Università degli Studi di Lecce
Corso di Laurea in Fisica

Istituzioni di Fisica Nucleare e Subnucleare

(a.a. 2001-2002 II Semenstre)

Appunti di Cinematica Relativistica

I. De Mitri, G. Mancarella

Dipartimento di Fisica
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare

1 Trasformazioni di Lorentz

Consideriamo due sistemi di riferimento cartesiano inerziali S ed S' i cui assi siano paralleli tra loro; S' è in moto uniforme rispetto ad S con velocità v lungo l'asse x. Le trasformazioni che permettono l'invarianza della velocità della luce c (trasformazioni di Lorentz) sono:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \gamma\,(ct - \beta x) \end{aligned} \tag{1}$$

dove sono stati definiti

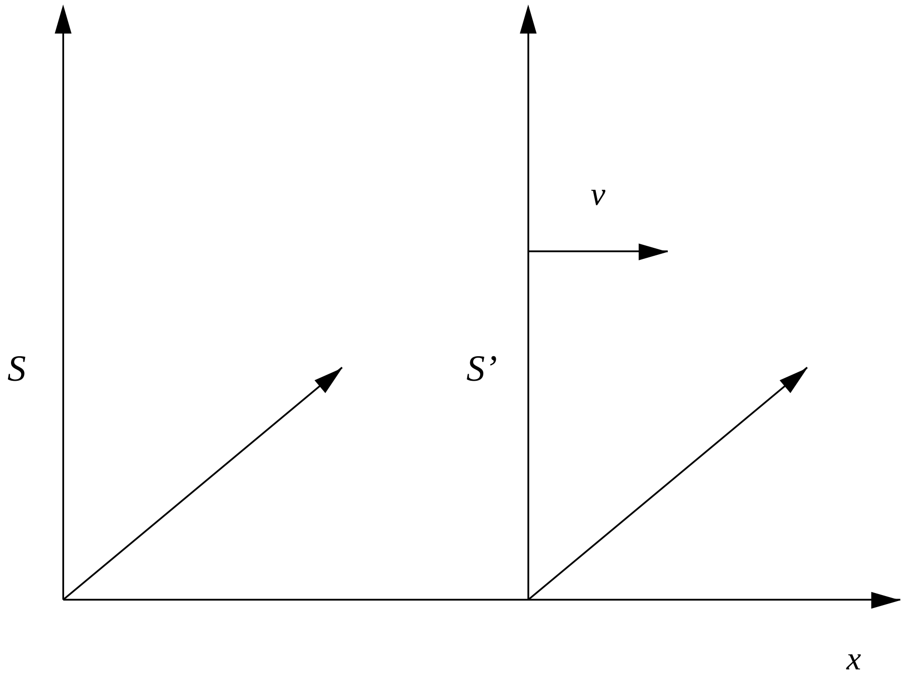
$$\beta = \frac{v}{c} \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1 \tag{2}$$

Utilizzando una notazione matriciale possiamo scrivere:

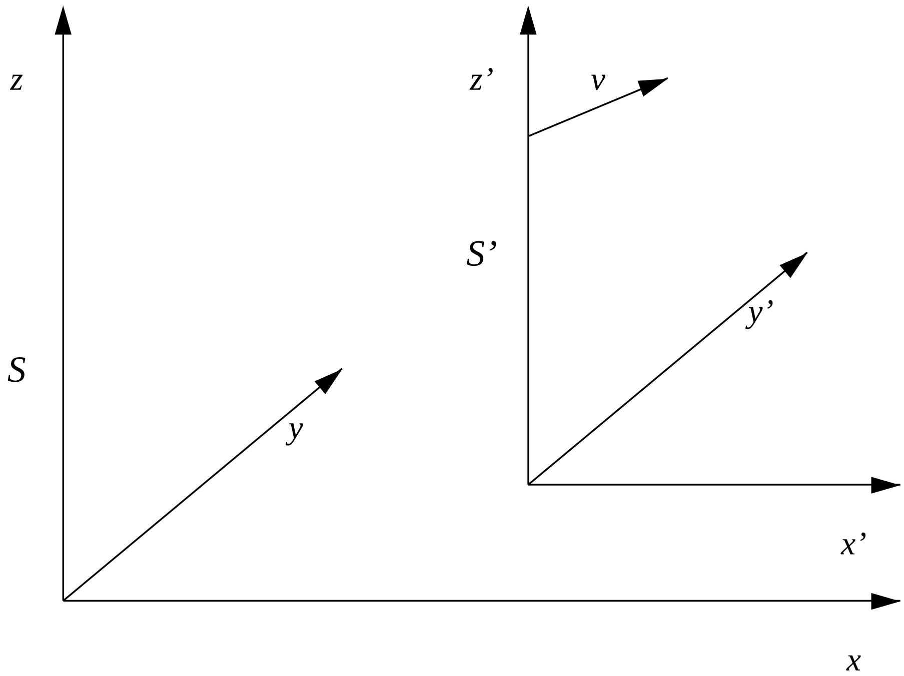
$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{3}$$

Le trasformazioni inverse si possono ottenere invertendo il sistema (3) o, equivalentemente sostituendo β con $-\beta$. Quindi:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \tag{4}$$



v
S
S’
x



z
z’
v
S’
y’
S
y
x’
x

Supponiamo ora che il sistema di riferimento S' abbia ancora gli assi paralleli a quelli del sistema S ma che la velocità $\mathbf{v}$ sia definita lungo una direzione arbitraria. In questo caso si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}' &= \mathbf{r} + \boldsymbol{\beta}\gamma\left[\frac{\gamma}{\gamma+1}\mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\beta} - ct\right] \\
ct' &= \gamma\left[ct - \mathbf{r}\cdot\boldsymbol{\beta}\right]
\end{aligned}$$

Ossia:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ r'_{\parallel} \\ r'_{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ r_{\parallel} \\ r_{\perp} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Anche in questo caso $r_{\perp}$ (la componente di $\mathbf{r}$ perpendicolare a $\mathbf{v}$) rimane invariata, mentre si trasformano la componente parallela $r_{\parallel}$ ed il tempo. Di nuovo, le trasformazioni inverse si ottengono invertendo il segno di $\boldsymbol{\beta}$.

La trasformazione delle velocità è piuttosto complicata dal fatto che si trasformano sia il numeratore che il denominatore di $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$. Risulta che, mentre la (3) è una trasformazione lineare, quella della velocità non lo è. Di fatto siamo interessati maggiormente alla trasformazione tra impulsi, che è lineare (vedi dopo).

1.1 Dilatazione dei tempi

Consideriamo un osservatore di S' che rilevi due eventi negli istanti t'_1 e t'_2. L'intervallo di tempo misurato in S' sarà $\Delta t' = (t'_2 - t'_1)$. Utilizzando in un punto fissato $\mathbf{r}$' trasformazioni inverse (4), l'intervallo di tempo misurato da un osservatore nel sistema S sarà:

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \tag{6}$$

Dato che, per definizione, $\gamma \geq 1$ si ha la *dilatazione dei tempi*. Data una particella, un intervallo di tempo τ misurato nel sistema di riferimento ad essa solidale viene chiamato *tempo proprio*. Una conseguenza interessante e misurabile nella fisica delle particelle elementari è la dilatazione dei tempi di vita.

2 Distanza tra due eventi

Se definiamo un evento come l'insieme delle tre coordinate spaziali e di quella temporale, e consideriamo due eventi E_1 ed E_2:

$$\begin{aligned}
E_1 &: (ct_1, x_1, y_1, z_1) \\
E_2 &: (ct_2, x_2, y_2, z_2)
\end{aligned} \tag{7}$$

possiamo definire la distanza tra E_1 ed E_2:

$$\begin{aligned}
D^2 &= (c(t_2 - t_1))^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \\
&= (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2
\end{aligned} \tag{8}$$

che è un invariante per trasformazioni di Lorentz. L'invarianza di D è strettamente legata all'invarianza della velocità della luce. Ad esempio se consideriamo due eventi, emissione di un segnale luminoso in $\mathbf{r}_1$ al tempo t_1 e ricezione dello stesso segnale in $\mathbf{r}_2$ al tempo t_2, avremo

$$(c\Delta t)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \tag{9}$$

in qualunque sistema di riferimento e con lo stesso valore della velocità della luce c. Quindi, in questo caso, D è nullo in tutti i sistemi di riferimento.

In generale si può dimostrare che l'invarianza della velocità della luce implica quella dell'intervallo tra due eventi qualsiasi. Consideriamo infatti un intervallo infinitesimo tra due eventi qualsiasi misurato in S ed S':

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{(cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2} \\ dS' &= \sqrt{(cdt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2} \end{aligned} \tag{10}$$

Se dS=0 i due eventi possono essere connessi da un segnale luminoso (anche se non sono l'emissione e la ricezione di un segnale luminoso) e risulta che anche dS'=0 qualunque sia il sistema di riferimento S' in cui è calcolato. Più in generale, se le trasformazioni tra le coordinate sono lineari, dS e dS' sono infinitesimi dello stesso ordine, quindi $dS' = a\ dS$ ove a dipende solo dal modulo della velocità relativa tra i due sistemi (isotropia delllo spazio), quindi:

$$\begin{aligned} dS' &= a(v_1)dS \\ dS'' &= a(v_2)dS = a(v_{21})dS' \\ a(v_1)a(v_{21}) &= a(v_2) \end{aligned} \tag{11}$$

e questo per qualsiasi valore di v_1 e v_2. La (11) può verificarsi solo se $a = 1$. Con le due sole ipotesi dell'invarianza della velocità della luce e della linearità delle trasformazioni, abbiamo dedotto l'invarianza della distanza tra due eventi. Le trasformazioni di Lorentz possono essere derivate partendo dalla richiesta di tale invarianza.

In generale D^2 può essere:

- > 0 *tipo tempo*
- $= 0$ *tipo luce*
- < 0 *tipo spazio*

Se $D^2 = 0$ i segnali possono essere connessi da un segnale luminoso. Se $D^2 > 0$ si ha che

$$c\Delta t > \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \tag{12}$$

quindi i due eventi possono essere connessi da un segnale che viaggia a velocità inferiore a quella della luce. Se, infine, $D^2 < 0$ i due eventi non possono essere connessi da nessun segnale. Due eventi possono avere una relazione causale tra loro solo se possono essere connessi da un segnale luminoso o da qualsiasi altro segnale che viaggi a velocità inferiore a quella della luce, quindi due eventi possono avere una connessione causale solo se la loro distanza è positiva o nulla.

Si consideri ora una particella dotata di velocità istantanea $\mathbf{v}(t)$ rispetto ad un dato sistema inerziale S. In un intervallo di tempo infinitesimo la sua posizione varia di $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$. Il corrispondente intervallo invariante infinitesimo è dato dalla (10). D'altra parte, se calcolo tale intervallo nel sistema di riferimento S' in cui la particella è a riposo (i.e. $d\mathbf{r}' = 0$) ottengo che $dS' = cd\tau$. Il *tempo proprio* è quindi un invariante di Lorentz.

Si noti, infine, che per quanto ricavato anche la quantità

$$(ct)^2 - |\mathbf{r}|^2 \tag{13}$$

è invariante per trasformazioni di Lorentz.

3 Quadrivettori

L'invarianza della quantità in (13) suggerisce di introdurre un quadrivettore x di componenti:

$$x^0 = ct \ , \ x^1 = x \ , \ x^2 = y \ , \ x^3 = z \tag{14}$$

ed un prodotto scalare tra due quadrivettori x e y dato da:

$$x \cdot y = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = \begin{pmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Le compomenti (14) vengono chiamate le componenti *controvarianti* del quadrivettore. Si considerano le componenti *covarianti* definite come:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu \tag{16}$$

con

$$x_0 = ct \ , \ x_1 = -x \ , \ x_2 = -y \ , \ x_3 = -z \tag{17}$$

quindi:

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu \tag{18}$$

dove è stata usata la convenzione di Einstein secondo la quale gli indici ripetuti vanno considerati sommati.

In generale, definiamo *quadrivettore* qualunque insieme di quattro quantità:

$$x \equiv \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \equiv \left(x^0, \mathbf{x}\right) \tag{19}$$

le cui componenti si trasformano secondo le trasformazioni di Lorentz. La metrica dello spazio non euclideo a cui appartengono i quadrivettori è fissata dalla matrice g utilizzata nella definizione del prodotto scalare. Per come è stato definito il prodotto scalare tra due quadrivettori è un invariante di Lorentz, così come il modulo di un quadrivettore:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_\mu x^\mu} = \sqrt{(x^0)^2 - |\mathbf{x}|^2} \tag{20}$$

4 Energia e impulso

Se provassimo a definire la quantità di moto come in meccanica non relativistica:

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{21}$$

oltre al problema già menzionato delle complicate proprietà di trasformazione di $d\mathbf{r}/dt$ ci troveremmo di fronte ad un problema ben più fondamentale: se la quantità di moto è conservata in un sistema di riferimento non è detto che lo sia in tutti.

Introduciamo la *velocità propria* di una particella:

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} \tag{22}$$

dove τ è il tempo proprio della particella. Dato che τ è un invariante di Lorentz, $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ si trasforma come x^μ quindi η^μ è la componente di un quadrivettore. Dalla (22) abbiamo che le componenti di η^μ sono date da:

$$\eta \equiv \gamma(c, v_x, v_y, v_z) \tag{23}$$

e

$$\eta^\mu \eta_\mu = \gamma^2(c^2 - \mathbf{v}^2) = c^2\gamma^2(1 - \frac{v^2}{c^2}) = c^2 \tag{24}$$

Ora definiamo un quadrimpulso come:

$$p^\mu = m\eta^\mu \tag{25}$$

dove m è la massa a riposo della particella. Le sue componenti spaziali sono date da:

$$\mathbf{p} = m\boldsymbol{\eta} = m\gamma\mathbf{v} \tag{26}$$

Nel limite non relativistico ($v \ll c$, $\gamma \simeq 1$) $\mathbf{p}$ coincide con la quantità di moto di una particella definita nella meccanica newtoniana. La componente temporale è data da:

$$\begin{aligned} p^0 &= \gamma mc = \frac{1}{c}mc^2\gamma = \frac{1}{c}mc^2\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ (\text{per} \quad v \ll c) &\simeq \frac{1}{c}mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{c}\left(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2\right) \end{aligned} \tag{27}$$

dunque nel limite non relativistico cp^0 è dato dalla somma dell'energia di riposo e dell'energia cinetica newtoniana della particella. Sulla base di questa corrispondenza col limite non relativistico definiamo l'energia di una particella come:

$$E = cp^0 \tag{28}$$

e la sua quantità di moto come la parte spaziale del quadrimpulso p. quindi:

$$p \equiv \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right) \tag{29}$$

si avrà:

$$p_\mu p^\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2c^2 \tag{30}$$

$$E = \gamma mc^2 \qquad ; \qquad E^2 = c^2|\mathbf{p}|^2 + m^2c^4 \tag{31}$$

Da $E = \gamma mc^2$ e $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ si ricava:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}c^2}{E} \quad ; \quad \beta = \frac{|\mathbf{p}|c}{E} \tag{32}$$

L'espressione relativistica dell'*energia cinetica* T di una particella è definita come:

$$T = E - mc^2 \tag{33}$$

Per particelle di massa nulla, come il fotone, non esiste un sistema di riferimento a riposo, quindi non è possibile definire il tempo proprio τ e quindi non è possibile definire η^μ. D'altra parte le espressioni (31) e (32) possono essere comunque formulate per una particella di massa nulla:

$$E^2 = c^2|\mathbf{p}|^2 \tag{34}$$

e quindi come conseguenza si ha:

$$\beta = 1 \tag{35}$$

Ricordiamo infine che, come per qualunque coppia di quadrivettori, il prodotto scalare di due quadrimpulsi è invariante per trasformazioni di Lorentz e che energia e quantità di moto si trasformano, essendo componenti di un quadrivettore, come tempo e posizione. In particolare:

$$\begin{pmatrix} E'/c \\ p'_\parallel \\ p'_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p_\parallel \\ p_\perp \end{pmatrix} \tag{36}$$

Nei paragrafi successivi diamo alcuni esempi dell'utilizzo dei quadrimpulsi e degli invarianti che si possono scrivere a partire da essi per semplici calcoli di cinematica.

5 Decadimento a due corpi - Massa invariante

Trattiamo come esempio il caso del decadimento del pione in muone e neutrino muonico:

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu \tag{37}$$

Le rispettive masse a riposo sono indicate come m_π m_μ e m_ν e valgono:

$$\begin{aligned} m_\pi &= 139.6\,\mathrm{MeV/c^2} \\ m_\mu &= 105.6\,\mathrm{MeV/c^2} \\ m_\nu &\leq 0.190\,\mathrm{MeV/c^2} \end{aligned}$$

Per la conservazione dell'energia e della quantità di moto, i quadrivettori saranno legati dalla relazione

$$p_\pi = p_\mu + p_\nu \quad \Longrightarrow \quad p_\nu = p_\pi - p_\mu \tag{38}$$

Nel sistema di riposo del π (i.e. nel sistema del CM):

$$p_\pi \equiv (m_\pi c, 0, 0, 0) \tag{39}$$

Quadrando la (38) e utilizzando la (39):

$$\begin{aligned} m_\nu^2 c^2 &= (m_\pi^2 + m_\mu^2)c^2 - 2p_\mu \cdot p_\pi \\ &= (m_\pi^2 + m_\mu^2)c^2 - 2m_\pi E_\mu \\ E_\mu &= \frac{m_\pi^2 + m_\mu^2 - m_\nu^2}{2m_\pi}\, c^2 \end{aligned} \tag{40}$$

Utilizzando la (40) è possibile calcolare il modulo dell'impulso del μ e quindi l'energia e il modulo dell'impulso del ν. Tutte le direzioni degli impulsi sono permesse, anche se non sono tutte equiprobabili.

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_\mu| &= \sqrt{\left(\frac{E_\mu}{c}\right)^2 - m_\mu^2 c^2} \\ &= c\sqrt{\frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2 - m_\nu^2)^2}{4m_\pi^2} - m_\mu^2} \\ &= c\,\frac{\sqrt{(m_\pi^2 + m_\mu^2 - m_\nu^2)^2 - 4m_\mu^2 m_\pi^2}}{2m_\pi} \\ &= c\,\frac{\sqrt{[m_\pi^2 - (m_\mu + m_\nu)^2][m_\pi^2 - (m_\mu - m_\nu)^2]}}{2m_\pi} \qquad (41) \\ |\mathbf{p}_\nu| &= |\mathbf{p}_\mu| \\ E_\nu &= \sqrt{m_\nu^2 c^4 + |\mathbf{p}_\nu|^2 c^2} \end{aligned}$$

Poichè $E_\mu \geq m_\mu c^2$ dalla (40) si ha che:

$$\begin{aligned} &\frac{m_\pi^2 + m_\mu^2 - m_\nu^2}{2m_\pi} \geq m_\mu \\ &(m_\pi - m_\mu)^2 \geq m_\nu^2 \\ &m_\pi \geq m_\nu + m_\mu \end{aligned} \tag{42}$$

In generale per un decadimento N corpi si deve avere:

$$M \geq \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{43}$$

Date N particelle di quadrimpulsi p_i la loro *massa invariante* (o *massa effettiva*) m è l'invariante relativistico definito da:

$$m = \frac{1}{c}\sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{N} p_i\Big)^2} = \frac{1}{c}\sqrt{\Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{E_i}{c}\Big)^2 - \Big(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i\Big)^2} \tag{44}$$

Se le N particelle provengono dal decadimento di una particella di massa M, m coincide con M. Ad esempio la fig. 1 mostra la distribuzione misurata della massa invariante del sistema e^+e^- nella reazione *semi-inclusiva*:

$$p + p \to e^+ + e^- + X \tag{45}$$

dove X sta per ogni possibile combinazione di particelle prodotte nell'interazione. Il picco della distribuzione è dovuto al fatto che la maggior parte delle coppie e^+e^- prodotte nell'interazione provengono dal decadimento della particella J/ψ. La larghezza di questo stato è molto piccola ($\sim$ $90\, keV/c^2$) e spesso la larghezza osservata è per la maggior parte dovuta alla risoluzione sperimentale dell'apparato di misura.

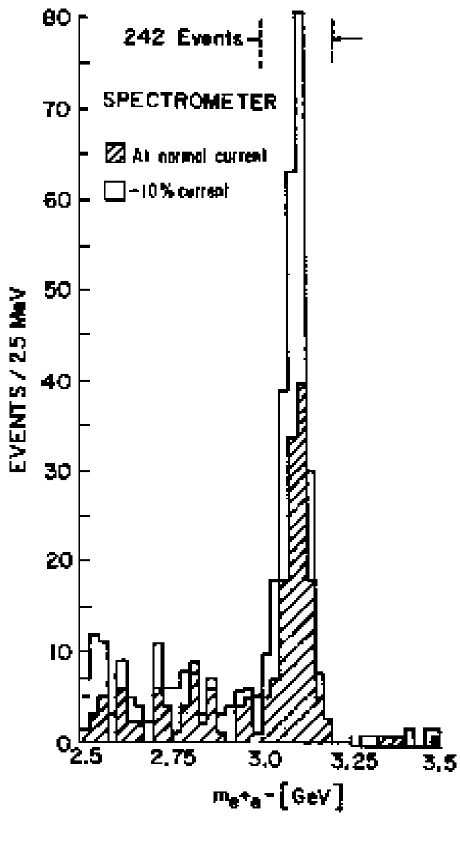


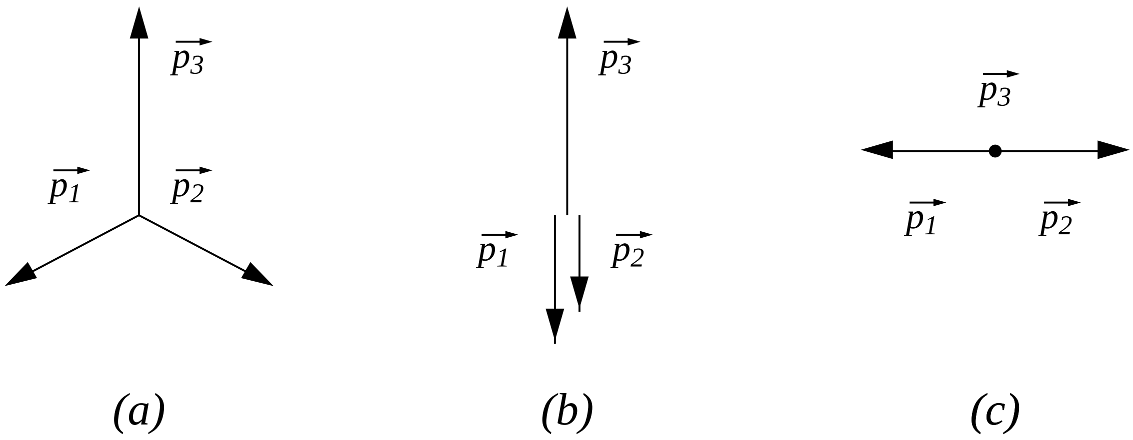
Figure 1: Distribuzione della massa invariante del sistema e^+e^- nella reazione (45). La presenza del picco è la prova dell'esistenza della J/ψ, mentre la posizione da' il valore della sua massa.

6 Decadimento a tre corpi - Dalitz plot

Il decadimento a tre corpi

$$M \to m_1 + m_2 + m_3 \tag{46}$$

può essere sempre trattato come un decadimento a due corpi con, nello stato finale, la particella 3, di massa m_3 e impulso $\mathbf{p}_3$, ed una particella di impulso $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ e massa m_{12} data dalla massa invariante del sistema 1-2.



Si può scrivere per $|\mathbf{p}_3|$ la stessa espressione trovata per il decadimento a 2 corpi:

$$|\mathbf{p}_3| = c\, \frac{\sqrt{[M^2 - (m_{12} + m_3)^2][M^2 - (m_{12} - m_3)^2]}}{2M} \tag{47}$$

Si può verificare che la (47) descresce al crescere di m_{12}. Il massimo valore di $|\mathbf{p}_3|$ si ha in corrispondenza del minimo di m_{12}, che è dato da:

$$(m_{12})_{min} = m_1 + m_2 \tag{48}$$

e cioè in una configurazione come quella della figura (b) in cui $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$ sono allineati e sono tali che le velocità $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono uguali. In questo caso il sistema a riposo della particella 1 coincide con quello della particella 2. Calcolando l'invariante m_{12} in questo sistema si ha immediatamente:

$$m_{12}^2 = (m_1 + m_2)^2 \tag{49}$$

e questo è il valore minimo possibile per m_{12}. Il valore massimo di m_{12} si ha invece quando tutta l'energia cinetica a disposizione è presa dalle particelle 1 e 2, cioè quando 3 è a riposo (configurazione (c) della figura) , allora anche il sistema 1-2 è a riposo e si ha:

$$(m_{12})_{max} = M - m_3 \tag{50}$$

La figura 2 mostra un esempio di distribuzione in energia degli elettroni prodotti in un decadimento a tre corpi e in uno a due corpi, misurata nello stesso esperimento. La prima parte dello spettro è relativa agli elettroni prodotti in

$$\begin{aligned} \pi^- \to \quad & \mu^- \quad + \overline{\nu}_\mu \\ & \hookrightarrow \quad e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu \end{aligned} \tag{51}$$

Nell'esperimento considerato il decadimento del π^- avviene da fermo, quindi l'impulso del muone, utilizzando la (41) con $m_\nu = 0$, vale:

$$|\mathbf{p}_\mu| = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} c \simeq 30\,\mathrm{MeV/c} \tag{52}$$

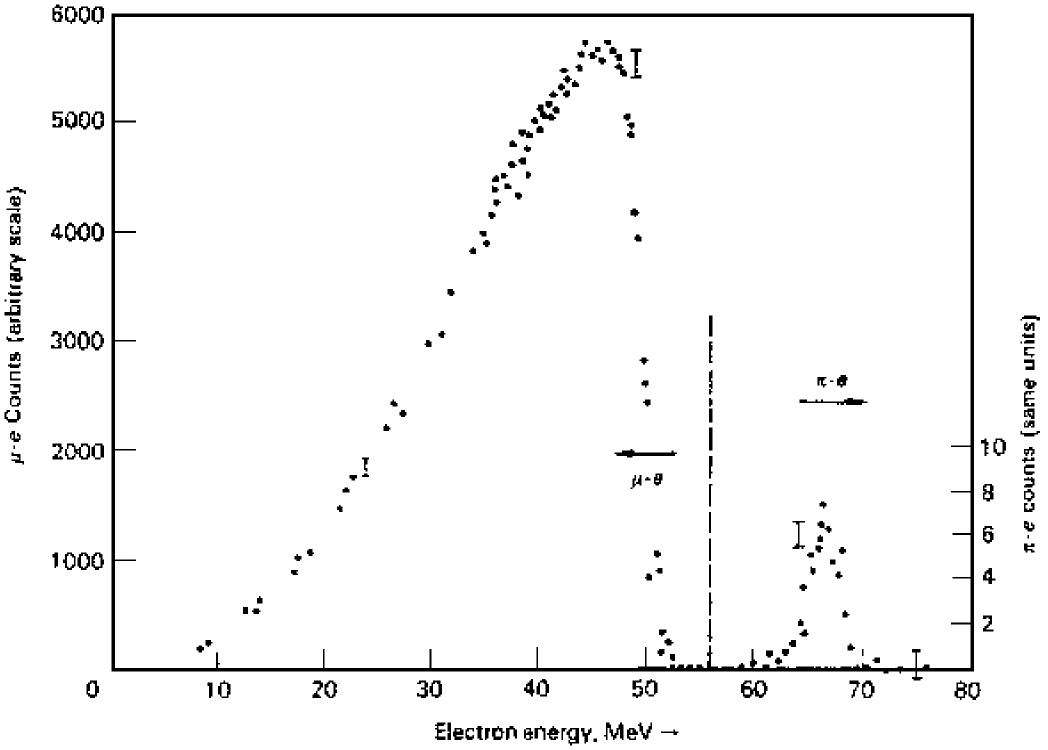


Figure 2: Spettro degli elettroni emessi nel decadimento di π a riposo.

A causa delle perdite di energia per eccitazioni-ionizzazione del mezzo attraversato, un muone con $|\mathbf{p}_\mu| \simeq 30\,\mathrm{MeV/c}$ si ferma dopo aver percorso un tratto $\Delta \simeq 2\,\mathrm{cm}$ (in un mezzo con densità $\rho \simeq 1\,\mathrm{g/cm}^3$). D'altra parte il μ^- è una particella instabile con vita media $\tau_\mu \simeq 2.2\,\mu\mathrm{s}$ e quindi in questo caso la sua *lunghezza di decadimento*, nel sistema di riferimento del laboratorio, è data da:

$$\Lambda = \beta_\mu c \gamma_\mu \tau_\mu == \frac{|\mathbf{p}_\mu| c}{E_\mu} \cdot \frac{E_\mu}{m_\mu c^2} \cdot c\tau_\mu \simeq 188\,\mathrm{m} \tag{53}$$

La probabilità che il μ^- decada in volo prima di fermarsi a causa della perdita di energia nel mezzo attraversato vale:

$$\mathcal{P} \sim 1 - e^{-\Delta/\Lambda} \simeq \frac{\Delta}{\Lambda} \simeq 10^{-4} \tag{54}$$

Nella quasi totalità dei casi, quindi, il muone decade da fermo e i valori massimo e minimo che l'impulso dell'elettrone può avere nel decadimento (51), possono essere ricavati dalle formule precedenti. Si ha:

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_e|_{max} &= \frac{m_\mu^2 - m_e^2}{2m_\mu} c \simeq 52\,\mathrm{MeV/c} \\ |\mathbf{p}_e|_{min} &= 0 \end{aligned} \tag{55}$$

Tali valori sono in accordo con quanto ricavabile dalla prima parte dello spettro in Fig.2.

La seconda parte dello spettro è dovuta ad un decadimento a due corpi del π^- (molto più raro di (51)):

$$\pi^- \to e^- + \overline{\nu}_e \tag{56}$$

In questo caso l'elettrone è monoenergetico con

$$|\mathbf{p}_e| = \frac{m_\pi^2 - m_e^2}{2m_\pi} c \simeq 70\,\mathrm{MeV/c} \tag{57}$$

e la forma gaussiana dello spettro è dovuta alla risoluzione dell'apparato di misura.

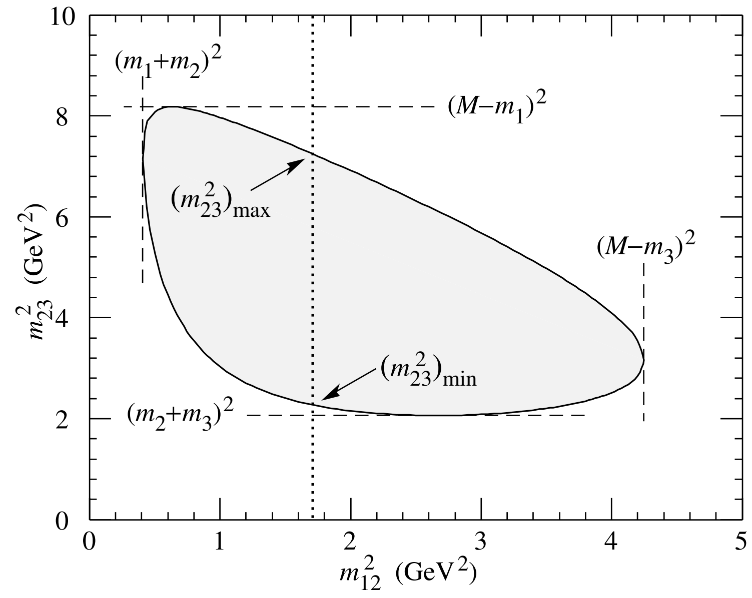


Figure 3: Dalitz plot per uno stato finale a tre corpi. Questo esempio si riferisce ad uno stato finale dato da $\pi^+\bar{K}^0 p$ con una massa invariante di $3\,\mathrm{GeV/c^2}$ [2].

Nello studio di un decadimento a tre corpi può essere molto utile analizzare la distribuzione dei valori misurati di m_{23}^2 in funzione di m_{12}^2, chiamata *Dalitz plot*. La regione permessa nel piano $m_{23}^2 - m_{12}^2$ e' delimitata da condizioni simili a quelle ottenute precedentemente (vedi Fig.3). Eventuali disuniformità nel popolamento della zona cinematicamente permessa del Dalitz plot sono in grado di dare importanti ed immediate informazioni sulla dinamica del decadimento (o della reazione).

Consideriamo ad esempio una reazione del tipo:

$$K^- + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \Lambda \tag{58}$$

Essa può essere trattata, dal punto di visto cinematico, come il decadimento di una particella che abbia come quadrimpulso la somma dei quadrimpulsi delle particelle nello stato iniziale , e quindi come massa la massa invariante del sistema. Definita la quantità

$$s = (p_{K^-} + p_p)^2 c^2 = (p_{\pi^+} + p_{\pi^-} + p_\Lambda)^2 c^2 \tag{59}$$

la massa invariante del sistema è data da $\sqrt{s}/c^2$ e $\sqrt{s}$ è l'energia effettivamente *disponibile* nella reazione. Ovviamente, affichè la reazione (58) sia cinematicamente possibile bisogna avere (dalla (43)):

$$\sqrt{s} \geq (m_{\pi^+} + m_{\pi^-} + m_\Lambda)c^2 \simeq 1.4\,\mathrm{GeV} \tag{60}$$

Il Dalitz plot di tale reazione è mostrato in Fig.4. Viene riportata la distribuzione misurata della massa invariante del sistema $\Lambda\pi^+$ rispetto a quella del sistema $\Lambda\pi^-$. Il fatto che i punti sperimentali si addensino in due zone della regione cinematicamente permessa indica che la reazione (58) procede attraverso la produzione di un'altra particella:

$$K^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^- \tag{61}$$

oppure

$$K^- + p \rightarrow \Sigma^- + \pi^+ \tag{62}$$

e il successivo decadimento della Σ in $\pi + \Lambda$. La massa dello stato Σ è di circa 1385 MeV/c^2 e la sua larghezza di circa $\Gamma \simeq 40$ MeV/c^2. L'istogramma a destra mostra la distribuzione della

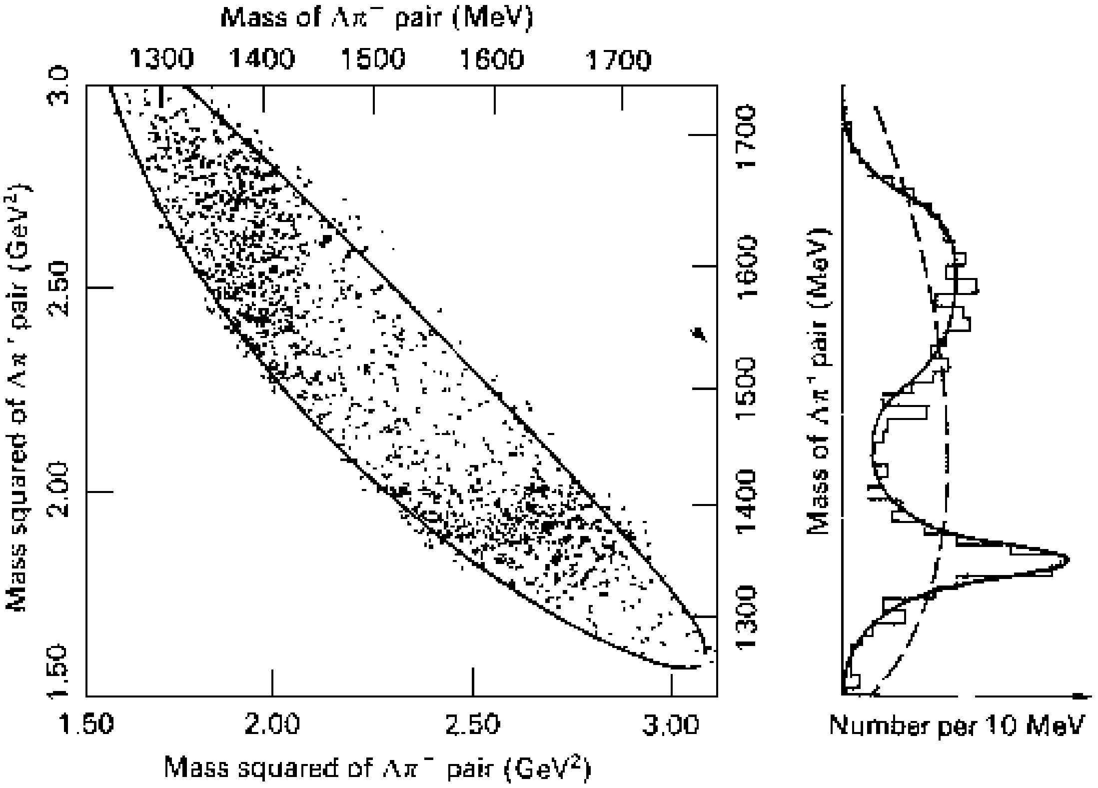


Figure 4: Distribuzione di massa invariante nella reazione (58)

massa invariante del sistema $\Lambda\pi^+$ con l'andamento tipico di una risonanza (*Breit-Wigner*) attorno a 1385 MeV/c^2. L'accumulo di eventi a massa più alta è invece un riflesso della produzione di Σ^- nel canale $\Lambda\pi^-$. La curva tratteggiata mostra invece l'andamento che avrebbe lo spettro se la reazione avvenisse mediante la produzione diretta del sistema a tre corpi nello stato finale e tutti i punti all'interno della curva limite fossero equiprobabili. In generale la larghezza Γ e il tempo di vita τ di uno stato sono legati dalla relazione di Heisenberg:

$$\Gamma \cdot \tau = \hbar \tag{63}$$

Utilizzando il valore:

$$\hbar \simeq 6.58 \cdot 10^{-22} \ MeV \cdot s \tag{64}$$

otteniamo per il tempo di vita dello stato Σ un valore di circa 10^{-23} s, un tempo di gran lunga troppo piccolo perchè questo stato possa essere osservato direttamente in un rivelatore. Lo studio della distribuzione di massa invariante dei prodotti di decadimento è dunque l'unico modo per rivelarne l'esistenza.

7 Soglia di una reazione

Consideriamo la reazione:

$$\pi + p \rightarrow \pi + \pi + \pi + p \ \ ; \ \ p_\pi + p_p = \sum_i p_i \tag{65}$$

e definiamo il sistema del laboratorio come quello in cui il protone dello stato iniziale è a riposo (situazione tipica degli esperimenti a *bersaglio fisso*). Vogliamo calcolare l' *energia di soglia* $E_{\pi t}$ della reazione, cioè l'energia minima che deve avere il pione nello stato iniziale nel laboratorio perchè la reazione avvenga. Tale condizione corrisponde al caso in cui tutte le particelle sono prodotte a riposo nel sistema del centro di massa. Per quanto detto nei paragrafi precedenti, basterà calcolare l'invariante $\sqrt{s}$ in un dato sistema di riferimento ed imporre:

$$\sqrt{s} \geq \sum_i m_i c^2 \tag{66}$$

Nel sistema di riferimento del laboratorio si ha:

$$\begin{aligned} s &= (p_\pi + p_p)^2 c^2 = (E_\pi + m_p c^2)^2 - |\mathbf{p}_\pi|^2 \\ &= (m_\pi c^2)^2 + (m_p c^2)^2 + 2E_\pi (m_p c^2) \end{aligned} \tag{67}$$

La condizione (66) diventa:

$$E_\pi \geq \frac{(\sum_i m_i c^2)^2 - (m_\pi c^2)^2 - (m_p c^2)^2}{2 m_p c^2} \tag{68}$$

Quindi, l'energia minima che il π deve avere nel sistema di riferimento del laboratorio per poter innescare la reazione (65) vale:

$$E_{\pi t} = \frac{(\sum_i m_i c^2)^2 - (m_\pi c^2)^2 - (m_p c^2)^2}{2 m_p c^2} \simeq 500\,\mathrm{MeV} \tag{69}$$

Un esempio interessante può essere dato dal calcolo dell'energia di soglia della reazione:

$$p + \gamma \to \Delta^+ \to p + \pi^0 \tag{70}$$

Si tratta di una reazione che avviene ad esempio nell'Universo tra i protoni di altissima energia presenti nel flusso di raggi cosmici ed i fotoni della radiazione cosmica di fondo ($T \simeq 2.7\,\mathrm{K}$). Tale reazione produce un protone di energia inferiore. Di conseguenza l'energia di soglia del protone per innescare la (70) costituirebbe di fatto l'estremo superiore nello spettro dei raggi cosmici: il *cutoff* GZK (dai nomi di Greisen, Zatzepin e Kuzmin). Anche in questo caso conviene calcolare $\sqrt{s}$ nel sistema del laboratorio. Con ovvio significato dei simboli:

$$\begin{aligned} s &= (p_p + p_\gamma)^2 c^2 = ... \\ &= (m_p c^2)^2 + 2E_\gamma (E_p - |\mathbf{p}_p| c cos\theta) \\ &\simeq (m_p c^2)^2 + 2E_\gamma E_p (1 - cos\theta) \end{aligned} \tag{71}$$

dove si è usata l'approssimazione $E_p \simeq |\mathbf{p}_p| c$ (valida nel regime di alte energie) e si è indicato con θ è l'angolo tra $\mathbf{p}_p$ e $\mathbf{p}_\gamma$. Imponendo la (66) si ottiene:

$$E_p \geq \frac{(m_\Delta c^2)^2 - (m_p c^2)^2}{2E_\gamma (1 - cos\theta)} \tag{72}$$

La soglia minima E_{pt} della reazione si ha in caso di urto *frontale* tra il protone ed il fotone, i.e. $\theta = \pi$:

$$E_{pt} = \frac{(m_\Delta c^2)^2 - (m_p c^2)^2}{4E_\gamma} \simeq 5 \cdot 10^{19}\,\mathrm{eV} \tag{73}$$

8 Confronto tra esperimenti con acceleratori a bersaglio fisso ed esperimenti agli anelli di collisione

Nello studiare le interazioni tra particelle elementari si utilizzano le due configurazioni rappresentate schematicamente in figura: nella prima una particella viene accelerata e fatta incidere su un bersaglio immobile; nella seconda due particelle (ad esempio elettrone-positrone) vengono entrambe accelerate e fatte collidere frontalmente.

Supponiamo per semplificare che le masse siano uguali: $m_1 = m_2 = m$. Siano E_{fix} l'energia della particella incidente nella prima configurazione e E_{col} l'energia delle particelle nella seconda configurazione. Gli invarianti s ed s' sono dati rispettivamente da:

$$\begin{aligned}
s &= (p_1 + p_2)^2 c^2 = \left(E_{fix} + mc^2\right)^2 - |\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2|^2 c^2 \\
&= 2\left[(mc^2)^2 + E_{fix} mc^2\right] \\
s' &= (p'_1 + p'_2)^2 c^2 \\
&= 4E_{col}^2
\end{aligned}$$

Ci chiediamo ora qual'è la relazione tra E_{fix} ed E_{col} affinchè le due collisioni avvengano nelle stesse condizioni. Si deve avere $s = s'$, e questo porta alla relazione:

$$E_{fix} = 2\frac{E_{col}^2}{mc^2} - mc^2 \tag{74}$$

Nel caso d'interesse per la fisica delle alte energie $\sqrt{s} \gg mc^2$ e quindi, dalla (74), $E_{fix} \gg E_{col}$. Per avere, quindi, la stessa quantità di energia $\sqrt{s}$ disponibile nell'urto, se si utilizza la prima configurazione bisogna accelerare la particella ad energie E_{lab} molto maggiori di quelle invece sufficienti nella seconda configurazione E_{col}. È per questa ragione che si utilizzano molto spesso gli anelli di collisione, anche se, in questo caso, la disposizione dei rivelatori è più complicata. Nel caso nonrelativistico le stesse considerazioni porterebbero alla relazione: $E_{fix} = 4E_{col}$.

9 Trasformazione dal sistema del CM a quello del laboratorio

Supponiamo che una particella di massa m decada e che, nel suo sistema di riposo, uno dei prodotti di decadimento abbia un impulso $\mathbf{p}$ che forma un angolo θ con l'asse X preso nella direzione del moto della particella nel sistema del laboratorio. Il problema che ci poniamo e quello di valutare il valore di quest'angolo nel sistema del laboratorio. Il laboratorio, rispetto al CM, si muove con velocità:

$$\boldsymbol{\beta}_0 = -\frac{v}{c}\hat{\mathbf{x}} \ ; \ v > 0 \tag{75}$$

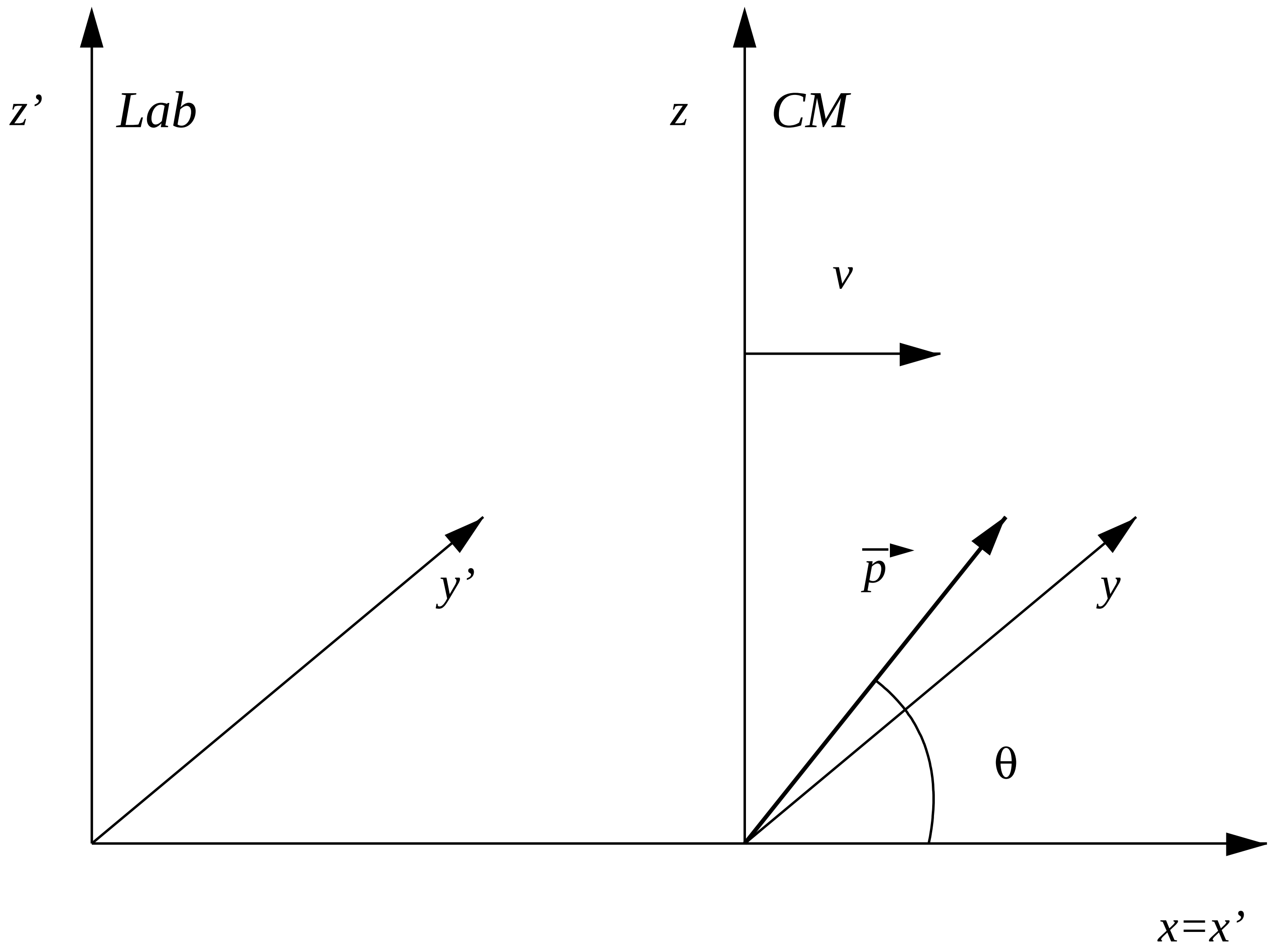
La velocità v si calcola dal fattore di Lorentz della particella iniziale:

$$\gamma_0 = \frac{E_0}{mc^2} \ ; \ \beta_0^2 = \frac{\gamma_0^2 - 1}{\gamma_0^2} \tag{76}$$

Per particelle relativistiche si ha che $\gamma_0 \gg 1$ e $\beta_0 \simeq 1$. Applichiamo la trasformazione di Lorentz a $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \boldsymbol{\beta}_0\gamma_0\left[\frac{\gamma_0}{\gamma_0 + 1}\boldsymbol{\beta}_0 \cdot \mathbf{p} - \frac{E}{c}\right] \tag{77}$$

$$\frac{E'}{c} = \gamma_0\left[\frac{E}{c} - \boldsymbol{\beta}_0 \cdot \mathbf{p}\right] \tag{78}$$



$\mathbf{p}$ e E sono l'impulso e l'energia del prodotto di decadimento nel CM, mentre $\mathbf{p}'$ e E' sono le stesse quantità misurate nel sistema del laboratorio. Se $\mathbf{p}$ sta nel piano z, x (cosa che si può sempre realizzare con una scelta opportuna degli assi):

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}' &= \hat{z}|\mathbf{p}|sin\theta + \hat{\mathbf{x}}|\mathbf{p}|cos\theta - \hat{\mathbf{x}}\beta_0\gamma_0\left[-\frac{\gamma_0}{\gamma_0+1}\beta_0|\mathbf{p}|cos\theta - \frac{E}{c}\right] \\
&= \hat{z}|\mathbf{p}|sin\theta + \hat{\mathbf{x}}\left[|\mathbf{p}|cos\theta\left(1+\frac{\beta_0^2\gamma_0^2}{\gamma_0+1}\right)+\frac{E}{c}\gamma_0\beta_0\right] \\
&= \hat{z}|\mathbf{p}|sin\theta + \hat{\mathbf{x}}\gamma_0|\mathbf{p}|\left[cos\theta + \frac{E}{c|\mathbf{p}|}\beta_0\right] \\
&= \hat{z}|\mathbf{p}|sin\theta + \hat{\mathbf{x}}\gamma_0|\mathbf{p}|\left[cos\theta + \frac{\beta_0}{\beta}\right] \qquad (79)
\end{aligned}$$

Quindi:

$$tan\theta_{lab} = \frac{1}{\gamma_0}\frac{sin\theta}{cos\theta + \frac{\beta_0}{\beta}} \qquad (80)$$

dove β è relativo al prodotto di decadimento nel sistema del CM. Se la distribuzione dell'angolo θ nel sistema del centro di massa è isotropa, dalla (80) si vede che la stessa distribuzione, nel sistema di riferimento del laboratorio, risulta essere deformata nella direzione del moto della particella instabile di partenza (*boost di Lorentz*). Infatti, come si evince dalla (80), il prodotto di decadimento, nel sistema del laboratorio, viene emesso in avanti purchè si abbia:

$$cos\theta > -\frac{\beta_0}{\beta} \qquad (81)$$

In particolare, questo avviene sempre nel caso in cui $\beta_0 > \beta$. In Fig.5 viene riportato θ_{lab} in funzione di θ per $\gamma = 10$ e per due possibili valori di β_0/β.

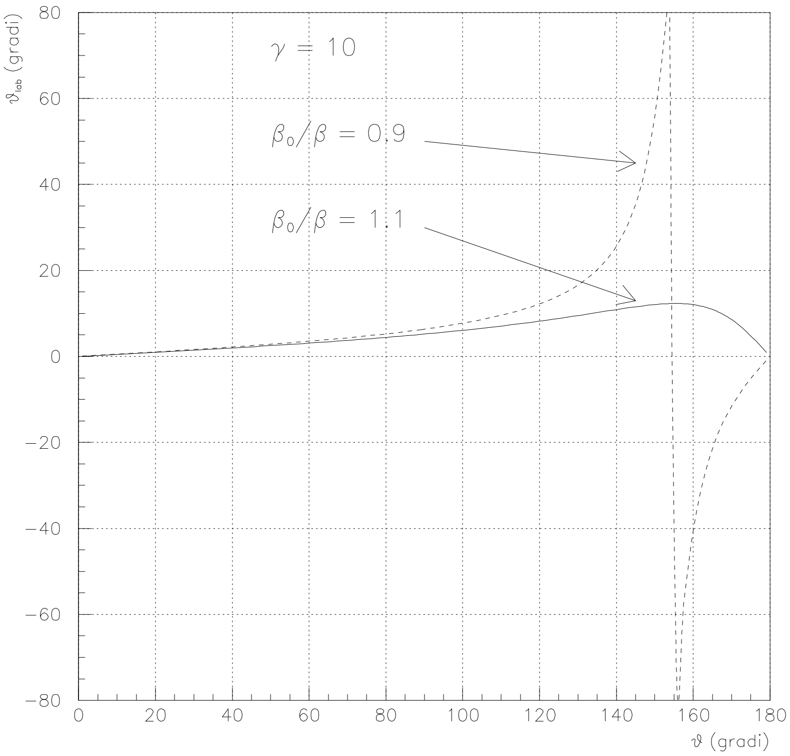


Figure 5: Angolo θ_{lab} formato da un prodotto di decadimento, nel sistema di riferimento del laboratorio, con l'asse x in funzione dell'angolo θ formato con lo stesso asse nel sistema del centro di massa (vedi testo).

Si consideri come esempio il caso del decadimento:

$$\pi^0 \to \gamma + \gamma \tag{82}$$

In tal caso $\beta = 1$. Inoltre nelle tipiche condizioni sperimentali $\beta_0 \simeq 1$. Di conseguenza la coppia di fotoni viene emessa quasi sempre in avanti. L'unica eccezione è il caso in cui uno dei due viene emesso con $\theta \simeq 180°$. Inoltre dalla (80) e dalla stessa Fig.5, si può intuire come l'angolo di separazione tra i due fotoni sia tipicamente $\theta_{lab} \sim 1/\gamma_0$.

References

[1] R. Hagedorn. *Relativistic kinematics*, W.A. Benjamin Inc., 1964

[2] D.E. Groom et al. *Review of Particle Physics*, Eur. Phys. J. **C15** (2000) 1-878. Disponibile anche su web: *pdg.ge.infn.it*

10 Esercizi

N.1

Calcolare la velocità massima dell'elettrone nel decadimento:

$$\mu^- \to e^- + \overline{\nu}_e + \nu_\mu \tag{83}$$

nel sistema di riposo del μ.

Supponendo nulla la massa dei neutrini possiamo riscrivere la (47) con $m_{12} = 0$:

$$|\mathbf{p}_e| = c\frac{m_\mu^2 - m_e^2}{2m_\mu} \tag{84}$$

l'energia massima dell'elettrone sarà:

$$\begin{aligned} E_e &= \sqrt{\mathbf{p}_e{}^2 c^2 + m_e{}^2 c^4} \\ &= c^2 \frac{m_\mu^2 + m_e^2}{2m_\mu} \end{aligned} \tag{85}$$

trascurando m_e^2 rispetto a m_μ^2:

$$E_e \simeq \frac{1}{2} m_\mu c^2 \tag{86}$$

vediamo che in questo caso l'elettrone prende all'incirca metà dell'energia totale a disposizione, che è quella di riposo del μ.

Dalla (86) e dalla (31) si ricava il fattore γ dell'elettrone:

$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{m_\mu}{m_e} \simeq 103.38 \tag{87}$$

da cui:

$$\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}} \simeq 0.99995 \tag{88}$$

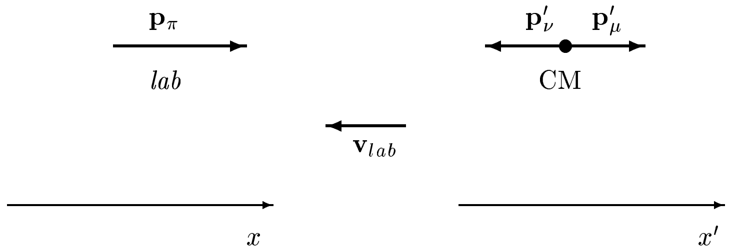
l'elettrone uscente è dunque ultrarelativistico.

N.2

Calcolare l'energia massima del muone nel decadimento:

$$\pi^- \to \mu^- + \overline{\nu}_\mu \tag{89}$$

nel sistema del laboratorio, in cui il pione ha un'energia $E_\pi = 1 \;\; GeV$.



Sappiamo che nel CM le quantità di moto del μ e del ν sono collineari, hanno lo stesso modulo e sono opposte in verso; il modulo della quantità di moto del μ si ottiene dalla (41). Ponendo $m_\nu = 0$ si ha:

$$|\mathbf{p}'_\mu| = c\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} \simeq 29.8 \;\; MeV/c \tag{90}$$

$$E'_\mu = c^2\frac{m_\pi^2 + m_\mu^2}{2m_\pi} \simeq 110 \;\; MeV \tag{91}$$

Ora il modulo della quantità di moto del μ è massima nel laboratorio quando $\mathbf{p}'_\mu$ e $\mathbf{p}_\pi$ sono disposti come in figura ($\mathbf{v}_{lab}$ è la velocità del sistema del laboratorio rispetto al CM). Per tutti gli altri valori dell'angolo tra $\mathbf{p}'_\mu$ e $\mathbf{p}_\pi$ la componente trasversa di $\mathbf{p}'_\mu$ rimane invariata e $|\mathbf{p}'_\mu|$ è minore. Per calcolare E_μ dobbiamo applicare le relazioni in (36) con $\beta \to -\beta$:

$$\frac{E_\mu}{c} = \gamma\left(\frac{E'_\mu}{c} + \beta|\mathbf{p}'_\mu|\right) \tag{92}$$

γ e β si calcolano a partire dall'energia e dalla massa del pione:

$$\gamma = \frac{E_\pi}{m_\pi c^2} \simeq 7.16 \tag{93}$$

$$\beta \simeq 0.990 \tag{94}$$

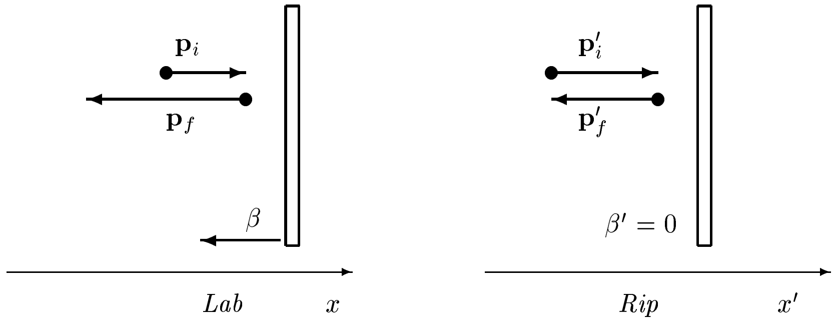
quindi la velocità del pione è molto prossima a quella della luce; ponendo $\beta \simeq 1$ nella (92) si ottiene:

$$E_\mu \simeq \gamma m_\pi c^2 \tag{95}$$

cioè l'energia del muone è all'incirca uguale a quella del pione. Cosa succede in questo caso al neutrino ?

N.3

Si consideri l'urto tra una parete di massa infinita ed una particella. Nel sistema di riferimento del laboratorio (*lab*), la parete è parallela al piano $Y - Z$ e si sta muovendo con velocità $\vec{V} = \vec{\beta} c$ lungo $-\hat{x}$. La particella ha invece un impulso iniziale $\vec{p}_i$ lungo $\hat{x}$. Si calcoli la variazione dell'impulso della particella dopo un urto elastico con la parete. Si faccia il confronto col caso non relativistico.



Prima di tutto conviene fare una trasformazione per portarsi nel sistema di riferimento in cui la parete è a riposo (*Rip*). Se E_i è l'energia iniziale della particella nel *lab*, si avrà, con ovvio significato dei simboli:

$$\begin{aligned} p'_{xi} &= \gamma(p_{xi} + \beta E_i/c) \\ E'_i/c &= \gamma(E_i/c + \beta p_{xi}) \end{aligned} \tag{96}$$

Poichè l'urto è elastico, nel sistema *Rip*:

$$\begin{aligned} p'_{xf} &= -p'_{xi} \\ E'_f &= E'_i \end{aligned} \tag{97}$$

Quindi, utilizzando le (96), nel sistema *lab* si ha:

$$\begin{aligned} p_{xf} &= \gamma(p'_{xf} - \beta E'_f/c) = -\gamma(p'_{xi} + \beta E'_i/c) = ... \\ &= -\gamma^2 \left[(1+\beta^2) p_{xi} + 2\beta E_i/c\right] \end{aligned} \tag{98}$$

Definita come $v_i = \beta_i c$ la velocità della particella prima dell'urto nel sistema *lab*, si ottiene:

$$\frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} = \gamma^2 \left[1 + \beta^2 + 2\frac{\beta}{\beta_i}\right] \tag{99}$$

oppure:

$$|\mathbf{p}_f| = 2m\gamma^2 \beta c \tag{100}$$

nel caso in cui la particella fosse inizialmente in quiete. Le formule analoghe, ottenute nel caso non relativistico (trasformazioni di Galileo), sono:

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{p}_f|}{\mathbf{p}_i} &= \left[1 + 2\frac{V}{v_i}\right] \\ |\mathbf{p}_f| &= 2mV \end{aligned} \tag{101}$$

che possono anche ricavate dalle (99) e (100) per basse velocià. Analoghe formule possone essere ricavate per E_i ed E_f. È importante osservare come nel caso in cui il moto della parete sia relativistico il guadagno energetico della particella nell'urto sia circa γ^2 volte superiore a quello ottenuto nel caso non relativistico. Tale effetto fu ipotizzato da E.Fermi come uno dei possibili meccanismi di accelerazione dei raggi cosmici ad energie elevatissime. Nel modello di Fermi modello le particelle vengono diffuse da onde d'urto di plasma magnetizzato (generate, ad esempio, in esplosioni di supernovae) che si propagano nello spazio interstellare.