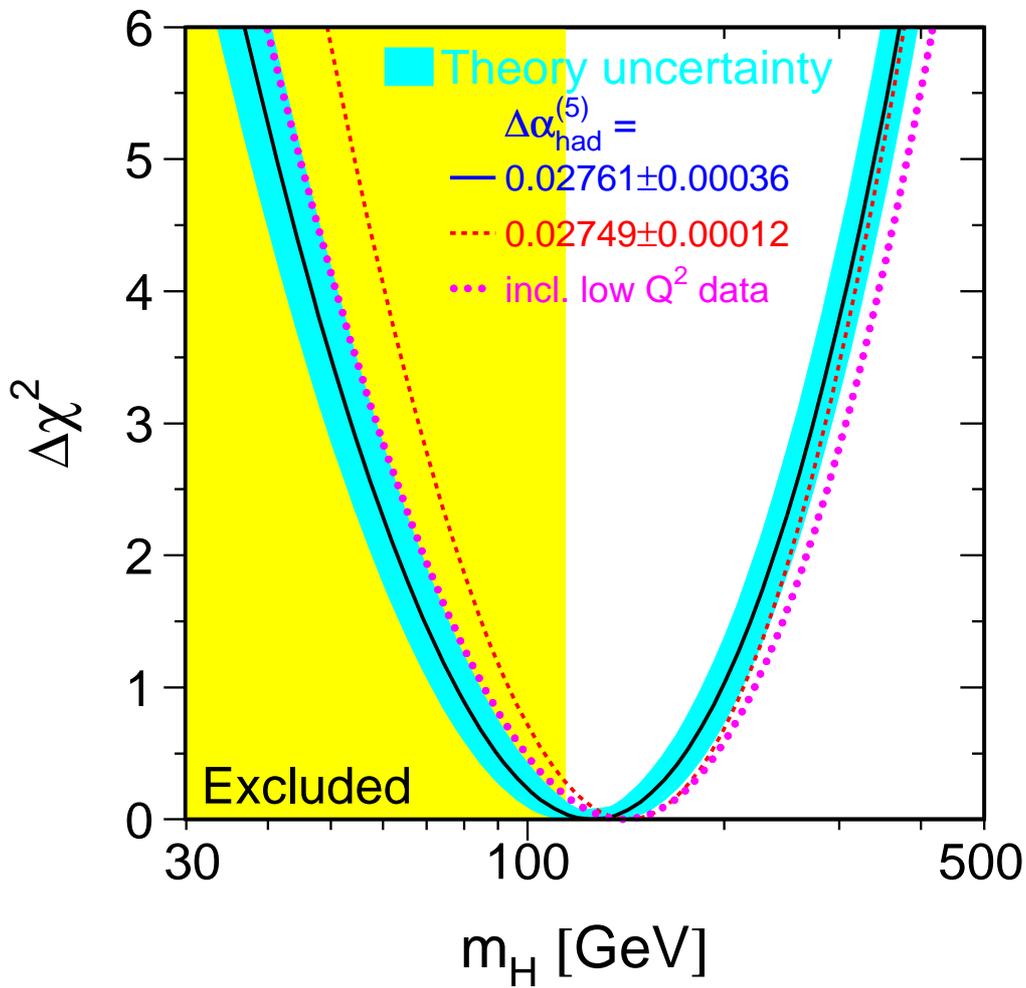


Figura 8: Limiti diretti e indiretti sulla massa dell'Higgs.

Come si vede dalla fig 12, l'accordo fra teoria ed esperimento è praticamente perfetto. Ci si potrebbe chiedere allora perchè si parli tanto di “Nuova Fisica”, cioè di fisica diversa o comunque aldilà del Modello Standard: supersimmetria, teorie di stringa, dimensioni spaziotemporali aggiuntive eccetera. Il fatto è che anche se non ci sono evidenze sperimentali che indichino un reale problema nel confronto tra teoria ed esperimento (oscillazioni di neutrini a parte), ci sono vari motivi per i quali c'è un disagio nei confronti del Modello Standard così com'è, con la risultante convinzione che siamo in presenza di un modello efficace che descrive una data classe di fenomeni, ma che necessita di essere modificato/esteso per giungere ad una teoria più fondamentale. La posizione del Modello Standard nei confronti di questa teoria sarebbe quindi simile a quella del modello di Fermi nei confronti del Modello Standard, oppure della meccanica classica nei confronti della teoria di campo relativistica. Passo ora ad analizzare, secondo la mia personale gerarchia dalle indicazioni più importanti a quelle meno serie, le indicazioni che nuova fisica debba essere presente a scale del TeV o simili.

Fra le varie case del “mal di stomaco” che prende i fisici nel ritenere che il Modello Standard sia La teoria fondamentale, ne elenco qui alcuni, secondo quella che ritengo essere la gerarchia dall'indicazione più importante a quella meno seria:

- Le oscillazioni di neutrini (par. 8.1)
- la quantizzazione della carica (par. 8.2)
- Il problema della gerarchia (par. 8.3)
- la proliferazione del numero di parametri indipendenti della teoria:  $4(V_{CKM})+3(\text{couplings})+2(\text{Higgs sector})+9(\text{masse fermioni})=18$  parametri che diventano 25 se si introduce un  $\nu_R$  per descrivere le oscillazioni di neutrini

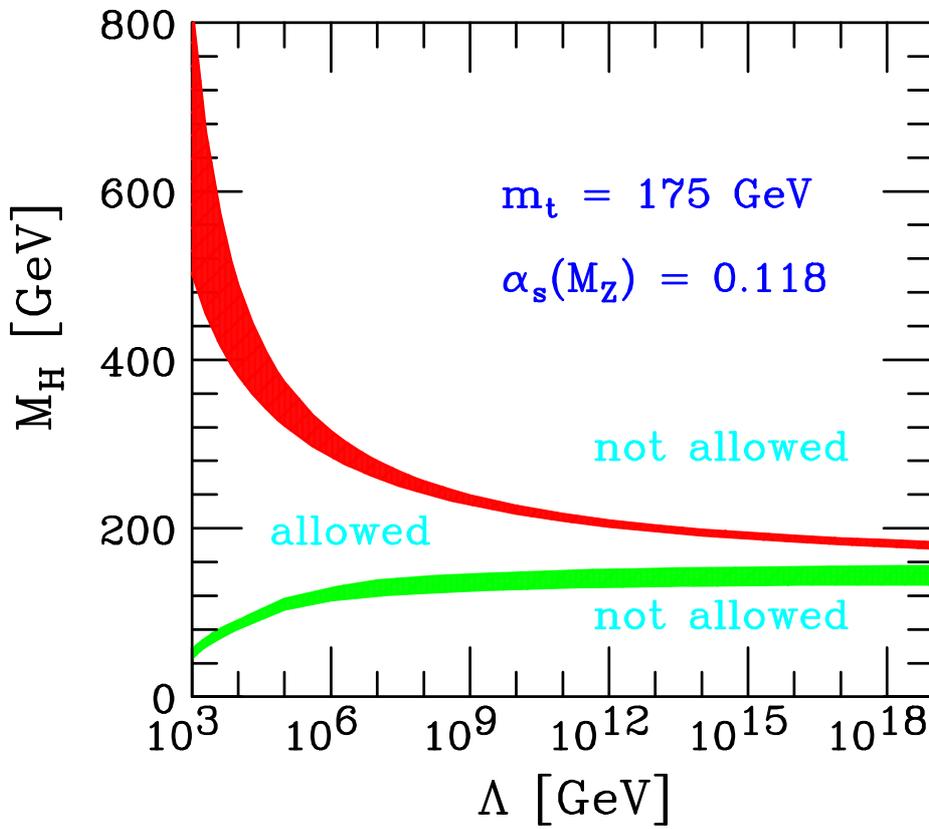


Figura 9: Limiti di stabilità (curva superiore) e di “trivialità” (curva inferiore) sulla massa dell’Higgs (da [13]). La regione permessa, in funzione della scala  $\Lambda$  fino alla quale si crede che il Modello Standard sia valido, è quella fra le due bande colorate, che riflettono varie incertezze teoriche.

## 8 Gli “acciacchi” del Modello Standard

### 8.1 Oscillazioni di neutrini

E’ un fatto sperimentale [7] che i neutrini oscillano nel flavor, cioè migrano da una famiglia all’altra. Ad esempio un neutrino  $\nu_e$  della prima famiglia può trasformarsi in un neutrino  $\nu_\mu$  della seconda famiglia e viceversa. Fino ad oggi gli esperimenti in tal senso hanno riguardato principalmente neutrini di origine solare [9] e neutrini che si originano nell’atmosfera [8]; ci si aspettano nuove indicazioni anche da esperimenti con neutrini generati da un acceleratore [11]. Ad ogni modo, la oscillazione di neutrini non può essere descritta all’interno del Modello Standard minimale finora descritto: come già notato, nessun processo che cambi il flavor nel settore leptonic è consentito. Tuttavia, è possibile fare piccole modifiche al modello in maniera da consentire la descrizione di violazioni di flavor. Ad esempio si può dare una massa di Dirac al neutrino in maniera analoga a quanto visto per i quarks introducendo un  $\nu_R$ . La corrispondente matrice di massa, non diagonale in generale nello spazio del flavor leptonic, può indurre le oscillazioni osservate. Rimane comunque il fatto che le oscillazioni di neutrini costituiscono ad oggi l’unica indicazione sperimentale della necessità di modificare il Modello Standard minimale fin qui descritto. Per concludere, vorrei accennare al fatto che per il neutrino esiste anche la possibilità di una massa di tipo diverso, detta di Majorana [12].

### 8.2 La quantizzazione della carica

La carica elettrica dell’elettrone  $q_e$  e quella del protone  $q_p$ , somma delle cariche dei quark costituenti, sono due parametri liberi e arbitrari del Modello Standard. Malgrado questo, queste due cariche sono sperimentalmente uguali (in modulo) ad un livello di precisione fantastico [5]:  $\left| \frac{q_p + q_e}{q_e} \right| < 10^{-21}$ !

Esiste una differenza sostanziali fra le assegnazioni di ipercarica  $Y$  e quelle di isospin debole  $T_3$  dei fermioni (vedi tabella 1): Il generatore  $T_3$  è infatti uno dei generatori del gruppo  $SU(2)$  non abeliano, mentre  $Y$  è il generatore del gruppo abeliano  $U(1)$ . Di conseguenza, i numeri quantici di isospin  $\pm \frac{1}{2}$  sono fissati dall’algebra del gruppo, in analogia a quanto succede per l’usuale spin. In effetti non è possibile rinormalizzare i generatori di un gruppo non abeliano

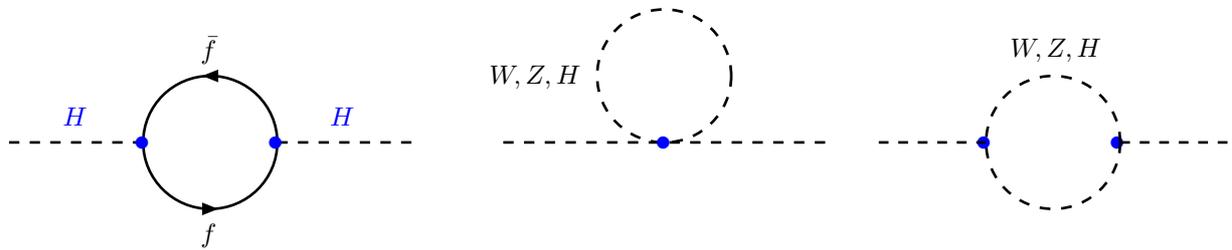


Figura 10: Diagrammi di Feynman per la correzione ad un loop alla massa dell'Higgs di Modello Standard.

senza cambiare le costanti di struttura: se  $T_a \rightarrow kT_a$  allora  $f^{abc} \rightarrow kf^{abc}$  in  $[T_a, T_b] = if^{abc}T_c$ . Quindi, non c'è nulla di strano nel fatto che, ad esempio, il valore di  $T_3$  sia  $\frac{1}{2}$  per il neutrino e  $-\frac{1}{2}$  per l'elettrone. Le assegnazioni di ipercarica  $Y$  sono, invece, totalmente arbitrarie, e per questo motivo risultano alquanto singolari: cospirano a rendere identiche le cariche di elettrone e protone.

### 8.3 Il problema della gerarchia

Il problema della gerarchia nasce se si crede, com'è opinione comune fra i fisici teorici, che il Modello Standard sia una teoria effettiva, cioè il limite di bassa energia di una teoria più completa, così come il modello di Fermi è il limite di bassa energia del Modello Standard stesso. Questa convinzione nasce, come si è visto, da tutta una serie di considerazioni come la quantizzazione della carica, la proliferazione di parametri "ad hoc", ecc. Sorge allora la domanda: qual'è la scala di energia  $\Lambda$  fino alla quale si può ritenere valido il Modello Standard e al di là della quale interviene fisica di tipo nuovo?

Una possibilità è che il Modello Standard si inserisca in un contesto di grande unificazione (vedi cap. 9), e che sia valido fino all'energia alla quale le costanti di accoppiamento si unificano,  $\Lambda_{GUT} \approx 10^{16}$  GeV. Questo scenario si potrebbe descrivere come "il grande deserto": nessun nuovo fenomeno appare dalla scala finora esplorata, 100 GeV, fino alla scala di unificazione, distante ben 14 ordini di grandezza. Tuttavia nasce subito un problema di ordine "estetico", se vogliamo: la teoria unificata dovrebbe contenere due parametri enormemente diversi quali la scala di rottura elettrodebole e la scala di grande unificazione; questo è lo "hierarchy problem". Anche se si volesse liquidare questo problema come irrilevante, o forse dovuto al nostro particolare modo di pensare, ne rimane un'altro più difficile da trattare: l'instabilità della massa dell'Higgs rispetto alle correzioni radiative.

Tagliando i momenti degli integrali a un loop a una scala  $\Lambda$ , e tenendo solo i contributi dominanti a tale scala, dai diagrammi di fig. 10 si ottiene infatti:

$$M_H^2 = (M_H^0)^2 + \frac{3\Lambda^2}{8\pi^2 v^2} [M_H^2 + 2M_W^2 + M_Z^2 - 4m_t^2] \quad (64)$$

In questa espressione  $M_H^0$  è la massa "nuda", cioè priva di correzioni quantistiche, che compare nella Lagrangiana prima della rinormalizzazione. Il problema nasce se vogliamo dare un significato fisico a questa massa e alla scala  $\Lambda$ , come parametri che intervengono nella teoria completa di alta energia. In tal caso la presenza di divergenze quadratiche, cioè di termini in  $\Lambda^2$ , diventa problematica. Se ad esempio il cutoff  $\Lambda$  è dell'ordine di  $10^{16}$

significa che è necessario aggiustare in maniera molto precisa i parametri che compaiono nella (64) se vogliamo che  $M_H^0$  cancelli quasi esattamente l'enorme valore di  $\Lambda^2 = (10^{16} \text{ GeV})^2$  a dare una massa dell'Higgs  $M_H$  molto piccola, dell'ordine di 100 GeV.

## 9 Grande Unificazione

Una possibile soluzione al problema della quantizzazione della carica elettrica è costituita dalle teorie di Grande Unificazione. L'idea di base è che le forze elettrodeboli e forte sono in realtà espressione di un'unica forza. Il motivo per cui non ce ne accorgiamo è lo stesso per cui a scale molto minori di 100 GeV non ci accorgiamo che elettromagnetismo e forze deboli sono la stessa forza: le forze si unificano ad energie molto maggiori di quelle attualmente accessibili. Ad alta energia esistono un unico gruppo  $G$ , del quale il gruppo  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$  è un sottogruppo, ed un'unica costante di accoppiamento. Lo schema di rottura di simmetria è quindi  $G \xrightarrow{M_G} SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \xrightarrow{M_W} SU(3) \otimes U(1)_{em}$ . In che modo questo ha a che fare con la quantizzazione della carica? Il punto è che parallelamente all'unificazione

	$T_3$	$Y$	$Q$	$B$	$L$
$\nu_e$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	-1
$e$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	-1
$u$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$d$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0

Tabella 1: Numeri quantici dei fermioni della prima famiglia;  $Q = T_3 + Y$ . Le antiparticelle hanno numeri quantici opposti e i numeri quantici della seconda e terza famiglia sono identici a quelli della prima

delle forze, anche i campi di materia si unificano, nel senso che le particelle che stanno in rappresentazioni irriducibili diverse del gruppo del Modello Standard entrano a far parte di un'unica rappresentazione irriducibile del gruppo di grande unificazione. Ad esempio nel caso dei modelli in cui  $G = SU(5)$ , i 3 fermioni  $d_R$  (ricordiamo che esistono in 3 colori), il positrone e il neutrino si sistemano nella rappresentazione fondamentale di  $SU(5)$ :

$$\mathbf{5} : \begin{pmatrix} d_r \\ d_g \\ d_b \\ e^+ \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix}_R \quad Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & & & & \\ & -\frac{1}{3} & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (65)$$

A questo punto, siccome tutti i generatori di  $SU(5)$  devono avere traccia nulla, e siccome  $Q$  è stato promosso a rango di generatore di  $SU(5)$ , il gioco è fatto. Infatti, visto che il neutrino è privo di carica, una volta assegnata (arbitrariamente) carica +1 all'elettrone, i tre quarks down che sono identici per quanto riguarda le proprietà elettromagnetiche devono necessariamente avere carica  $-\frac{1}{3}$ .

Sorge a questo punto un problema: ho detto che le teorie di grande unificazione sono caratterizzate da un'unica costante di accoppiamento  $g_G$ . Come si concilia questo col fatto che le interazioni forti, elettrodeboli sono caratterizzate invece da tre costanti  $g, g', g_s$  relativa ad ognuno dei tre sottogruppi? La risposta è che le costanti di accoppiamento non sono veramente "costanti", ma dipendono dalla scala di energia a cui le si misura. Rimandando a [12] per una discussione di questo argomento e dell'argomento ad esso collegato della rinormalizzazione della teoria,

## 10 Supersimmetria

## 11 Segnali di Nuova Fisica

I possibili segnali sperimentali di nuova fisica si dividono a grandi linee in due categorie. Il primo tipo di segnale è di tipo diretto: in un acceleratore viene prodotta una particella elementare di tipo sconosciuto; questo evento può essere evidenziato ad esempio attraverso i prodotti di decadimento visibili, un pò come abbiamo visto per lo  $Z$

Un segnale chiaro di nuova fisica sarebbe la rivelazione del decadimento del protone. Infatti, mentre un neutrone libero può decadere 1

Un altro possibile segnale di nuova fisica è di tipo indiretto: riguarda infatti processi che coinvolgono particelle note, e le cui probabilità sono diverse da quelle predette dal Modello Standard in caso di fisica di tipo nuovo. Tipicamente, una particella di nuovo tipo con una massa superiore alle energie ad oggi accessibili, lascia la sua impronta sulle osservabili di energia più bassa tramite le correzioni in cui appare come particella virtuale, cioè come stato intermedio e non come stato fisico iniziale o finale. Un esempio è il processo  $\mu \rightarrow e\gamma$ , che è strettamente proibito nel Modello Standard minimale fin qui analizzato in quanto viola il flavor leptonic. In molte estensioni del Modello Standard questo processo è però consentito. Sperimentalmente, questo processo non è stato finora osservato ( $B.R. < 1.2 \cdot 10^{-15}$ ). Nella figura 11 appaiono i diagrammi di Feynman relativi a tale processo in una teoria supersimmetrica; il fotone si può attaccare a una qualunque delle gambe cariche. In questa figura appaiono i partner supersimmetrici dei bosoni di gauge, neutralini  $\chi_0$  e chargini  $\chi_{\pm}$ , e i partner supersimmetrici degli ordinari leptoni  $\tilde{l}$ . Poichè tali particelle non sono mai state osservate sperimentalmente, esse devono avere masse superiori alle energie finora esplorate di circa 200 GeV. D'altra parte siccome esse appaiono come particelle virtuali, la presenza dei propagatori riduce gli effetti di un fattore pari circa a  $E^2/\Lambda^2$

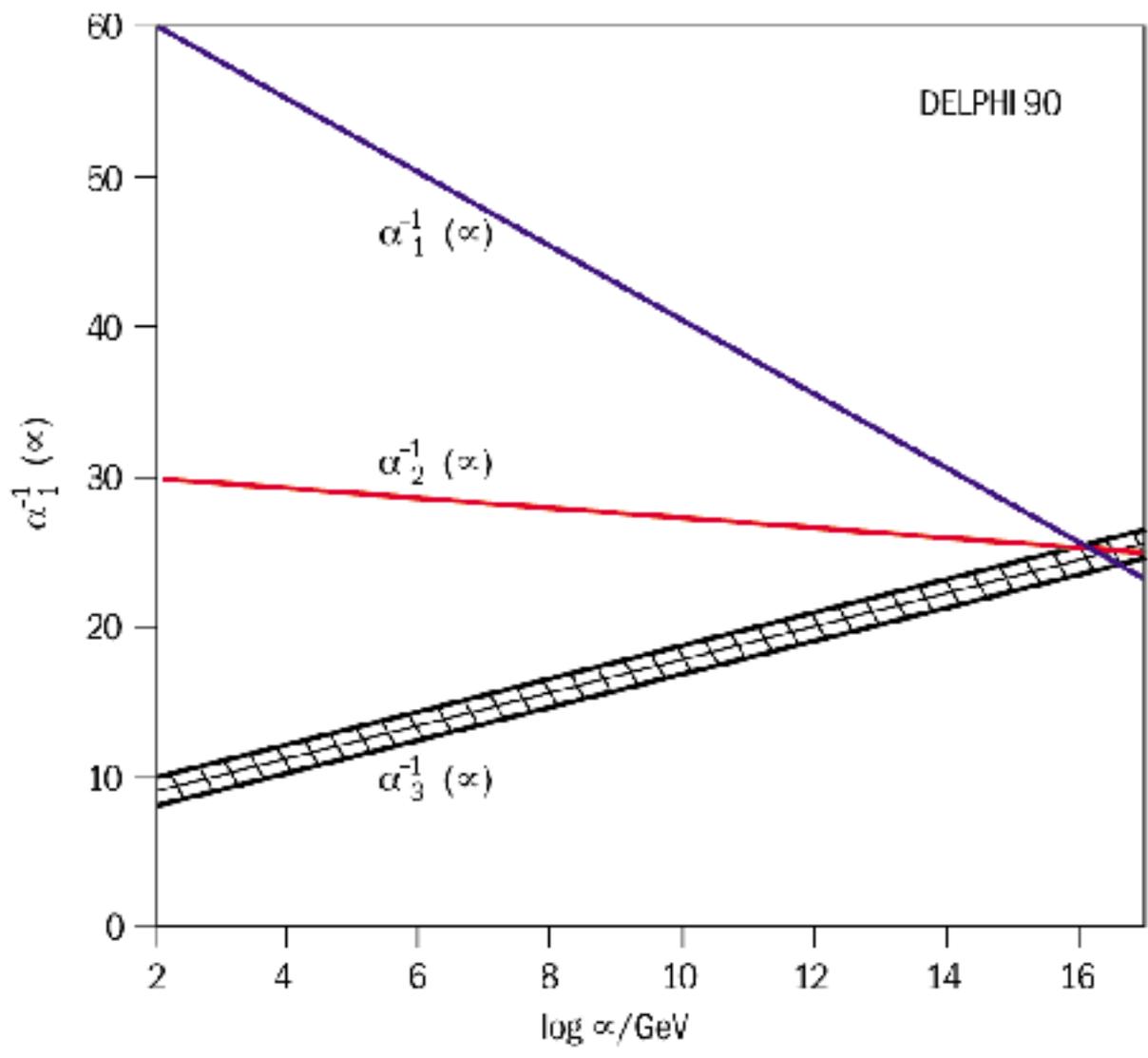


Figura 11: Dipendenza dall'energia delle costanti di accoppiamento nel Modello Standard

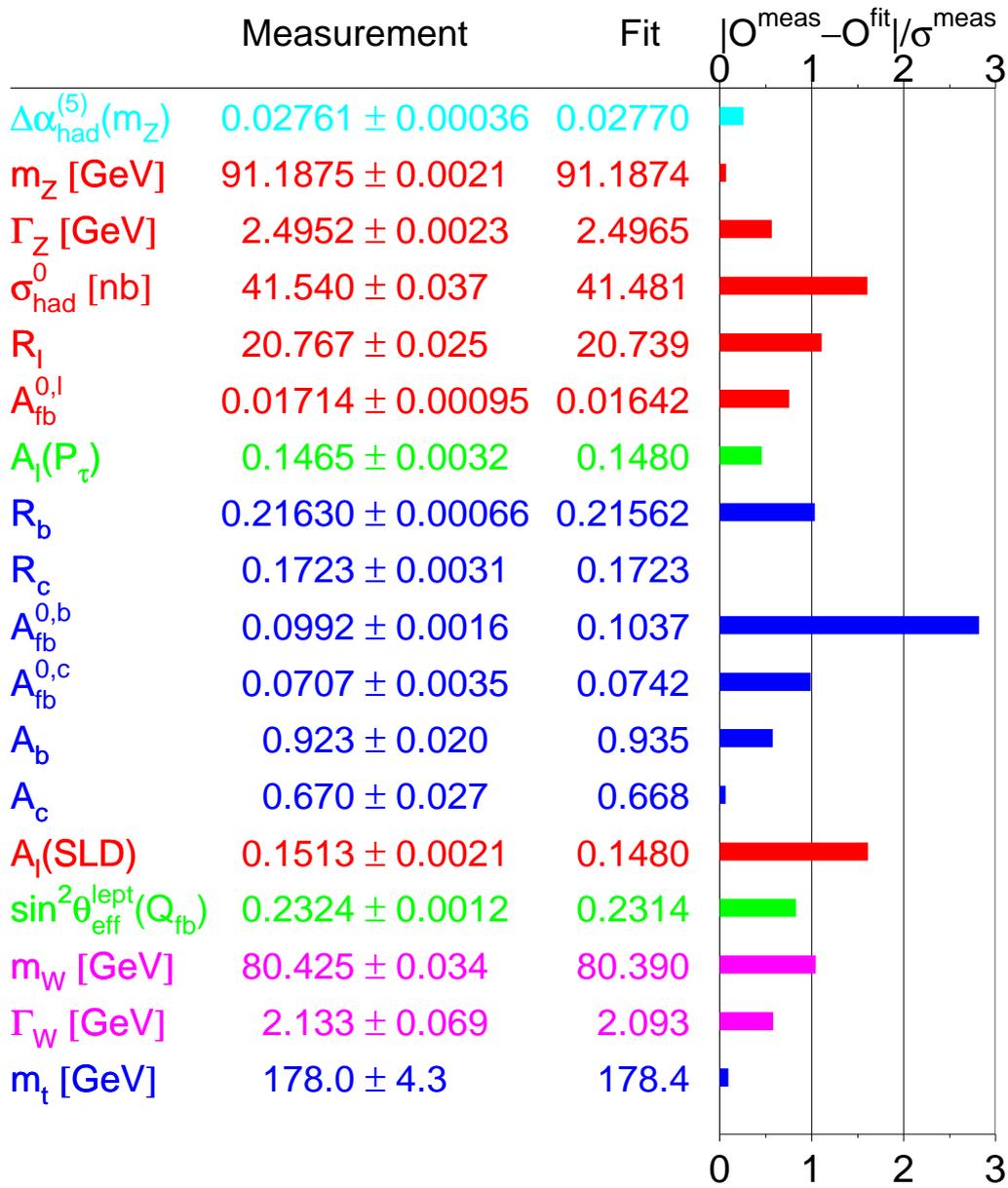


Figura 12: Misure di precisione del Modello Standard. Il pull è quanto la teoria si discosta dall'esperimento in unità di  $\sigma$  (deviazione standard)

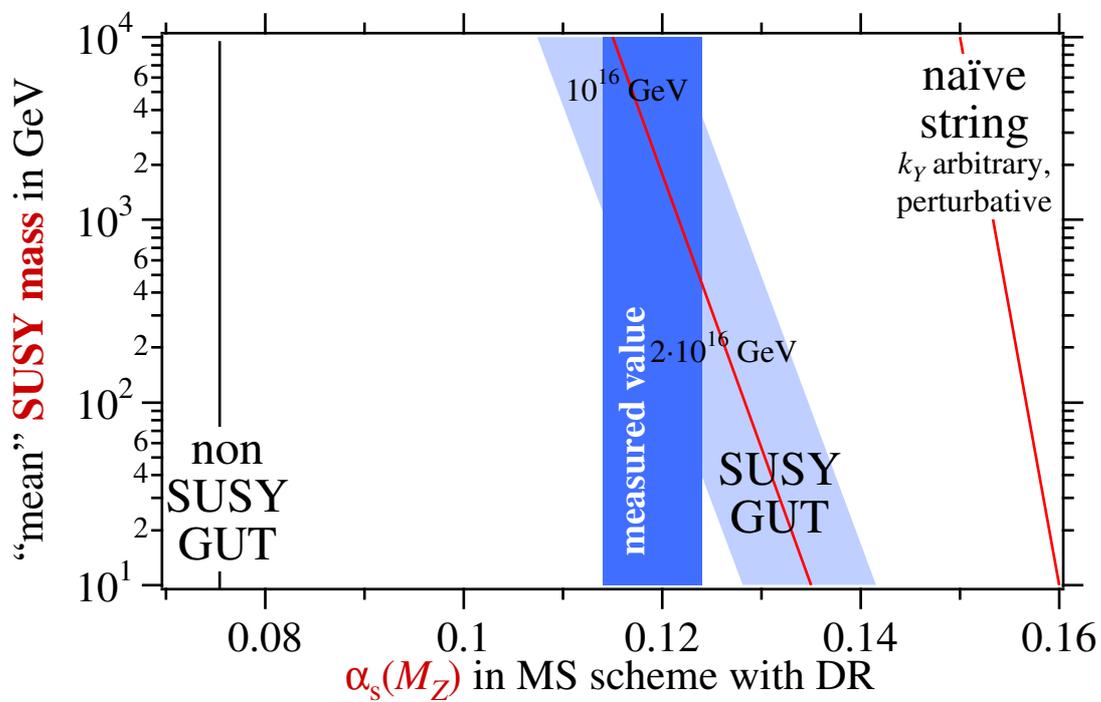


Figura 13: Predizione per  $\alpha_s$  in una estensione del Modello Standard unificata e supersimmetrica (SUSY GUT)

## 12 .... e la gravità?

La gravità è rimasta finora fuori dalla descrizione delle forze fondamentali, e questo per due motivi. Il primo motivo è che, per quanto riguarda gli esperimenti che interessano la fisica delle particelle, la forza di gravità è quantitativamente trascurabile rispetto alle altre tre interazioni. Ad esempio per un elettrone il rapporto fra forze di tipo elettromagnetico e gravitazionale è  $\frac{e^2}{G_N m_e^2} \approx 10^{43}$ . Un secondo motivo di tipo fondamentale è che non esiste al momento una teoria che descriva correttamente la quantizzazione della interazione gravitazionale e che sia sperimentalmente verificabile. Il tentativo di formulare una teoria quantistica della gravità nell'ambito della teoria dei campi si scontra con difficoltà simili a quelle incontrate dal modello di Fermi: le ampiezze adimensionali crescono con l'energia come  $G_N E^2$  dove  $G_N$  è la costante di Newton. Analogamente al caso del modello di Fermi, le energie alle quali le ampiezze ad albero saturano l'unitarietà e gli effetti quantistici diventano importanti sono dell'ordine di  $1/\sqrt{G_N} \equiv M_P \approx 1.2 \cdot 10^{19}$  GeV. La massa di Planck  $M_P$  corrisponde a distanze dell'ordine di  $10^{-35}$  m. che sono enormemente più piccole non solo della scala atomica di  $10^{-10}$  m. ma anche delle distanze più piccole finora esplorate, che sono dell'ordine di  $10^{-18}$  m. Il problema però è che, diversamente dal modello di Fermi, non è possibile modificare la teoria della gravità ad energie maggiori di  $M_P$  in modo da renderla rinormalizzabile.

Il valore estremamente piccolo della forza di gravità rispetto alle altre forze è al tempo stesso una buona notizia e una cattiva notizia. È una buona notizia perché il fatto che gli effetti quantistici siano significativi a scale enormemente piccole significa che per la stragrande maggioranza dei fenomeni la descrizione della gravità classica tramite la teoria della relatività generale di Einstein funziona perfettamente. È una cattiva notizia perché proprio gli effetti di gravità quantistica sarebbero i più interessanti da verificare sperimentalmente, ma sono appunto molto lontani dagli attuali limiti tecnologici. I 17 ordini di grandezza che ci separano dalla scala di Planck rendono un programma per la gravità analogo al programma di LEP per le interazioni elettrodeboli impossibile al momento e difficile da immaginare anche per il futuro. D'altro lato, come abbiamo visto, esiste il problema fondamentale che relatività generale e meccanica quantistica non si possono riconciliare nell'ambito della teoria di campo.

Per dare una descrizione unificata delle 4 forze è stato necessario ricorrere a un linguaggio nuovo e fondamentalmente diverso da quello della teoria dei campi: quello della teoria di stringa. Quest'ultima è descritta in termini di oggetti monodimensionali fondamentali, le stringhe appunto, con dimensione tipica pari alla lunghezza di Planck<sup>¶</sup>. Dal punto di vista intuitivo, possiamo pensare che la dimensione dell'oggetto unidimensionale stringa definisca una sorta di

<sup>¶</sup>per confronto, nella descrizione che la teoria dei campi fa di una particella elementare come un elettrone ad esempio, non appare nessuna scala fondamentale intrinseca: il campo è una funzione matematica definita in ogni punto dello spazio e la distanza fra due punti può essere arbitrariamente piccola

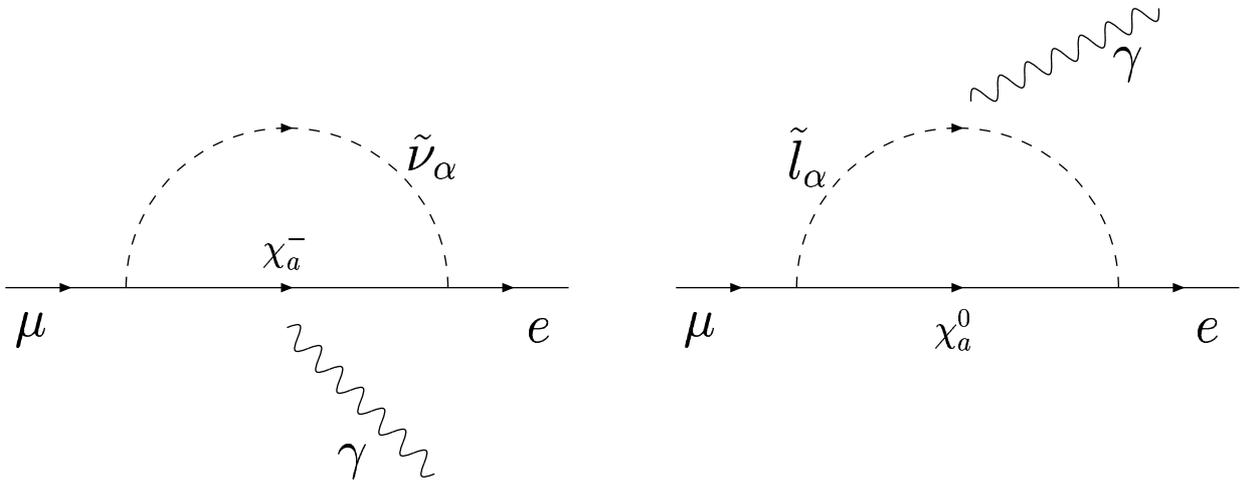


Figura 14: Diagrammi di Feynman SUSY a 1 loop per  $\mu \rightarrow e\gamma$ . A sinistra il contributo di scambio di chargino, a destra quello di neutralino.

“distanza minima” oltre la quale non si può andare. E’ importante notare che, dato il valore astronomicamente piccolo della costante di Planck, questa specie di “granulosità” dello spazio-tempo è del tutto inavvertibile non solo alla scala di distanze ordinarie (1 m), ma anche alla scala atomica ( $10^{-10}$  m) e alle più piccole distanze fino ad oggi osservate ( $10^{-18}$  m).

L’ambizioso tentativo di unificazione della teoria di stringa si è fino ad oggi scontrato con varie difficoltà che sono a mio modo di vedere riconducibili a due grossi filoni.

Da un lato, si è infatti capito che la teoria non viene univocamente determinata dalla semplice richiesta di descrivere le forze fondamentali in una maniera unificata e matematicamente coerente: difatti esistono infinite teorie<sup>||</sup> che soddisfano a tali requisiti! Peraltro, la speranza di discriminare fra le infinite teorie isolando quella che ha il Modello Standard come teoria effettiva a basse energie, è pure finora naufragata di fronte alle enormi difficoltà matematiche di traduzione dal linguaggio delle teoria di stringa a quello della teoria di campo.

## A Appendice

### A.1 Il gruppo SU(2)

Il gruppo SU(2) delle matrici unitarie a determinante uno è generato dalle matrici hermitiane  $\tau^a = \frac{\sigma^a}{2}$  dove le matrici di Pauli  $\sigma^a$  soddisfano le proprietà fondamentali:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \Rightarrow [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk} \sigma_k \quad \sigma_2 \sigma_i \sigma_2 = -\sigma_i^* = -\sigma^t$$

$$\text{Tr}[\sigma_a] = 0 \quad \text{Tr}[\sigma_a \sigma_b] = 2\delta_{ab} \quad \text{Tr}[\sigma_a \sigma_b \sigma_c] = 2i\varepsilon_{abc} \quad \text{Tr}[\sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d] = 2(\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{bc}\delta_{da} - \delta_{ac}\delta_{bd})$$

I generatori  $\tau^a$  sono normalizzati a  $\text{Tr}[\tau_a \tau_b] = \frac{1}{2}\delta_{ab}$  e soddisfano  $[\sigma_i, \sigma_j] = i\varepsilon_{ijk} \sigma_k$  dove  $\varepsilon_{ijk}$  é il tensore completamente antisimmetrico ( $\varepsilon_{123} = 1$ ) che definisce le costanti di struttura del gruppo. Ogni matrice  $U \in \text{SU}(2)$  si può scrivere come  $U = \exp[i\tau^a \alpha^a]$ ,  $a = 1, 2, 3$ ,  $\alpha^a$  reali.

#### A.1.1 Fondamentale

La rappresentazione fondamentale è definita da uno spinore complesso  $s$  di spin  $\frac{1}{2}$  che trasforma come  $s_i \rightarrow s'_i = U_{ij} s_j$ . Notare che  $s^* \rightarrow U^* s^*$  mentre, date le proprietà delle matrici di Pauli,  $s^c \equiv i\sigma^2 s^* \rightarrow U s^c$ ,  $s^{*c} \rightarrow U^* s^{*c}$ . In gergo,  $s$  sta nella rappresentazione  $\frac{1}{2}$  mentre  $s^* \in \frac{1}{2}^*$ .

<sup>||</sup>gli “stringhisti” continuano però a sperare che queste infinite teorie siano in realtà diverse manifestazioni di una unica teoria più generale, la Teoria-M (?).

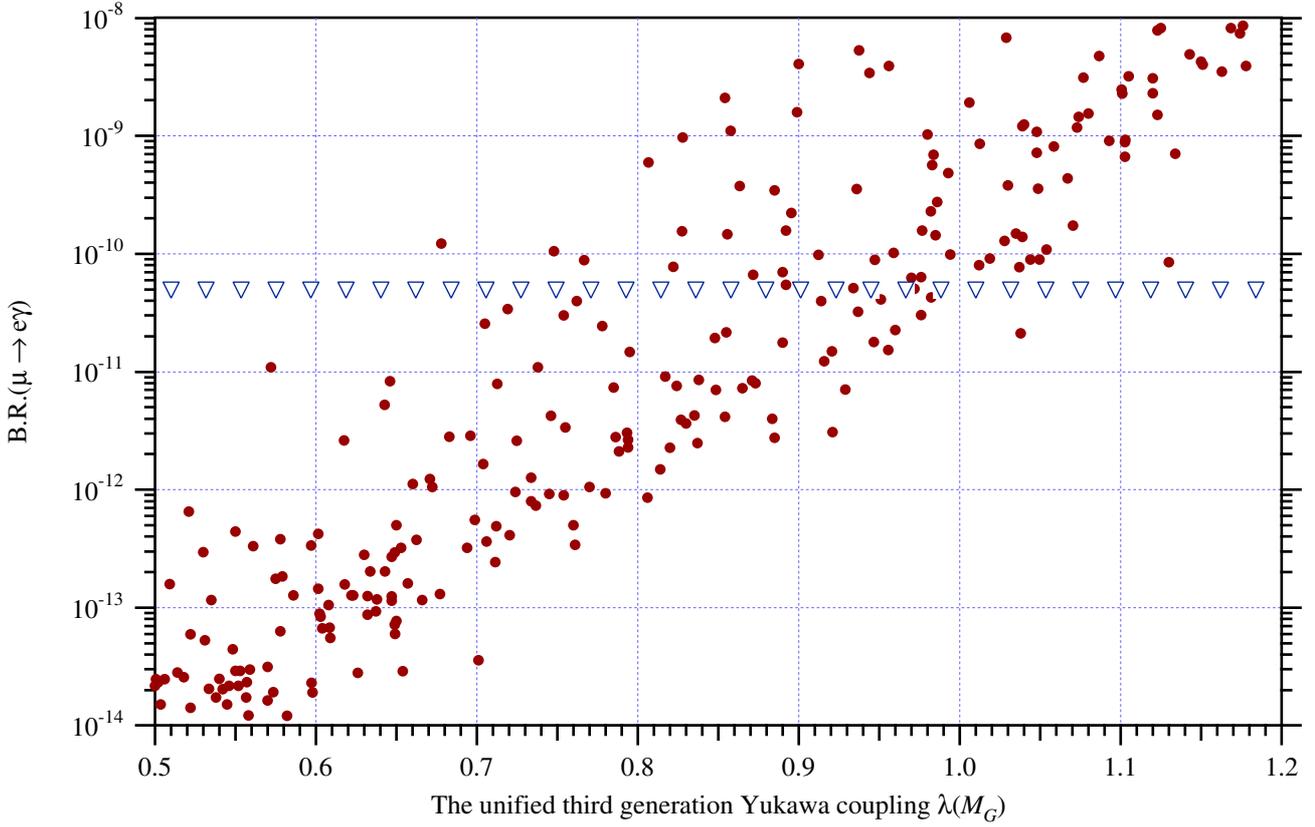


Figura 15: B.R.  $(\mu \rightarrow e\gamma)$  in funzione di  $\lambda_G$  per  $m_{\tilde{e}_R} = 1$  TeV e valori consentiti per gli altri parametri SUSY. La linea di ' $\nabla$ ' individua il limite superiore sperimentale.

### A.1.2 Aggiunta

La rappresentazione aggiunta é definita da un vettore reale di spin 1  $A_i, i = 1, 2, 3$  che trasforma come

$$A'_i \sigma^i = U A_i \sigma^i U^\dagger, U \in SU(2) \Rightarrow A'_i = R_{ij} A_j, R \in SO(3) \quad (66)$$

Il gruppo  $SO(3)$  è quindi localmente isomorfo al gruppo  $SU(2)$ , cioè ha le stesse costanti di struttura (non è però equivalente, perchè?). In gergo,  $A \in 1$ .

### A.1.3 Composizione di due spin $\frac{1}{2}$

Dati due spinori  $s, w \in \frac{1}{2}$  esistono due possibili decomposizioni del prodotto tensore in rappresentazioni irriducibili:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1 \quad \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2}^* = 0 \oplus 1 \quad (67)$$

Le rappresentazioni irriducibili si possono classificare in base alle loro proprietà rispetto alla simmetria di scambio  $s \rightleftharpoons w$ .

## A.2 Il gruppo di Lorentz

Le trasformazioni di Lorentz sono descritte dall'operatore  $\Lambda = \exp[i(\mathbf{J}_+ \boldsymbol{\theta}_+ + \mathbf{J}_- \boldsymbol{\theta}_-)]$  dove gli operatori  $\mathbf{J}_\pm$  soddisfano l'algebra di  $SU(2)$  commutando fra loro, e inoltre  $\boldsymbol{\theta}_+ = \boldsymbol{\alpha} - i\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}_- = \boldsymbol{\theta}_+^* = \boldsymbol{\alpha} + i\boldsymbol{\beta}$ ; i parametri  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ , reali, descrivono rispettivamente le rotazioni e i boost. Il gruppo è quindi isomorfo a  $SU(2) \otimes SU(2)$  e la rappresentazione fondamentale è descritta da spinori di Weyl a due componenti  $\psi_L = (\frac{1}{2}, 0)$  e  $\psi_R = (0, \frac{1}{2})$  che trasformano come:

$$\psi_L \rightarrow e^{i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\boldsymbol{\alpha} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\boldsymbol{\beta}} \psi_L \quad \psi_R \rightarrow e^{i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\boldsymbol{\alpha} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\boldsymbol{\beta}} \psi_R \quad (68)$$

PROPERTIES OF THE INTERACTIONS			
Property \ Interaction	Strong		
	Gravitational	Fundamental	Residual
Acts on:	Mass – Energy	Color Charge	See Residual Strong Interaction Note
Particles experiencing:	All	Quarks, Gluons	Hadrons
Particles mediating:	Graviton (not yet observed)	Gluons	Mesons
Strength relative to electromag for two u quarks at: for two protons in nucleus	$10^{-41}$ $10^{-41}$ $10^{-36}$	25 60 Not applicable to hadrons	Not applicable to quarks 20

Property \ Interaction	(Electroweak)	
	Weak	Electromagnetic
Acts on:	Flavor	Electric Charge
Particles experiencing:	Quarks, Leptons	Electrically charged
Particles mediating:	$W^+$ $W^-$ $Z^0$	$\gamma$
Strength relative to electromag for two u quarks at: for two protons in nucleus	0.8 $10^{-4}$ $10^{-7}$	1 1 1

Figura 16: le 4 forze fondamentali

Si può passare da una rappresentazione all'altra usando il tensore metrico reale antisimmetrico  $\varepsilon \equiv i\sigma_2$ ,  $\varepsilon^2 = -1$ . Infatti, utilizzando  $\sigma_2\sigma_i^*\sigma_2 = -\sigma_i$ :

$$\psi_L \rightarrow e^{i\frac{\sigma}{2}\alpha + \frac{\sigma}{2}\beta} \psi_L \Rightarrow \psi_L^c \equiv i\sigma_2\psi_L^* \rightarrow i\sigma_2 e^{-i\frac{\sigma}{2}\alpha + \frac{\sigma}{2}\beta} (-i\sigma_2)(i\sigma_2)\psi_L^* = e^{i\frac{\sigma}{2}\alpha - \frac{\sigma}{2}\beta} \psi_L^c \quad (69)$$

Gli scalari di Lorentz si possono scrivere usando due spinori di tipo left secondo la decomposizione  $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (\frac{1}{2}, 0) = (0, 0) + (1, 0)$  oppure in maniera analoga con due spinori tipo right. La combinazione giusta è  $\psi_L \varepsilon \psi_L$ ,  $\psi_R \varepsilon \psi_R$ . Infatti la relazione fra le matrici di Pauli si può anche scrivere  $\sigma_i^t \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_i$  da cui

$$\psi_L^t \sigma_2 \psi_L \rightarrow \psi_L^t e^{i\frac{\sigma}{2}\alpha + \frac{\sigma}{2}\beta} \sigma_2 e^{i\frac{\sigma}{2}\alpha + \frac{\sigma}{2}\beta} \psi_L = \psi_L^t \sigma_2 e^{i\frac{\sigma}{2}\alpha + \frac{\sigma}{2}\beta} e^{i\frac{\sigma}{2}\alpha + \frac{\sigma}{2}\beta} \psi_L = \psi_L^t \sigma_2 \psi_L \quad (70)$$

Per vedere come trasformano i quadrivettori, ricordiamo che i trivettori spaziali  $A_a$  trasformano sotto rotazioni come

$$A'_a \sigma_a = U A_a \sigma_a U^\dagger \quad U = e^{i\frac{\sigma}{2}\alpha} \Rightarrow A'_a A'_a = \text{Tr}\{A'_a \sigma_a A'_b \sigma_b\} = \text{Tr}\{U A_a \sigma_a U^\dagger U A_b \sigma_b U^\dagger\} = A_a A_a \quad (71)$$

Si può verificare direttamente con l'algebra delle matrici di Pauli che effettivamente  $A'_a = (\mathcal{R}A)_a$  con  $\mathcal{R}$  matrice ortogonale che descrive la rotazione di parametri  $\alpha$ . Siccome  $\psi^\dagger \sigma_a A_a \psi$  è invariante se  $\psi \rightarrow U\psi$ ,  $\psi^\dagger \sigma_a \psi$  deve trasformarsi come un vettore. D'altra parte questo è implicito nella (71) che si può scrivere

$$U A_a \sigma_a U^\dagger = (\mathcal{R}A)_a \sigma_a = \mathcal{R}_{ab} A_b \sigma_a = A_a (\mathcal{R}^{-1}\sigma)_a \Rightarrow U \sigma_a U^\dagger = (\mathcal{R}^{-1}\sigma)_a \quad (72)$$

avendo usato  $\mathcal{R}^t = \mathcal{R}^{-1}$ .

Nel caso dei quadrivettori, la metrica complica le cose. Sembra logico estendere la (71) a\*\*:

$$A'^\mu \sigma_\mu = M A^\mu \sigma_\mu M^\dagger \quad \sigma_\mu = (1, \sigma_i) \quad M = \exp[i\sigma\alpha + \sigma\beta] \quad (73)$$

Però occorre fare attenzione perchè  $M^{-1} \neq M^\dagger$  e perchè  $\text{Tr}\{\sigma_\mu \sigma_\nu\} \neq g_{\mu\nu}$ ; occorre definire  $\bar{\sigma} = (1, -\sigma_i)$  di modo che  $\text{Tr}\{\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu\} = g_{\mu\nu}$ . Se  $A'^\mu \sigma_\mu = M A^\mu \sigma_\mu M^\dagger$  equivale a  $A'^\mu \bar{\sigma}_\mu = M^{-1\dagger} A^\mu \sigma_\mu M^{-1}$  siamo a posto in quanto avrei

$$A'_\mu A'^\mu = \text{Tr}\{(A'\sigma)(A'\bar{\sigma})\} = \text{Tr}\{M(A\sigma)M^\dagger M^{\dagger-1}(A\bar{\sigma})M^{-1}\} = \text{Tr}\{(A\sigma)(A\bar{\sigma})\} = A_\mu A^\mu \quad (74)$$

\*\*notare che  $\sigma_\mu = \sigma_\mu^\dagger$  per cui  $A'^\mu \sigma_\mu = M A^\mu \sigma_\mu M^{-1}$  non andrebbe bene in quanto  $M^{-1} \neq M^\dagger$

In effetti questo è il caso, in quanto  $\sigma_2 \sigma_i^\dagger \sigma_2 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_i^* \sigma_2 \sigma_2 = -\sigma_i$  cioè  $\sigma_2 \sigma_\mu^* \sigma_2 = \bar{\sigma}_\mu$  per cui:

$$M(A\sigma)M^\dagger = (A'\sigma) \Rightarrow M^*(A\sigma^*)M^t = (A'\sigma^*) \Rightarrow \sigma_2 M^* \sigma_2 (A\sigma_2 \sigma^* \sigma_2) \sigma_2 M^t \sigma_2 = (A'\sigma_2 \sigma^* \sigma_2) \Rightarrow A''\bar{\sigma}_\mu = M^{-1\dagger} A''\sigma_\mu M^{-1} \quad (75)$$

Infine,  $\psi_L^\dagger (A''\sigma_\mu)\psi_L$  con  $\psi_L \rightarrow M\psi_L$  e  $\psi_R^\dagger (A''\bar{\sigma}_\mu)\psi_R$  con  $\psi_R \rightarrow M^{-1\dagger}\psi_R$  sono invarianti, per cui  $\psi_L^\dagger \sigma_\mu \psi_L, \psi_R^\dagger \bar{\sigma}_\mu \psi_R$  trasformano come quadrivettori.

### A.3 Matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM)

Il settore di Higgs e i termini di Yukawa sono dati da (gli indici  $i, j$  sono di famiglia):

$$-\lambda(\phi^\dagger\phi - v^2)^2 + \bar{Q}_L^i M_{ij}^D D_R^j \phi + h.c. + \bar{Q}_L^i M_{ij}^U U_R^j \bar{\phi}^\alpha + h.c. \quad (76)$$

Questa espressione si può semplificare con un cambio di base, in quanto ogni generica matrice  $M$  si può diagonalizzare con una matrice unitaria a destra e una a sinistra:  $U_L^\dagger M U_R = D$  con  $D$  matrice diagonale. Per dimostrare questo, cominciamo con l'osservare che così come un numero complesso si può scrivere  $\rho e^{i\theta}$  con  $\rho = \rho^*$ ,  $e^{i\theta} e^{-i\theta} = 1$ , una generica matrice nxn complessa si può sempre scrivere  $M = HU$  con  $H$  hermitiana e  $U$  unitaria;  $M$  è definita da  $2n^2$  parametri mentre  $H$  e  $U$  hanno  $n^2$  gradi di libertà ciascuna. Infatti  $MM^\dagger$  è hermitiana e definita positiva e posso quindi diagonalizzarla con autovalori positivi  $MM^\dagger = V^\dagger D V$ ,  $V$  unitaria, e  $H = \sqrt{MM^\dagger} = V^\dagger \sqrt{D} V$ ; posso sempre fissare le fasi di  $V$  in modo che gli autovalori di  $H$  siano positivi (sono le masse fisiche). Dalle equazioni sopra si ricava  $U = (MM^\dagger)^{-\frac{1}{2}} M = V^\dagger \frac{1}{\sqrt{D}} V M$ . Si verifica facilmente che  $(V^\dagger \sqrt{D} V)(V^\dagger \frac{1}{\sqrt{D}} V M) = M$ ; inoltre nel caso particolare in cui ci sia un autovalore nullo, ad esempio  $D_{33} = 0$ , basta prendere  $(\frac{1}{\sqrt{D}})_{33} = r$  con  $r$  numero reale qualsiasi. A questo punto, basta prendere come  $U_L$  la matrice che diagonalizza  $H$ , cioè  $U_L^\dagger H U_L = D$  e scegliere poi  $U_R = (U_L^\dagger U)^{-1}$ . In questo modo quindi  $U_L^\dagger M U_R = (U_L^\dagger H U_L)(U_L^\dagger U)(U_L^\dagger U)^{-1} = D$ .

A questo punto, nella (76) posso fare il cambio di base  $Q_L \rightarrow U_{Q_L}^\dagger Q_L, U_L \rightarrow U_{U_R} U_R, D_R \rightarrow U_{D_R} D_R$  con le  $U$  matrici diagonali. Osservazione importante: questo cambio di base è ammesso perchè non cambia i termini cinetici nella (12) e quindi gli stati che si propagano restano invariati. Posso scegliere una fase in cui  $M^U$  è diagonale,  $U_{Q_L}^\dagger M^U U_{D_R} = \text{Diag}(m_i^u)$  dove  $m_i^u$  sono gli autovalori, che sono reali e posso scegliere positivi tramite una ridefinizione delle fasi dei campi  $U_R$ . Una volta fatto questo, la rotazione dei  $Q_L$  è fissata e il massimo che posso fare su  $M^D$  è renderla hermitiana. E' facile vedere che per far questo, una volta scritto  $M^D = HU$ , basta scegliere  $U_{D_R} = U^\dagger U_{Q_L}^\dagger$ . Posso quindi riscrivere la (76), *senza perdere di generalità*, come

$$-\lambda(\phi^\dagger\phi - v^2)^2 + \bar{Q}_L^i \Lambda_{ij}^D D_R^j \phi + h.c. + \lambda_i^u \bar{Q}_L^i U_R^j \bar{\phi}^\alpha + h.c. \quad H_D = H_D^\dagger, \lambda_i^u > 0 \quad (77)$$

con  $\Lambda$  matrice 3x3 hermitiana. Veniamo ora alle masse dei quarks, che si ottengono dalla (76) con la sostituzione  $\phi \rightarrow \langle \phi \rangle$ :

$$v \bar{D}_L^i \Lambda_{ij}^D D_R^j + h.c. + \lambda_i^u v \bar{U}_L^i U_R^j + h.c. \quad (78)$$

Occorre adesso diagonalizzare  $\Lambda$  per passare alla base fisica degli autostati di massa:  $D_{L,R} \rightarrow V^{CKM} D_{L,R}$ . E' facile vedere che l'effetto di questa trasformazione, oltre che diagonalizzare i termini di massa che diventano:

$$m_i^d D_L^i D_R^i + h.c. + m_i^u \bar{U}_L^i U_R^i + h.c. \quad (79)$$

ha come unico altro effetto quello di cambiare le correnti cariche, che diventano

La matrice di Cabibbo-Kobayashi-Maskawa è una matrice unitaria 3x3  $U_{ij} = \langle u_i | U | d \rangle$  dove  $i$  è l'indice di flavor. Posso ridefinire le fasi dei campi in modo che  $U$  sia reale? Se  $u_i \rightarrow e^{i\bar{\theta}_i} u_i, d_i \rightarrow e^{i\theta_i} d_i$  ho che  $U_{ij} \rightarrow e^{i(\theta_i - \bar{\theta}_j)} U_{ij} \equiv e^{i\theta_{ij}} U_{ij}$ . Il numero delle fasi indipendenti non è però  $2 \times 3 = 6$  come ci si potrebbe attendere, in quanto c'è una invarianza per riparametrizzazione con una fase overall:  $\theta_i \rightarrow \theta_i + \theta, \bar{\theta}_i \rightarrow \bar{\theta}_i + \theta \Rightarrow \theta_{ij} \rightarrow \theta_{ij}$ . Posso quindi fissare a zero la fase di un campo, poniamo  $u_1$ , e considerare le fasi relative a questa, che sono dunque 5. Quante fasi indipendenti ci sono in  $U$ ? In principio sono  $n^2$ , però devo tenere conto delle relazioni di unitarietà  $U_{ik} U_{jk}^* = \delta_{ij}$ . Quelle con  $i = j$  non dicono nulla sulle fasi ma solo sui moduli, quindi per le fasi ho  $\frac{n(n-1)}{2} = 3$  relazioni. In totale quindi  $9 - 3 = 6$  fasi. Con 5 gradi di libertà non riesco a eliminare tutte queste fasi; ne rimane una libera. In generale ho  $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$  fasi libere in una matrice unitaria nxn e  $2n - 1$  possibili ridefinizioni; posso rendere la matrice reale se  $2n - 1 \geq \frac{n(n+1)}{2}$  cioè  $1 \leq n \leq 2$ ; in pratica solo  $n = 1, 2$  lo consentono. Nel caso  $n = 3$ , il numero di parametri iniziale è  $n^2 = 9$ . Con 5 ridefinizioni di fase ho un totale di  $9 - 5 = 4$  gradi di libertà di cui uno, come si è visto, è una fase ineliminabile e gli altri 3 sono angoli di rotazione ad esempio.

## Riferimenti bibliografici

- [1] L.B. Okun, “Leptoni e quark”, Edizioni Mir
- [2] G. Altarelli, “The Standard Electroweak Theory and Beyond”, hep-ph/0011078; J. Erler, P. Langacker, “Status of the Standard Model”, hep-ph/9809352
- [3] M. Froissart, Phys. Rev. 123, 1053 (1961)
- [4] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B33, 173 (1971)
- [5] K. Hagiwara et al., Phys. Rev. D66, 010001 (2002); vedi anche la pagina web del Particle Data Group <http://pdg.lbl.gov/>
- [6] [LEP collaborations] arXiv:hep-ex/0101027; vedi anche LEP Electroweak Working Group homepage <http://lepewwg.web.cern.ch/LEPEWWG/>
- [7] Vedi ad esempio A. Ereditato, Eur. Phys. J. directC **4S1** (2002) 38, e le citazioni nell’articolo
- [8] K. Kaneyuki [SUPER-KAMIOKANDE Collaboration], Nucl. Phys. Proc. Suppl. **112** (2002) 24.
- [9] V. V. Gorbachev *et al.* [SAGE Collaboration], Phys. Atom. Nucl. **65**, 2156 (2002) [Yad. Fiz. **65**, 2219 (2002)]; J. Farine [SNO Collaboration], Phys. Atom. Nucl. **65** (2002) 2147 [Yad. Fiz. **65** (2002) 2210].
- [10] S. Scherer, arXiv:hep-ph/0210398; vedi anche <http://castore.mib.infn.it/nason/misc/chiral-lagrangians.ps.gz>
- [11] vedi ad esempio M. Diwan, arXiv:hep-ex/0211001 e riferimenti all’interno
- [12] Ta-Pei Cheng e Ling-Fong Li, “Gauge theory of elementary particle physics”, Oxford Science Publications
- [13] T. Hambye and K. Riessellmann, Phys. Rev. D **55** (1997) 7255 [arXiv:hep-ph/9610272].